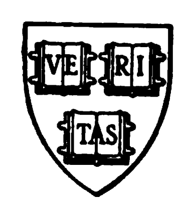
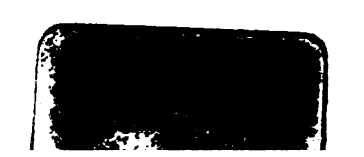

VE
RI
TAS



MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT

DE FRANCE.

ANNÉE 1818.

DE L'IMPRIMERIE DE FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS,
IMPRIMEURS DU ROI ET DE L'INSTITUT, RUE JACOB, Nº 24.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT

DE FRANCE.

ANNÉE 1818.

TOME III.



A PARIS,

CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS,

IMPRIMEURS DU ROI ET DE L'INSTITUT,

LIBRAIRES POUR LES MATHÉMATIQUES, L'ARCHITECTURE ET LA MARINE,

rue Jacob, n° 24.

M. DCCC. XX.

TABLE

DES MÉMOIRES CONTENUS DANS CE VOLUME,

Qui est le troisième *de la Collection des Mémoires de l'Académie des Sciences, depuis l'ordonnance du* 21 *mars* 1816.

MÉMOIRE sur le flux et le reflux de la mer; par M. *le marquis de Laplace*. . . . . Page 1

Mémoire sur les inondations souterraines auxquelles sont exposés périodiquement plusieurs quartiers de Paris; par M. *Girard*. 91

Description d'une aggrégation de pierres observées dans la Caroline du nord, États-Unis d'Amérique, et connue dans le pays sous la dénomination de *mur naturel* (natural wall), par M. *de Beauvois*; avec *une* planche. 109

Mémoire sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles, et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques; par M. *Poisson*. . . . 121

Mémoire sur les lois générales de la double réfraction et de la polarisation, dans les corps régulièrement cristallisés, par M. *Biot*; avec *six* planches. 177

Mémoire sur la combinaison de l'oxigène avec l'eau, et sur les propriétés extraordinaires que possède l'eau oxigénée; par M. *Thénard*. 385

Addition au Mémoire sur la figure de la terre, inséré dans le volume précédent, par M. *le marquis de Laplace*. 489

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE.

Analyse des travaux de l'Académie royale des Sciences pendant l'année 1818 :

Partie Mathématique, par M. le chevalier *Delambre*, Secrétaire-perpétuel. . . . . Page j

Partie Physique, par M. le baron *Cuvier*, Secrétaire-perpétuel. clxxix

Notice sur la vie et les travaux de M. Périer, par M. le chevalier *Delambre*, Secrétaire-perpétuel. lix

Notices sur les voyages entrepris pour mesurer la courbure de la terre et la variation de la pesanteur terrestre, sur l'arc du méridien compris entre les îles Pythiuses et les îles Shetland; par M. *Biot*. . . . . lxxiij

Rapport fait à l'Académie royale des Sciences sur un ouvrage de M. *Vicat*, ingénieur des pont-et-chaussées, intitulé : *Recherches expérimentales sur les chaux de construction*, etc. Commissaires, MM. *de Prony*, *Gay-Lussac*, et *Girard*, rapporteur. clxxix

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE.

MÉMOIRE

SUR LE FLUX ET LE REFLUX DE LA MER;

PAR M. DE LAPLACE.

Ce phénomène mérite particulièrement l'attention des observateurs, en ce qu'il est le résultat de l'action des astres, le plus près de nous, et le plus sensible; et que les nombreuses variétés qu'il présente, sont très-propres à vérifier la loi de la pesanteur universelle. Sur l'invitation de l'Académie des sciences, on fit, au commencement du dernier siècle, dans le port de Brest, une suite d'observations qui furent continuées pendant six années consécutives, et dont la plus grande partie a été publiée par Lalande, dans le quatrième volume de son Astronomie. La situation de ce port est très-favorable à ce genre d'observations : il communique avec la mer, par un canal fort vaste, au fond duquel le

les trois quadratures les plus voisines de l'équinoxe et du solstice. Dans les syzigies, j'ai pris l'excès de la haute mer du soir sur les basses mers du matin, du jour qui précède la syzigie, du jour même de la syzigie, et des quatre jours qui la suivent; parce que la plus haute mer arrive vers le milieu de cet intervalle. J'ai fait une somme des excès correspondants à chaque jour, en doublant les excès relatifs à la syzigie intermédiaire, ou la plus voisine de l'équinoxe ou du solstice. Par ce procédé, les effets des variations des distances du soleil et de la lune à la terre, se trouvent détruits; car si la lune était, par exemple, vers son périgée, dans la syzigie intermédiaire, elle était vers son apogée, dans les deux syzigies extrêmes. Les sommes d'excès qu'on obtient ainsi sont donc, à-fort-peu-près, indépendantes des variations du mouvement et de la distance des astres. Elles le sont encore des inégalités des marées, différentes de l'inégalité dont le période est d'environ un demi-jour, et qui, dans nos ports, est beaucoup plus grande que les autres : car en considérant à-la-fois les observations des deux équinoxes et des deux solstices, les effets de la petite inégalité dont la période est à-peu-près d'un jour, se détruisent mutuellement; les sommes dont il s'agit sont donc uniquement dues à la grande inégalité. Les vents doivent avoir sur elles peu d'influence, car s'ils élèvent la haute mer, ils doivent également soulever la basse mer. J'ai déterminé la loi de ces sommes pour chaque année, en observant que leur variation est à-fort-peu-près proportionnelle au quarré de leur distance en temps, au *maximum;* ce qui m'a donné l'intervalle dont ce *maximum* suit la moyenne des marées syzigies, et le coëfficient du quarré du temps. Le peu de différence que pré-

sentent, à l'égard de ce coëfficient, les résultats des observations de chaque année, prouve la régularité de ces observations.

J'ai considéré de la même manière les marées quadratures, en prenant les excès de la haute mer du matin, sur la basse mer du soir, du jour même de la quadrature, et des trois jours qui la suivent. L'accroissement des marées, à partir du *minimum,* étant beaucoup plus rapide que leur diminution, à partir du *maximum;* j'ai dû restreindre à un plus petit intervalle, la loi de variation proportionnelle au quarré du temps.

Dans tous ces résultats, l'influence de la déclinaison des astres sur les hauteurs des marées, et sur la loi de leur variation dans les syzigies et dans les quadratures, se montre avec évidence. En considérant par la même méthode, neuf syzigies équinoxiales vers le périgée de la lune, et neuf syzigies équinoxiales vers son apogée; l'influence des changements de la distance lunaire, sur la hauteur et sur la loi de variation des marées, se manifeste avec la même évidence. C'est ainsi qu'en combinant les observations de manière à dégager l'élément que l'on veut connaître, de tout ce qui lui est étranger; on parvient à démêler les lois des phénomènes, confondues dans les recueils d'observations.

Les résultats des observations étant toujours susceptibles d'erreurs, il est nécessaire de connaître la probabilité que ces erreurs sont contenues dans des limites données. On sent, il est vrai, que la probabilité restant la même, ces limites sont d'autant plus rapprochées, que les observations sont plus nombreuses et plus concordantes entre elles. Mais cet aperçu général ne suffit pas pour assurer l'exactitude des

résultats des observations, et l'existence des causes régulières qu'elles paraissent indiquer : quelquefois même, il a fait rechercher la cause de phénomènes qui n'étaient que des accidents du hasard. Le calcul des probabilités peut seul faire apprécier ces objets; ce qui rend son usage de la plus haute importance dans les sciences physiques et morales. Les recherches précédentes m'offraient une occasion trop favorable d'appliquer à l'un des plus grands phénomènes de la nature, les nouvelles formules auxquelles je suis parvenu dans ma Théorie analytique des probabilités, pour ne pas la saisir. J'expose donc ici l'application que j'en ai faite aux lois de la variation des hauteurs et des intervalles des marées syzigies et quadratures, et à l'influence qu'exercent, à leur égard, les déclinaisons des astres. On verra que ces lois sont déterminées par les observations, avec une précision très-remarquable; ce qui explique l'accord des résultats des observations modernes, avec ceux des observations faites, il y a plus d'un siècle, dans le port de Brest, et que j'ai discutées dans le quatrième livre de la Mécanique céleste. On sentira l'utilité de cette application du calcul des probabilités, si l'on considère que plusieurs savants, et spécialement Lalande, pour n'avoir pas soumis à ce calcul l'ensemble des observations, et pour s'être attachés à quelques observations partielles où les marées, vers les solstices, s'étaient fort élevées par le concours de causes accidentelles, ont révoqué en doute l'influence des déclinaisons des astres dans ces phénomènes; influence indiquée à-la-fois par les hauteurs des marées, et par les lois de leur variation, avec une probabilité bien supérieure à celle de la plupart des choses sur lesquelles on ne se permet aucun doute.

Je compare ensuite tous ces résultats à la théorie de la pesanteur universelle. Celle que j'ai donnée dans le livre cité, est fondée sur le principe suivant de dynamique, qui peut être utile dans tous les cas où les circonstances sont trop compliquées pour être soumises au calcul. *L'état d'un systéme de corps, dans lequel les conditions primitives du mouvement ont disparu par les résistances qu'il éprouve, est périodique comme les forces qui l'animent.* En réunissant ce principe à celui de la coëxistence des oscillations très-petites, je suis parvenu à une expression de la hauteur des marées, dont les arbitraires comprennent l'effet des circonstances locales du port. Pour cela, j'ai réduit en séries de sinus et de cosinus d'angles croissants proportionnellement au temps, l'expression génératrice des forces lunaires et solaires, sur l'Océan. Chaque terme de la série peut être considéré comme représentant l'action d'un astre particulier qui se meut uniformément et à une distance constante, dans le plan de l'équateur. De là naissent plusieurs espèces de flux partiels dont les périodes sont à-peu-près d'un demi-jour, d'un jour, d'une demi-année, d'une année, enfin de dix-huit ans et demi, durée du mouvement périodique des nœuds de l'orbe lunaire. En suivant cette idée que j'ai exposée dans le n° 19 du liv. IV de la Mécanique céleste, je parviens ici à des formules plus exactes encore que celles dont j'ai fait usage dans le livre cité.

J'ai comparé ces nouvelles formules aux nouvelles observations faites dans le port de Brest, et j'ai trouvé entre elles un parfait accord. Il était curieux de voir si les constantes arbitraires déterminées par cette comparaison, se retrouvent les mêmes que celles qui résultent des observations faites, il

y a plus d'un siècle; ou si elles ont éprouvé des altérations par les changemens que les opérations de la nature et de l'art ont pu produire dans ce long intervalle, au fond de la mer, dans le port et sur les côtes adjacentes. Il résulte de cet examen, que les hauteurs actuelles des marées surpassent d'un trente-quatrième environ, les hauteurs déterminées par les observations anciennes. Mais ces observations n'ayant point été faites au même lieu que les observations modernes; cette considération jointe à l'incertitude de la graduation de l'ancienne échelle, ne permet pas de prononcer sur ce point qui doit fixer, à l'avenir, l'attention des observateurs. Du reste, les observations anciennes et modernes présentent l'accord le plus satisfaisant, soit entre elles, soit avec la théorie de la pesanteur, par rapport aux variations des hauteurs des marées, dépendantes des déclinaisons et des distances des astres à la terre, et par rapport aux lois de leur accroissement et de leur diminution, à mesure qu'elles s'éloignent de leur *minimum* et de leur *maximum*. Je n'avais point considéré, dans la Mécanique céleste, ces lois, relativement aux variations des distances de la lune à la terre. Ici je les considère, et je trouve le même accord entre l'observation et la théorie.

Le retard des plus grandes et des plus petites marées sur les instants des syzigies et des quadratures, a été observé par les anciens; comme on le voit dans Pline-le-naturaliste. Daniel Bernoulli, dans sa pièce sur le flux et le reflux de la mer, couronnée en 1740 par l'Académie des sciences, attribue ce retard à l'inertie des eaux, et peut-être encore, ajoute-t-il, au temps que l'action de la lune emploie à se transmettre à la terre. Mais j'ai prouvé, dans le quatrième livre de la Méca-

nique céleste, qu'en ayant égard à l'inertie des eaux, les plus grandes marées coïncideraient avec les syzigies, si la mer recouvrait régulièrement la terre entière. Quant au temps de la transmission de l'action de la lune, j'ai reconnu par l'ensemble des phénomènes célestes, que l'attraction de la matière se transmet avec une vîtesse incomparablement supérieure à la vîtesse même de la lumière. Il faut donc chercher une autre cause du retard dont il s'agit.

J'ai fait voir, dans le livre cité, que ce phénomène dépend de la rapidité du mouvement de l'astre dans son orbite, combinée avec les circonstances locales du port. Nous aurons une idée juste de l'influence de ces causes, en imaginant un vaste canal communiquant avec la mer, et s'avançant dans les terres sous le méridien de son embouchure. Si l'on suppose le soleil et la lune, mus dans le plan de l'équateur, et qu'à l'embouchure, la pleine mer arrivant à l'instant même du passage de l'astre au méridien, emploie un demi-jour à parvenir à l'extrémité du canal; il est visible qu'à ce dernier point, tous les phénomènes qui ont lieu à l'embouchure, se reproduisent après un demi-jour. Ainsi les *maxima* et les *minima* des marées n'auront lieu qu'un demi-jour après la syzigie et la quadrature. Si le flux lunaire, à raison de sa grandeur, mettait un trentième de jour moins que le flux solaire à parcourir le canal : le *maximum,* à l'extrémité du canal, arrivant lorsque les deux flux partiels solaire et lunaire coïncident, il correspondrait au cas où la lune traverse le méridien, un trentième de jour après le soleil; ce qui suit d'un jour à-peu-près la syzigie. En l'ajoutant au demi-jour que la marée solaire est supposée employer à parcourir le canal, on aurait un jour et demi pour le temps

dont le *maximum* de la marée suivrait la syzigie à son extrémité.

Concevons maintenant que le port soit au point de jonction de deux canaux dont les embouchures soient très-peu distantes entre elles. Supposons que la marée solaire emploie un quart de jour à parcourir le premier canal, et un jour et demi à parcourir le second. Il est clair que la basse mer solaire du premier canal correspond alors à la haute mer du second; et si, à l'extrémité commune des deux canaux, les deux marées sont d'égale grandeur, la mer y sera stationnaire à ne considérer que l'action du soleil; mais le jour lunaire surpassant le jour solaire, de $0^{j},035$, la basse mer lunaire du premier canal ne correspondra point à la haute mer lunaire du second canal; les deux flux partiels lunaires ne se détruiront point mutuellement, et leur différence pourra être augmentée par leurs mouvements propres dans les canaux; il y aura donc un flux lunaire sensible à leurs extrémités. Le rapport de l'action solaire à l'action lunaire, qui dans le port de Brest est à-très-peu-près un tiers, sera donc nulle à cette extrémité. On voit par là, que les circonstances locales peuvent influer considérablement sur le rapport des actions des deux astres sur la mer. J'ai donné, dans le livre cité de la Mécanique céleste, une méthode pour déterminer par les observations, l'accroissement que le rapport de l'action de la lune à celle du soleil, reçoit des circonstances locales. En comparant les marées équinoxiales et solsticiales observées à Brest, dans les syzigies et dans les quadratures, je fus conduit par cette méthode, à un accroissement d'un dixième dans ce rapport; mais je remarquai qu'un élément aussi délicat devait être déterminé par un plus grand nom-

bre d'observations. L'ensemble des observations modernes m'a procuré cet avantage. Ces observations deux fois plus nombreuses que les anciennes, confirment l'accroissement dont il s'agit et le portent à un neuvième ; en sorte que son existence est très-vraisemblable. En appliquant à cet objet les formules de probabilité, je trouve que la probabilité de cet accroissement est $\frac{2561}{2562}$ par les seules observations modernes. Ainsi la réunion de ces observations avec les anciennes ne doit laisser aucun doute à cet égard. Pour conclure des phénomènes des marées, le vrai rapport des actions du soleil et de la lune; il faut corriger de cet accroissement, l'action lunaire. Alors on a $\frac{1}{69}$, environ, pour la masse de la lune, celle de la terre étant prise pour unité; d'ou il est facile de conclure les valeurs des phénomènes astronomiques qui dépendent de cette masse. Mais en considérant la petitesse des quantités qui m'ont servi à déterminer l'accroissement de l'action lunaire, et en réfléchissant que ces quantités sont du même ordre que les petites erreurs dont l'application du principe de la coëxistence des ondulations très-petites, aux phénomènes des marées, est susceptible; je n'ose garantir l'exactitude de cette valeur de la masse lunaire, et j'incline à penser que les phénomènes astronomiques sont plus propres à la fixer.

J'ai déterminé pareillement les heures et les intervalles des marées dans les syzigies et dans les quadratures vers les équinoxes et les solstices, et dans l'apogée et le périgée de la lune. L'influence des déclinaisons et des distances des astres est indiquée par ces observations avec une extrême probabilité dont je détermine la valeur: j'ai retrouvé les mêmes ré-

sultats que m'avait donnés la discussion des observations anciennes, et le même accord de ces résultats avec la théorie. Les intervalles des marées peuvent servir à déterminer le rapport des actions de la lune et du soleil sur la mer. On conçoit, en effet, que plus l'action lunaire l'emporte sur l'action solaire, plus l'intervalle journalier des marées se rapproche du jour lunaire. Le retard observé des marées syzigies, donne à-fort-peu-près le même rapport que le retard des marées quadratures; le milieu de ces rapports est 3, 14782. Les hauteurs des marées donnent pour ce rapport, 2, 88347. La différence, quoique assez petite, ne me paraît pas devoir être attribuée aux seules erreurs des observations; et je pense qu'une partie de cette différence vient de l'erreur de l'hypothèse de la coëxistence des oscillations, qui ne peut plus être considérée comme très approchée, quand les ondulations, comme celles de la mer à Brest, sont considérables. L'intervalle moyen des marées est exactement la durée moyenne du jour lunaire, en sorte, que dans nos ports, il y a autant de marées que de passages de la lune au méridien. On peut donc considérer le flux et le reflux de la mer, comme un phénomène lunaire, modifié par l'action solaire qui rend les intervalles des flux consécutifs, alternativement plus grands et plus petits que la durée d'un demi-jour lunaire, et les hauteurs des marées, alternativement plus petites et plus grandes que les hauteurs dues à l'action seule de la lune.

Des hauteurs des marées.

I. J'ai considéré les syzigies équinoxiales suivantes :

1807.	9 mars;	23 mars;	8 avril;	2 septembre;	16 septembre;	1 octobre.
1808.	12 »	27 »	10 »	4 »	20 »	4 »
1809.	2 »	15 »	31 mars	9 »	23 »	9 »
1810.	5 »	21 »	4 avril	13 »	28 »	12 »
1811.	10 »	24 »	8 »	2 »	17 »	2 »
1812.	13 »	28 »	11 »	5 »	20 »	5 »
1813.	2 »	17 »	1 »	10 »	24 »	10 »
1814.	6 »	21 »	4 »	13 »	29 »	13 »

J'ai pris dans les syzigies, l'excès de la haute mer du soir sur la basse mer du matin, relatif au jour qui précède la syzigie au jour même de la syzigie et aux quatre jours qui la suivent. J'ai fait pour chaque année une somme des excès relatifs à chacun de ces jours, en doublant les résultats correspondants à la syzigie la plus voisine de l'équinoxe, et qui est la moyenne des trois syzigies considérées dans chaque équinoxe. J'ai obtenu ainsi les résultats suivants exprimés en mètres.

1807.....	44^m,425;	49^m,020;	51^m,460;	50^m,720;	48^m,830;	44^m,070.
1808.....	44, 740;	49, 155;	51, 116;	51, 005;	48, 495;	43, 910.
1809.....	44, 495;	48, 530;	50, 910;	51, 145;	49, 305;	44, 910.
1810.....	46, 366;	49, 910;	51, 686;	50, 371;	48, 069;	42, 890.
1811.....	44, 205;	49, 030;	51, 290;	51, 110;	48, 865;	43, 825.
1812.....	43, 210;	48, 448;	51, 512;	51, 530;	49, 526;	45, 561.
1813.....	45, 317;	49, 071;	51, 043;	50, 797;	49, 957;	43, 264.
1814.....	44, 219;	48, 651;	50, 553;	50, 707;	48, 791;	44, 708.

Si l'on nomme $f, f', f'', f''', f^{iv}, f^{v}$, les sommes des

hauteurs relatives à chacun des six jours, et que l'on représente la loi de ces sommes par

$$\zeta t^2+\zeta' t+\zeta'',$$

t étant le temps écoulé depuis la haute marée du soir du jour qui précède la syzigie, l'intervalle de deux marées consécutives du soir étant pris pour unité ; on aura les six équations de condition suivantes ;

$$\begin{aligned}\zeta''&=f;\\ \zeta+\zeta'+\zeta''&=f';\\ 4\zeta+2\zeta'+\zeta''&=f'';\\ 9\zeta+3\zeta'+\zeta''&=f''';\\ 16\zeta+4\zeta'+\zeta''&=f^{\text{iv}};\\ 25\zeta+5\zeta'+\zeta''&=f^{\text{v}}.\end{aligned}$$

Si l'on multiplie chacune de ces équations, respectivement par le coëfficient de ζ, et que l'on fasse la somme de ces produits; si l'on fait des sommes semblables relativement aux coëfficiens de ζ' et de ζ'', ces trois sommes formeront les équations suivantes

$$\begin{aligned}979.\zeta+225.\zeta'+55.\zeta''&=f'+4f''+9f'''+16f^{\text{iv}}+25f^{\text{v}};\\ 225.\zeta+55.\zeta'+15.\zeta''&=f'+2f''+3f'''+4f^{\text{iv}}+5f^{\text{v}};\\ 55.\zeta+15.\zeta'+6.\zeta'&=f+f'+f''+f'''+f^{\text{iv}}+f^{\text{v}}.\end{aligned}$$

Ces équations donnent

$$\zeta=\frac{10.(f+f^{\text{v}}-f''-f''')+2(f''+f'''-f'-f^{\text{iv}})}{112};$$

$$\zeta'=\frac{5.(f^{\text{v}}-f)+3.(f^{\text{iv}}-f')+f'''-f''}{35}-5\zeta;$$

$$\zeta''=\frac{f+f'+f''+f'''+f^{\text{iv}}+f^{\text{v}}}{6}-\frac{5}{2}.\zeta'-\frac{55}{6}.\zeta.$$

Maintenant on a, le mètre étant pris pour unité,

$$f=356{,}977;\quad f'=391{,}815;$$
$$f''=409{,}570;\quad f'''=407{,}385;$$
$$f^{\text{iv}}=391{,}838;\quad f^{\text{v}}=353{,}138.$$

On trouve ainsi

$$\zeta=-8{,}9446;$$
$$\zeta'=44{,}114;$$
$$\zeta''=356{,}828.$$

L'expression $\zeta t^2+\zeta' t+\zeta''$, ou $\zeta''-\frac{\zeta'^2}{4\zeta}+\zeta.\left(t+\frac{\zeta'}{2\zeta}\right)^2$, des valeurs de f, f', etc., devient ainsi

$$411^{m}{,}220-8^{m}{,}9446.(t-2{,}46596)^2.$$

Exprimons par t' la distance d'une haute marée du soir, à l'instant de la syzigie, t' étant supposé positif pour les marées qui suivent la sysigie; et représentons par $a-6.t'^2$ cette haute marée. La basse marée qui la précède sera, d'après la loi de la pesanteur universelle, $-a+6.\left(t'-\frac{1}{4}\right)^2$; l'excès de la haute mer sur la basse mer sera donc

$$2a-\frac{6}{32}-26.\left(t'-\frac{1}{8}\right)^2.$$

Ainsi, en désignant par i le nombre des syzigies employées pour former les valeurs de f, f', etc., l'expression générale de ces valeurs sera

$$2i\alpha - \frac{i6}{32} - 2i6 \cdot \left(t' - \frac{1}{8}\right)^2; \quad (a)$$

Désignons par k la valeur moyenne des quantités dont les syzigies ont précédé, dans les observations précédentes, les instants des hautes marées du soir des jours mêmes des syzigies; on aura

$$t' = t - 1 + k.$$

On a vu, dans le quatrième livre de la Mécanique céleste, qu'il faut diminuer t', d'une quantité constante que nous nommerons u; la formule (a) devient ainsi

$$2i\alpha - \frac{2i6}{64} - 2i6 \cdot \left(t - \frac{9}{8} + k - u\right)^2.$$

Cette formule doit coïncider avec celle-ci

$$\zeta'' - \frac{\zeta'^2}{4\zeta} + \zeta \cdot \left(t + \frac{\zeta'}{2\zeta}\right)^2; \quad (b)$$

on a donc

$$\frac{\zeta'}{2\zeta} = -\frac{9}{8} + k - u;$$

ce qui donne

$$u = -\frac{\zeta'}{2\zeta} - \frac{9}{8} + k.$$

En substituant les valeurs précédentes de ζ' et de ζ, on a

$$u = 1{,}34096 + k.$$

Dans les syzigies précédentes, le retard journalier des marées a été $0^j{,}026736$, en sorte que l'intervalle pris pour unité est $1^j{,}026736$; on a ainsi, en parties du jour,

$$1{,}34096 = 1^j{,}37682.$$

La valeur moyenne k, dont les syzigies ont précédé les marées du soir, est $0^j,10417$; on a ainsi

$$u = 1^j,48099.$$

Cette valeur diffère peu de la valeur $1^j,50724$ à laquelle je suis parvenu dans le nº 24 du liv. IV de la Mécanique céleste.

La comparaison des expressions (a) et (b), donne

$$2i6 = 8,9446;$$

$$2i\alpha = 411,359.$$

Le nombre i des syzigies employées, est ici égal à 64, en comptant pour deux, les syzigies intermédiaires dont on a doublé les résultats.

II. Pour que l'on puisse apprécier la régularité des résultats des observations des marées dans le port de Brest, je vais déterminer la loi de probabilité des erreurs dont la valeur précédente de $2i6$ est susceptible; et pour cela, je vais conclure cette valeur correspondante aux observations de chaque année. En désignant par f, f', f'', etc., les hauteurs précédentes relatives à chaque année, j'exprimerai, comme ci-dessus, la loi de ces hauteurs par la fonction $\zeta t^2 + \zeta' t + \zeta''$. En déterminant ensuite la valeur de ζ par la méthode précédente, on aura celle de $2i6$; mais, comme le nombre des syzigies employées dans chaque année, n'est qu'un huitième du nombre des syzigies employées dans les huit années, il faut, pour comparer cette valeur de $2i6$ à la précédente, la multiplier par huit. Je trouve ainsi :

	$2i6$
1807.........	9^m,15643.
1808.........	8, 98343.
1809.........	8, 43286.
1810.........	8, 56071.
1811.........	9, 62071.
1812.........	9, 46958.
1813.........	9, 06900.
1814.........	8, 26386.

Le peu de différence de ces valeurs à leur moyenne 8,9446, montre la régularité des marées dans le port de Brest. Suivant la théorie que j'ai exposée dans le second livre de ma Théorie analytique des probabilités, si l'on nomme ε la somme des quarrés des écarts de chacune de ces valeurs, de la moyenne, et n le nombre des années; la probabilité d'une erreur u' dans cette moyenne, sera proportionnelle à l'exponentielle

$$c^{-\frac{n^2 u'^2}{2\varepsilon}},$$

c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. Cette proportionnalité est d'autant plus exacte, que n est un plus grand nombre. Mais ici, ce nombre est égal à huit. Le nombre total des observations employées est beaucoup plus grand, et égal à 288 : car le nombre des syzigies employées dans chaque année, est six, et chaque syzigie a donné six observations. Ainsi l'erreur u', de ζ, étant une fonction linéaire des erreurs de chaque observation; la probabilité de cette erreur sera, par le n° 20 de l'ouvrage cité, proportionnelle à une exponentielle de la forme $c^{-ku'^2}$. On pourra déterminer k par le même numéro, au moyen des

quarrés des erreurs de chaque observation. Mais on obtiendra sa valeur d'une manière beaucoup plus simple, et suffisamment exacte, par le procédé suivant.

Nommons a, $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, etc., les valeurs de ζ relatives à chacune des huit années, et désignons par b la moyenne de ces valeurs, ou la valeur de ζ; u' étant l'erreur de cette valeur, celle de la valeur a sera $b-a+u'$: en supposant donc que l'erreur r des valeurs de a, $a^{(1)}$, etc., soit proportionnelle à l'exponentielle c^{-kr^2}; la probabilité de l'erreur $b-a+u'$ sera proportionnelle à

$$c^{-k.(b-a+u')^2}.$$

Elle sera donc égale à

$$\frac{du'.\sqrt{k}.c^{-k.(b-a+u')^2}}{\int du'.\sqrt{k}.c^{-k.(b-a+u')^2}};$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $u'=-\infty$, jusqu'à $u'=\infty$; ce qui donne $\sqrt{\pi}$ pour cette intégrale, π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité. En effet, la somme de ces probabilités relatives à toutes les valeurs possibles de u' doit être l'unité. La probabilité de l'erreur $b-a+u'$, est donc proportionnelle à

$$\sqrt{k}.c^{-k(b-a+u')^2}.$$

Pareillement, $b-a^{(1)}+u'$, est l'erreur de la valeur $a^{(1)}$, et la probabilité de cette erreur est proportionnelle à

$$\sqrt{k}.c^{-k.(b-a^{(1)}+u')^2};$$

et ainsi de suite. La probabilité des erreurs simultanées, $b-a+u'$, $b-a^{(1)}+u'$, etc., sera donc proportionnelle au produit des probabilités de ces erreurs, produit égal à

$$k^{\frac{n}{2}}.c^{-k.\left((b-a+u')^2+(b-a^{(1)}+u')^2+\text{etc.}\right)};$$

ou à

$$k^{\frac{n}{2}}.c^{-k.\left((b-a)^2+(b-a^{(1)})^2+\text{etc.}\right)-nku'^2}.$$

La probabilité de k sera proportionnelle à l'intégrale de cette fonction multipliée par du', et intégrée depuis $u'=-\infty$, jusqu'à u' infini; en désignant donc par ε, la somme des quarrés $(b-a)^2$, $(b-a^{(1)})^2$, etc., cette probabilité sera proportionnelle à

$$k^{\frac{n-1}{2}}.c^{-k\varepsilon}.$$

La valeur de k qu'il faut choisir n'est pas, comme plusieurs géomètres le pensent, celle qui rend la fonction précédente, un *maximum* : elle est, comme je l'ai fait voir dans le n° 23 de ma Théorie analytique des probabilités, la moyenne des produits de chaque valeur de k par sa probabilité ; cette valeur est donc

$$\frac{\int k^{\frac{n+1}{2}}.\,dk.c^{-k\varepsilon}}{\int k^{\frac{n-1}{2}}.\,dk.c^{-k\varepsilon}},$$

les intégrales étant prises depuis $k=0$, jusqu'à k infini. L'intégrale du numérateur est

$$-\frac{k^{\frac{n+1}{2}}.c^{-k\varepsilon}}{\varepsilon}+\frac{n+1}{2\varepsilon}.\int k^{\frac{n-1}{2}}dk.c^{-k\varepsilon},$$

3.

et elle se réduit à son second terme. La valeur de k qu'il faut choisir est donc $\frac{n+1}{2\varepsilon}$: ainsi la probabilité de u' étant, par ce qui précède, proportionnelle à $c^{-knu'^2}$, elle sera proportionnelle à

$$c^{-\frac{n.\overline{n+1}}{2\varepsilon}.u'^2},$$

et par conséquent elle sera

$$\frac{du'.\sqrt{\frac{n.\overline{n+1}}{2\varepsilon}}.c^{-\frac{n.\overline{n+1}}{2\varepsilon}.u'^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

En prenant l'intégrale du numérateur dans des limites données, on aura la probabilité que la valeur de a' sera comprise dans ces limites. Dans le cas présent, on a $n=8$, et

$$\varepsilon=1,6672.$$

La probabilité d'une erreur u' est donc proportionnelle à $c^{-21,5931.u'^2}$. Le coëfficient de $-u'^2$, ou du quarré de l'erreur, pris en moins, est ce que je nomme *poids* du résultat; parce que les mêmes erreurs devenant moins probables, lorsque ce poids augmente, le résultat pèse plus, si je puis ainsi dire, vers la vérité. Si l'on désigne par P ce coëfficient, et si l'on fait $u'.\sqrt{P}=t$, la probabilité que l'erreur u' sera comprise dans les limites $\pm\frac{T}{\sqrt{P}}$ sera égale à

$$\frac{2\int dt.c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}};$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à $t=T$. En formant

donc une table des valeurs de cette formule, correspondantes aux diverses valeurs de T; on aura la probabilité que l'erreur du résultat sera comprise dans des limites données. M. Kramp a formé une table des valeurs de l'intégrale $\int dt.c^{-t^2}$, prise depuis $t=T$ jusqu'à t infini; il est facile d'en déduire celle dont je viens de parler. Je trouve ainsi $\frac{982,3}{983,3}$, pour la probabilité que l'erreur est comprise dans les limites $\pm 0^m,5$; et $\frac{8,6}{9,6}$, pour la probabilité que cette erreur est comprise dans les limites $\pm 0^m,25$.

On déterminera facilement la probabilité des erreurs dont la valeur précédente de $2i\alpha$ est susceptible, en observant que cette valeur est très-peu différente de la somme des hauteurs des marées f, f', etc., divisée par six, et à laquelle on ajoute le sixième du produit de $2i6$, par la somme des quarrés des fractions $-\frac{5}{2}$; $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$, $+\frac{3}{2}$, $+\frac{5}{2}$; car le maximum des marées, tombant à-peu-près au milieu de l'intervalle qui sépare les marées extrêmes, il est clair qu'en ajoutant à chacune des valeurs de f, f', etc., le produit de $2i6$ par le quarré de la fraction qui lui correspond, on aura six valeurs de $2i\alpha$; le sixième de la somme de ces six valeurs sera donc la valeur moyenne de $2i\alpha$. Cette valeur moyenne est ainsi le sixième de la somme des valeurs de f, f', etc., plus le produit de $2i6$ par $\frac{35}{12}$. De-là il est aisé de conclure que l'on aura la valeur très-approchée de $2i\alpha$, relative à chaque année, en multipliant par $1+\frac{1}{3}$, la somme des six hauteurs des marées qui lui sont relatives, et en ajoutant à

cette somme, le produit de $\frac{35}{12}$ par la valeur précédente de $2i6$, qui correspond à cette année. On trouve, de cette manière,

	$2i\alpha$
1807.........	411ᵐ,406.
1808.........	410, 763.
1809.........	410, 323.
1810.........	410, 692.
1811.........	412, 493.
1812.........	414, 003.
1813.........	412, 383.
1814.........	407, 607.

La moyenne de ces valeurs est 411ᵐ,209. La valeur de 2ι est ici 50,1954; ce qui donne le poids P égal à 1,4344; en sorte que les erreurs également probables des valeurs de $2i6$ et de $2i\alpha$, sont dans le rapport de 1 à 3,88.

III. J'ai considéré de la même manière les syzigies solsticiales suivantes :

1807.	6 juin;	20 juin;	5 juillet;	15 décembre;	29 décembre.	
1808.	13 janvier;	8 juin;	24 juin;	7 juillet;	3 décembre;	17 décembre.
1809.	1 »	12 »	27 »	11 »	7 »	21
1810.	5 »	2 »	17 »	1 »	10 »	26
1811.	9 »	6 »	20 »	6 »	15 »	29
1812.	14 »	9 »	24 »	8 »	4 »	18
1813.	2 »	14 »	28 »	13 »	7 »	22
1814.	6 »	3 »	17 »	2 »	11 »	26
1815.	10 janvier.					

J'ai fait, comme ci-dessus, les sommes des excès des hautes marées du soir, sur les basses marées du matin, du jour qui

précède la syzigie, du jour même de la syzigie, et des quatre jours qui la suivent, en doublant les résultats relatifs à la syzigie intermédiaire dans chaque solstice. J'ai obtenu ainsi les résultats suivants :

1807.....	41m,030;	43m,040;	44m,745;	45m,550;	43m,830;	41m,843.
1808.....	41, 365;	44, 260;	46, 075;	45, 920;	44, 877;	42, 405.
1809.....	39, 762;	43, 180;	45, 620;	46, 020;	44, 875;	41, 820.
1810.....	41, 957;	45, 247;	46, 574;	46, 676;	44, 969;	40, 998.
1811.....	40, 695;	44, 163;	45, 559;	46, 111;	45, 140;	43, 282.
1812.....	42, 059;	44, 690;	45, 927;	45, 642:	43, 725;	40, 910.
1813.....	41, 736;	44, 164;	45, 822;	44, 860;	43, 357;	39, 771.
1814.....	40, 068;	43, 937;	45, 782;	45, 276;	43, 964;	41, 124.

L'ensemble de ces hauteurs donne, en mètres,

$$f = 328{,}672;\quad f' = 352{,}681;\quad f'' = 366{,}104;$$
$$f''' = 366{,}055;\quad f^{\text{iv}} = 354{,}737;\quad f^{\text{v}} = 332{,}153.$$

On trouve ainsi

$$\zeta = -5{,}92730;\quad \zeta' = 30{,}3086;\quad \zeta'' = 328{,}630;$$

et l'expression générale $\zeta t^2 + \zeta' t + \zeta''$ des valeurs de f, f', etc., devient

$$367{,}375 - 5{,}92730.(t - 2{,}556705)^2;$$

ce qui donne

$$2i\beta = 5{,}92730;$$
$$2i\alpha = 367{,}468.$$

On a, comme dans le numéro précédent,

$$\frac{\zeta'}{2\zeta} = -\frac{9}{8} + k - u;$$

ce qui donne

$$u = 1,4317 + k.$$

Dans les syzigies des solstices, le retard journalier des marées est $0^{j},028076$; en sorte que l'intervalle pris pour unité, est ici $1^{j},028076$. On a ainsi, en parties du jour,

$$1,4317 = 1,47193.$$

Dans les syzigies précédentes, on a $k = 0^{j},14166$; ce qui donne

$$u = 1^{j},6136.$$

Cette valeur de u surpasse un peu celle du numéro précédent, donnée par les syzigies équinoxiales.

La différence des valeurs de ζ indique, avec une extrême probabilité, l'influence des déclinaisons des astres sur cette valeur. Pour le faire voir, déterminons la probabilité des erreurs de ζ. Les valeurs de ζ, multipliées par huit, sont pour chacune des huit années,

	$2i\beta$
1807.........	$4^{m},81214$.
1808.........	5, 46672.
1809.........	6, 67071.
1810.........	6, 92014.
1811.........	5, 15686.
1812.........	5, 69228.
1813.........	6, 10200.
1814.........	6, 59614.

Le peu de différence de ces valeurs à la moyenne 5,927 est une nouvelle preuve de la régularité des marées dans le port de Brest. La somme des quarrés des différences de chacune de ces valeurs à la moyenne, est ici 4,1206. On trouve

ainsi, par les formules du numéro précédent, la probabilité que l'erreur de la valeur moyenne est u', proportionnelle à

$$c^{-8,7366.u'^2},$$

ou le poids P de la valeur moyenne 5,927, égal à 8,7366; d'où l'on conclut la probabilité que l'erreur est comprise dans les limites $\pm 1^m$, égale à

$$\frac{34524}{34525}.$$

La probabilité qu'elle est comprise dans les limites $\pm\frac{1^m}{2}$, est égale à

$$\frac{26,32}{27,32}.$$

Si l'on forme, d'après la méthode du numéro précédent, les valeurs de $2i\alpha$, d'année en année, on aura

	$2i\alpha$
1807.........	360,^{m}752.
1808.........	369, 147.
1809.........	367, 825.
1810.........	375, 411.
1811.........	368, 308.
1812.........	367, 207.
1813.........	364, 078.
1814.........	366, 106.

La moyenne de ces valeurs est 367,354. La valeur de 2ι est ici 230,322; ce qui donne le poids P égal à 0,31275 : ainsi les erreurs également probables dans les valeurs de $2i6$ et de $2i\alpha$, sont ici dans le rapport de 1 à 5,2854.

Dans les syzigies équinoxiales, la valeur moyenne de $2i6$

est, par ce qui précède, égale à 8,9446. Elle surpasse la précédente, de 3,073. Il est donc extrêmement probable que cette différence n'est point l'effet du hasard. Pour avoir cette probabilité, nous observerons que la probabilité d'une erreur u' dans la valeur de $2i6$ relative aux équinoxes, est proportionnelle à $c^{-21,5931.u'^2}$, et que la probabilité d'une erreur u'' dans cette valeur relative aux solstices, est $c^{-8,7366.u''^2}$: la probabilité des erreurs simultanées u' et u'' est donc proportionnelle à l'exponentielle $c^{-Pu'^2-P'u''^2}$, en faisant

$$P=21,5931; \quad P'=8,7366.$$

Si l'on fait $u''=u'-t$, l'exponentielle précédente prendra cette forme

$$c^{-(P+P').\left(u'-\frac{P't}{P+P'}\right)^2-\frac{PP'.t^2}{P+P'}}.$$

On aura une quantité proportionnelle à la probabilité de t, en multipliant cette exponentielle par du' et prenant l'intégrale depuis $u'=-\infty$, jusqu'à $u'=\infty$. Cette probabilité est donc proportionnelle à

$$c^{-\frac{PP'}{P+P'}.t^2}.$$

Le poids de la différence 3,0173, des valeurs moyennes de $2i6$ est donc $\frac{PP'}{P+P'}$, qui devient ici 6,22285. On trouve ainsi la probabilité que l'erreur t est hors des limites $\pm 3,0173$, égale à une fraction dont le numérateur est l'unité, et dont le dénominateur surpasse 4 suivi de vingt-

cinq zéros. On ne peut donc pas douter que la différence observée entre les valeurs de $2i\beta$, relatives aux solstices et aux équinoxes, ne soit l'effet d'une cause spéciale qui diminue cette valeur dans les solstices.

La même cause est indiquée avec une probabilité plus grande encore par la différence des valeurs de $2i\alpha$, relatives aux équinoxes et aux solstices, différence égale à $43^m,855$. Le poids de cette différence, par ce qui précède, est $\frac{PP'}{P+P'}$: il devient, en substituant les valeurs de P et de P' relatives aux valeurs de $2i\alpha$, 0,25675; d'où il suit que les erreurs également probables des différences relatives aux valeurs de $2i\beta$, et de $2i\alpha$, sont entre elles comme 1 à 4,9231. La différence observée $3^m,0173$ des valeurs de $2i\beta$ répond ainsi à 15 mètres environ de différence entre les valeurs de $2i\alpha$, différence beaucoup moindre que la différence 43,855. La cause dont il s'agit est donc à-la-fois indiquée par les hauteurs des marées dans les équinoxes et dans les solstices, et par les lois de leur variation, avec une extrême probabilité qui ne laisse aucun doute. On peut observer ici, que le poids précédent de la différence 43,855, des valeurs moyennes de $2i\alpha$, relatives aux syzigies des équinoxes et des solstices, est aussi le poids de leur somme, $778^m,563$, comme il est facile de le voir. On aura d'une manière plus approchée le poids de la différence $43^m,855$, en formant, pour chaque année, la différence des valeurs correspondantes de $2i\alpha$, relatives aux équinoxes et aux solstices. Voici le tableau de cette différence:

1807..........	$50^m,654$.
1808..........	41, 616.
1809..........	42, 498.

1810..........	35, 281.
1811..........	44, 185.
1812..........	46, 796.
1813..........	48, 305.
1814..........	41, 501.

La moyenne de ces valeurs est $43^{m},855$. En formant la somme des quarrés des différences de cette moyenne à chacune de ces valeurs, on aura

$$2\epsilon = 361,390;$$

ce qui donne le poids P de cette moyenne, égal à 0,22403. Il est un peu moindre que celui que nous venons de trouver; ce qui tient à ce que le nombre d'années, que nous avons considéré, n'est pas fort grand. En adoptant ce poids, on trouve que la probabilité d'une erreur égale à $+3^{m},9054$, est inférieure à $\frac{1}{223,6}$.

IV. J'ai considéré d'une manière à-peu-près semblable les quadratures équinoxiales suivantes:

1807.	1 mars;	17 mars;	30 mars;	8 septembre;	24 septembre;	8 octobre.
1808.	5 »	19 »	4 avril;	13 »	26 »	12 »
1809.	8 »	24 »	7 »	1 »	16 »	1 »
1810.	13 »	28 »	11 »	6 »	20 »	5 »
1811.	2 »	17 »	31 mars;	9 »	25 »	9 »
1812.	6 »	19 »	4 avril;	13 »	27 »	13 »
1813.	9 »	25 »	7 »	2 »	17 »	2 »
1814.	14 »	28 »	12 »	7 »	21 »	6 »

J'ai pris l'excès de la haute mer du matin, sur la basse mer du soir, relatif au jour même de la quadrature, et aux trois jours qui la suivent. Je n'ai pas considéré six jours,

comme je l'ai fait relativement aux syzigies; parce que la variation des marées quadratures étant plus rapide que celle des marées syzigies, la loi de variation, proportionnelle au quarré du temps, ne pourrait pas sans erreur sensible comprendre un intervalle de six jours. J'ai fait, pour chaque année, une somme des excès relatifs à chacun des quatre jours, en doublant les résultats relatifs à la quadrature intermédiaire des quadratures considérées dans chaque équinoxe. J'ai obtenu ainsi les résultats suivants :

1807.....	25m,130;	20m,100;	20m,180;	26m,106.
1808.....	26, 770;	20, 950;	20, 935;	26, 304.
1809.....	26, 130;	21, 400;	21, 130;	25, 280.
1810.....	24, 432;	20, 584;	21, 715;	26, 858.
1811.....	26, 055;	21, 440;	21, 130;	26, 185.
1812.....	26, 896;	21, 500;	20, 625;	26, 117.
1813.....	25, 437;	20, 341;	20, 682;	25, 917.
1814.....	23, 808;	19, 707;	19, 930;	25, 944.

Si l'on nomme f, f', f'', f''', les sommes des hauteurs relatives à chacun des quatre jours, et que l'on représente la loi de ces sommes par

$$\zeta t^2 + \zeta' t + \zeta'';$$

t étant le temps écoulé depuis la haute marée du matin du jour de la quadrature, l'intervalle de deux marées quadratures du matin étant pris pour unité; on aura les quatre équations de condition suivantes :

$$\zeta'' = f;$$
$$\zeta + \zeta' + \zeta'' = f';$$
$$4\zeta + 2\zeta' + \zeta'' = f'';$$
$$9\zeta + 3\zeta' + \zeta'' = f'''.$$

Si l'on multiplie chacune de ces équations, respectivement par leurs coëfficients de ζ, et que l'on fasse une somme de leurs produits; si l'on fait les sommes semblables, relativement aux coëfficients de ζ' et de ζ''; ces trois sommes formeront les équations suivantes

$$98.\zeta + 36.\zeta' + 14.\zeta'' = f' + 4f'' + 9f''';$$
$$36.\zeta + 14.\zeta' + 6.\zeta'' = f' + 2f'' + 3f''';$$
$$14.\zeta + 6.\zeta' + 4.\zeta'' = f + f' + f'' + f'''.$$

Ces équations donnent

$$\zeta = \frac{f - f' - f'' + f'''}{4},$$

$$\zeta' = \frac{-\frac{21}{2}.(f - f' - f'' + f''') + 2(f''' - f'') + 4(f''' - f')}{10},$$

$$\zeta'' = \frac{f + f' + f'' + f'''}{4} - \frac{3}{2}.\zeta' - \frac{7}{2}.\zeta.$$

Maintenant on a

$f = 204^m,658$; $f' = 166^m,022$; $f'' = 166^m,327$; $f''' = 207^m,711$;

ce qui donne

$$\zeta = 20^m,005; \quad \zeta' = -59^m,0686; \quad \zeta'' = 204^m,7649.$$

L'expression $\zeta t^2 + \zeta' t + \zeta''$, devient ainsi

$$161^m,162 + 20^m,005.(t - 1,47635)^2. \quad (a)$$

Nommons t' la distance d'une haute marée du matin, à l'instant de la quadrature, et représentons par $\alpha + \mathit{6}.t'^2$, cette haute marée. La basse mer qui la suit sera

$$-\alpha - \mathit{6}.\left(t' + \frac{1}{2}\right)^2.$$

l'excès de la haute sur la basse mer sera donc

$$2\alpha + \frac{2\beta}{64} + 2\beta.\left(t' + \frac{1}{8}\right)^2. \quad (a')$$

Nommons k' la valeur moyenne des quantités dont les quadratures ont suivi les hautes marées du matin; et désignons, comme ci-dessus, par u la quantité dont le *maximum* et le *minimum* des marées suivent respectivement la syzigie et la quadrature; on aura

$$t' = t - k' - u.$$

La formule (a') devient, en la multipliant par le nombre i de quadratures considérées,

$$2i\alpha + \frac{2i\beta}{64} + 2i\beta.\left(t - k' - u + \frac{1}{8}\right)^2.$$

Cette formule sera l'expression des valeurs de f, f', etc. En la comparant à la formule (a), on aura

$$k' + u - \frac{1}{8} = 1,47635;$$

ce qui donne

$$u = 1,60135 - k'.$$

L'intervalle pris pour unité, est ici $1^j,056223$. En multipliant donc 1,60135 par cet intervalle, on aura $1^j,6914$. D'ailleurs, la valeur de k' relative aux quadratures précédentes est $0^j,1937$. On aura donc ainsi

$$u = 1^j,4977;$$

ce qui diffère peu de la valeur $1^j,5378$, donnée par l'ensemble des syzigies. On a ensuite

$$2i\beta = 20^m,005;$$
$$2i\alpha = 160^m,850.$$

Déterminons présentement la probabilité de la valeur de ζ ou de $2i6$: ces valeurs, relatives à chacune des huit années, et multipliées par huit, sont

	$2i6$
1807..........	$21^m,912$;
1808..........	22, 378;
1809..........	17, 760;
1810..........	17, 982;
1811..........	19, 340;
1812..........	19, 776;
1813..........	20, 662;
1814..........	20, 230.

La somme des quarrés des différences de ces valeurs à la moyenne 20.005, est 19.3770; il est facile d'en conclure que le poids P de cette moyenne est 1,85787. le mètre étant pris pour unité d'erreur. On trouve ainsi la probabilité que l'erreur de cette valeur moyenne est comprise dans les limites $\pm 1^m$ égale à $\frac{17,55}{18,55}$: la probabilité que cette erreur est comprise dans les limites $\pm 2^m$, est $\frac{8382}{8383}$.

On aura à-très-peu-près la valeur de $2i\alpha$, en diminuant les valeurs de f, f', f'', f''', respectivement du produit de 20,005, par les quarrés des fractions $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$; ce qui donne $2i\alpha$ égal au quart de la somme de ces quatre valeurs, diminuée du produit de 20,005 par $\frac{5}{4}$, ou à $161^m,173$. De-là il est aisé de conclure que l'on aura la valeur fort approchée de $2i\alpha$ relative à chaque année, en faisant une somme des quatre valeurs de f, f', f'', f''', correspondantes à l'année, en doublant cette somme, et en lui ajoutant $\frac{5}{4}$ de la

valeur de $2i\beta$, relative à la même année. On formera ainsi le tableau suivant :

	$2i\alpha$
1807.........	155^{m},642.
1808.........	161, 946.
1809.........	165, 680.
1810.........	164, 700.
1811.........	165, 445.
1812.........	163, 546.
1813.........	158, 925.
1814.........	153, 490.

On trouve ici

$$2\varepsilon = 303{,}812:$$

le poids P de l'erreur de la valeur moyenne 161,173, est donc 0,23699 ; d'où il suit que les erreurs également probables des valeurs moyennes de $2i\beta$, et de $2i\alpha$, sont dans le rapport de 1 à 2,80.

V. J'ai considéré les quadratures solsticiales suivantes :

1807.	13 juin ;	28 juin ;	12 juillet ;	6 décemb. ;	22 décemb. ;		
1808.	5 janv. ;	2 »	15 juin.	1 juillet ;	10 »	24 »	
1809.	9 »	5 »	20 »	4 »	13 »	29 »	
1810.	12 »	10 »	23 »	9 »	3 »	19 »	
1811.	1 »	13 »	29 »	12 »	6 »	22 »	
1812.	6 »	2 »	16 »	1 »	11 »	25 »	
1813.	9 »	5 »	21 »	5 »	1 »	14 »	30 décemb.
1814.	11 juin ;	24 »	10 juillet ;	4 décemb. ;	19 décemb.		
1815.	2 janv.						

J'ai pris, comme dans les quadratures précédentes, l'excès de la haute mer du matin sur la basse mer du soir, relati-

vement au jour même de la syzigie, et aux trois jours qui la suivent. J'ai fait, pour chaque année, une somme des excès relatifs à chacun de ces jours, en doublant les résultats relatifs à la quadrature intermédiaire entre les quadratures considérées dans chaque solstice. J'ai obtenu ainsi les résultats suivants :

1807.....	28^m,720;	26^m,495;	25^m,310;	27^m,135.
1808.....	28, 830;	25, 780;	25, 345;	27, 215.
1809.....	28, 985;	26, 872;	25, 154;	26, 798.
1810.....	29, 817;	26, 217;	26, 655;	28, 261.
1811.....	29, 319;	26, 458;	25, 999;	28, 008.
1012.....	28, 108;	25, 818;	25, 820;	27, 711.
1813.....	26, 585;	24, 909;	26, 235;	28, 685.
1814.....	27, 196;	24, 431;	25, 446;	28, 383.

L'ensemble de ces hauteurs donne, en mètres,

$$f=227^m,560;\ f'=206^m,980;\ f''=205^m,964;\ f'''=222^m,196.$$

D'où l'on tire

$$\zeta=9^m,203;\ \zeta'=-29^m,3198;\ \zeta''=227^m,4592.$$

L'expression $\zeta t^2+\zeta' t+\zeta''$ devient ainsi

$$204^m,0917+9^m,203.(t-1,5929)^2;$$

ce qui donne

$$2i6=9^m,203;$$
$$2i\alpha=203^m,948.$$

On aura ensuite, comme dans le numéro précédent,

$$k'+u=1,5976+\tfrac{1}{8}.$$

L'intervalle pris pour unité est ici $1^j,04796$; et la valeur de

k' relative à ces marées quadratures, est $0^j,20972$; d'où l'on tire, pour la quantité u dont le *minimum* de la marée suit les quadratures solsticiales,

$$u = 1^j,5907.$$

Les marées quadratures équinoxiales ont donné pour u, $1^j,4977$. Les marées syzigies équinoxiales ont donné $1^j,4810$; les marées syzigies solsticiales ont donné $1^j,6136$. La moyenne de ces valeurs est

$$u = 1^j,5458.$$

L'ensemble des syzigies anciennes m'a donné, dans le quatrième livre de la Mécanique céleste,

$$u = 1^j,56445;$$

la différence est insensible.

Déterminons la probabilité de la valeur de ζ ou de $2i\varepsilon$. Ces valeurs relatives à chacune des huit années, et multipliées par huit, sont

	$2i\varepsilon$
1807..........	$8^m,100$.
1808..........	9, 840.
1809..........	7, 514.
1810..........	10, 412.
1811..........	9, 740.
1812..........	8, 362.
1313..........	8, 252.
1814..........	11, 404.

La somme des quarrés des différences de ces valeurs, à la moyenne 9,203, est 12,6813. On trouve ainsi le poids P de la valeur moyenne, égal à 2,83882; d'où il est aisé de con-

clure la probabilité que l'erreur de cette valeur est comprise dans les limites $\pm 1^{m}$, égale à $\frac{57,23}{58,23}$. La probabilité que cette erreur est comprise dans les limites $\pm 1^{m},5$, est $\frac{2839}{2840}$.

On aura, à-très-peu-près, les valeurs de $2i\alpha$ par la méthode du numéro précédent. J'ai formé ainsi le tableau suivant :

	$2i\alpha$
1807.........	205^m,195.
1808,........	202, 040.
1809.........	206, 226.
1810.........	208, 885.
1811.........	207, 393.
1812.........	204, 461.
1813.........	202, 513.
1814.........	196, 657.

La valeur moyenne est 204,171 : on a ici $2\varepsilon = 223,406$; d'où l'on conclut le poids P de l'erreur moyenne, égal à 0,32228. Ainsi les erreurs également probables des valeurs de $2i\mathit{6}$, et de $2i\alpha$, sont entre elles comme 1 à 2,9679.

La différence moyenne des valeurs de $2i\alpha$, relative aux quadratures des solstices et des équinoxes, est $42^{m},998$. On trouvera, par ce qui précède, le poids P de cette différence, égal à 0,13656. C'est aussi le poids de la somme 365,345 de ces valeurs. De-là il suit que la probabilité d'une erreur négative, égale ou supérieure à + 2,5983, est

$$\frac{1}{11,4564}.$$

Maintenant, si l'on compare ces valeurs de $2i\alpha$, leur différence montre avec évidence l'influence des déclinaisons des

astres sur ces marées. Cette influence est pareillement indiquée avec une extrême probabilité, par les valeurs de $2i\beta$. Celle qui est relative aux marées quadratures équinoxiales s'élève à $20^{m},005$; tandis que la valeur relative aux marées quadratures solsticiales n'est que de $9^{m},203$. D'après la probabilité des erreurs de ces valeurs, déterminée ci-dessus, on voit qu'une erreur de neuf mètres dans chacune d'elles est invraisemblable, et qu'il est par conséquent impossible de les faire coïncider.

Les valeurs de $2i\alpha$ et de $2i\beta$, relatives aux marées syzigies et quadratures dans les équinoxes et dans les solstices, sont les résultats des observations, les plus propres à vérifier la théorie de ces phénomènes, fondée sur la loi de la pesanteur universelle. Mais, avant que de les comparer à cette théorie, je vais les comparer avec les résultats semblables que j'ai déduits, dans le quatrième livre de la Mécanique céleste, des observations faites à Brest un siècle auparavant.

VII. Les résultats de ces observations anciennes sont relatifs à vingt-quatre syzigies et à vingt-quatre quadratures, tandis que ceux des observations modernes se rapportent à soixante-quatre syzigies et à soixante-quatre quadratures. Il faut donc, pour comparer aux résultats anciens les résultats modernes, diminuer ceux-ci dans le rapport de 3 à 8. On aura ainsi :

OBSERVATIONS MODERNES.	OBSERVATIONS ANCIENNES.
Syzigies équinoxiales.	
$48.\alpha = 154^{m},260$	$150^{m},235$.
$48.\beta = 3^{m},3542$	$3^{m},1623$.

OBSERVATIONS MODERNES.	OBSERVATIONS ANCIENNES.
Syzigies solsticiales.	
48.α=137^m,766	132^m,371.
48.β= 2,^{m}2227	1^m,9451.
Quadratures équinoxiales.	
48.α=60^m,319	58^m,033.
48.β= 7^m,5019	7^m,495.
Quadratures solsticiales.	
48.α=76^m,480	75^m,517.
48.β= 3^m,4511	3^m,4100.

On voit, par l'inspection de ce tableau, que les résultats des observations modernes s'accordent avec ceux des observations anciennes, aussi bien qu'on peut le desirer ; vu sur-tout la petite différence que doivent y produire les déclinaisons de la lune, plus grandes aux époques des anciennes observations, qu'aux époques des observations modernes. On voit encore que les valeurs de $2i\alpha$ indiqueraient des marées plus fortes maintenant qu'au commencement du dernier siècle, d'environ un trente-quatrième; si l'on était bien certain de l'exactitude de la graduation de l'échelle qui a servi aux observations anciennes.

VIII. Comparons maintenant les résultats des observations, avec ceux de la théorie de la pesanteur universelle. J'ai donné, dans le quatrième livre de la Mécanique céleste, les formules nécessaires à cette comparaison; mais je vais ici reprendre cet objet par une nouvelle analyse. Ma théorie des marées, exposée dans le livre cité, repose sur ce principe, savoir, que l'état d'un système de corps, dans lequel

les conditions primitives du mouvement ont disparu par les résistances qu'il éprouve, est périodique comme les forces qui l'animent. Ce principe, combiné avec celui de la coëxistence des oscillations très-petites, explique d'une manière singulièrement heureuse, tous les phénomènes des marées, indépendants des circonstances locales. Les forces productrices de ces phénomènes, relatives à l'action d'un astre L, sont, comme on le voit dans le n° 16 du liv. IV de la Mécanique céleste, exprimées par les différences partielles de la fonction

$$\frac{3L}{2r^3}\cdot\left(sin.v.cos.\theta + cos.v.sin.\theta.cos.(nt+\varpi-\psi)\right)^2; \quad (a)$$

en désignant par L la masse de l'astre; par r sa distance au centre de la terre; par v sa déclinaison; par ψ son ascension droite comptée de l'intersection de son orbite avec l'équateur, et par φ sa distance angulaire à cette intersection: $nt+\varpi$ est l'angle horaire de cette intersection, et θ est la latitude du port. Soit ε l'inclinaison de l'orbite à l'équateur, on aura, par les formules de la trigonométrie sphérique,

$$sin.v = sin.\varepsilon.sin.\varphi;$$

$$cos.v.sin.\psi = cos.\varepsilon.sin.\varphi;$$

$$cos.v.cos.\psi = cos.\varphi;$$

$$cos.^2v = \frac{1}{2}\cdot(1+cos.^2\varepsilon)+\frac{1}{2}\cdot sin.^2\varepsilon.cos.2\varphi;$$

$$cos.^2v.sin.2\psi = cos.\varepsilon.sin.2\varphi;$$

$$cos.^2v.cos.2\psi = \frac{1}{2}\cdot sin.^2\varepsilon+\frac{1}{2}\cdot(1+cos.^2\varepsilon).cos.2\varphi.$$

La formule (a) devient ainsi:

$$\frac{3L}{2r^3}\cdot\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}\cdot\cos.^2\theta.\sin.^2\varepsilon+\frac{1}{4}\cdot\sin.^2\theta.(1+\cos.^2\varepsilon)\\ -\frac{1}{2}\cdot\sin.^2.\varepsilon.(\cos.^2\theta-\frac{1}{2}\cdot\sin.^2\theta).\cos.2\varphi\end{matrix}\right\},$$

$$+\frac{3L}{2r^3}\cdot\sin.\theta.\cos.\theta.\left\{\begin{matrix}\sin.\varepsilon.\cos.\varepsilon.\sin.(nt+\omega)\\ -\sin.\varepsilon.\left(\frac{1+\cos.\varepsilon}{2}\right)\cdot\sin.(nt+\omega-2\varphi)\\ +\sin.\varepsilon.\left(\frac{1-\cos.\varepsilon}{2}\right)\cdot\sin.(nt+\omega+2\varphi)\end{matrix}\right\},$$

$$+\frac{3L}{4r^3}\cdot\sin.^2\theta\cdot\left\{\begin{matrix}\cos.^4.\frac{1}{2}\varepsilon.\cos.(2nt+2\omega-2\varphi)+\sin.^4.\frac{1}{2}\varepsilon.\cos.(2nt+\omega+2\varphi)\\ +\frac{1}{2}\cdot\sin.^2\varepsilon.\cos.(2nt+2\omega)\end{matrix}\right\}.$$

Si, comme nous l'avons fait, on ne considère dans les observations des marées, que l'excès d'une haute mer, sur l'une des deux basses mers voisines; si, de plus, on prend ces excès en nombre égal dans les syzigies et dans les quadratures des équinoxes du printemps et d'automne, et des solstices d'hyver et d'été; enfin, si, comme nous l'avons fait encore, pour détruire l'effet des variations de la parallaxe lunaire, on considère les trois syzigies ou les trois quadratures les plus voisines de l'équinoxe ou du solstice, en doublant les observations relatives à la syzigie intermédiaire; les résultats de l'observation ne dépendront que des inégalités relatives aux angles $2nt+2\omega$, $2nt+2\omega-2\varphi$, $2nt+2\omega+2\varphi$; inégalités dont la période est d'environ un demi-jour, et dont les deux premières sont, dans nos ports, beaucoup plus grandes que toutes les autres inégalités des marées. $\sin.^4\frac{1}{2}\varepsilon$ est un coëfficient toujours très-petit dans les observations que nous avons considérées, et au milieu desquelles l'inclinaison de

l'orbe lunaire à l'équateur, est parvenue à son *minimum*. On peut donc négliger le terme que ce coëfficient multiplie; et alors les flux partiels dont les périodes sont d'environ un demi-jour, dépendent des termes

$$\frac{3L}{4r^3} \cdot sin.^2 \theta . cos.^4 \tfrac{1}{2} \varepsilon . cos. (2nt + 2\omega - 2\varphi)$$

$$+ \frac{3L}{4r^3} \cdot sin.^2 \theta . \tfrac{1}{2} . sin.^2 \varepsilon . cos. (2nt + 2\omega).$$

Ces termes produisent, comme on l'a vu dans le n° 7 du liv. IV de la Mécanique céleste, deux flux partiels que l'on peut représenter par

$$A . \frac{L}{r^3} cos.^4 \tfrac{1}{2} \varepsilon . cos. (2nt - 2mt - 2\lambda) + B . \frac{L}{r^3} . \tfrac{1}{2} . sin.^2 \varepsilon . cos. (2nt - 2\gamma).$$

mt étant le moyen mouvement de l'astre L dans son orbite, A, B, λ et γ sont des constantes dépendantes des circonstances locales du port.

Ces deux flux sont les mêmes que ceux qui seraient produits par deux astres mus dans le plan de l'équateur, à la distance r de l'astre L, et dont le premier, représenté par $L . cos.^4 \frac{1}{2} \varepsilon$, aurait le même moyen mouvement que l'astre L dans son orbite, et passerait en même temps que lui, par l'intersection de cette orbite avec le plan de l'équateur. Le second astre représenté par $\frac{1}{2} \cdot L . sin.^2 \varepsilon$, correspondrait constamment au point de cette intersection. Le *maximum* des hautes marées de l'astre L, a lieu vers la conjonction ou l'opposition des deux astres fictifs, lorsque la haute mer du premier coïncide avec celle du second. Le *minimum* des hautes marées a lieu vers les quadratures de ces astres fictifs, lorsque

la haute mer du premier coïncide avec la basse mer du second. Ce *maximum* et ce *minimum* donneront donc le rapport de leurs actions, et par conséquent la fraction $\frac{A}{B}$. Si cette fraction surpasse l'unité, l'action de l'astre L est augmentée par les circonstances locales, et par le mouvement mt de l'astre dans son orbite; ce dont j'ai fait voir la possibilité dans le n° 18 du livre IV de la Mécanique céleste. $\cos.^4\frac{1}{2}\varepsilon$ est égal à $\cos.\varepsilon + \sin.^4.\frac{1}{2}\varepsilon$. Sans l'accroissement dû au mouvement de l'astre fictif $L.\cos.^4\frac{1}{2}\varepsilon$, la hauteur de la mer qu'il produit serait, en négligeant $\sin.^4\frac{1}{2}\varepsilon$,

$$B.\cos.\varepsilon.\frac{L}{r^3}.\cos.(2nt - 2mt - 2\lambda).$$

L'accroissement en hauteur de la mer, dû au mouvement de l'astre L, est donc

$$(A - B).\cos.\varepsilon.\frac{L}{r^3}.\cos.(2nt - 2mt - 2\lambda);$$

ce qui est conforme au n° 20 du liv. IV de la Mécanique céleste, en observant que B est ce que nous avons nommé $2P$ dans le numéro cité; et que $(A - B).\cos.\varepsilon$, est ce que nous avons désigné par $-4mPQ.\cos.\varepsilon$.

Supposons maintenant que les quantités L, r, m, A, ε, λ, et γ, se rapportent au soleil; et marquons d'un trait les mêmes quantités relatives à la lune. On aura, par l'action réunie de ces deux astres, et en n'ayant égard qu'aux inégalités dont la période est d'environ un demi-jour, la hauteur de la mer au-dessus de son niveau, due à l'action du soleil et de la lune, égale à

$$A.\frac{L}{r^3}.\cos.^4\tfrac{1}{2}\varepsilon.\cos.(2nt-2mt-2\lambda)$$
$$+\tfrac{1}{2}.B.\frac{L}{r^3}.\sin.^2\varepsilon.\cos.(2nt-2\gamma)$$
$$+A'.\frac{L'}{r'^3}.\cos.^4\tfrac{1}{2}\varepsilon'.\cos.(2nt-2m't-2\lambda')$$
$$+\tfrac{1}{2}.B.\frac{L'}{r'^3}\cdots\sin.^2\varepsilon'.\cos.(2nt-2\gamma');$$

la constante B devant être la même pour le soleil et pour la lune, parce que les cosinus des angles $2nt-2\gamma$, et $2nt-2\gamma'$, varient à-très-peu-près de la même manière, vu la lenteur du mouvement des nœuds de l'orbe lunaire. La différence des quantités γ et λ serait nulle, si m était nul; nous la supposerons donc proportionnelle à m, et égale à $m6$, en sorte que l'on ait $\lambda=\gamma-m6$. On aura pareillement $\lambda'=\gamma-m'6$. γ' serait égale à γ, si l'intersection de l'orbe lunaire avec l'équateur coïncidait avec l'équinoxe du printemps. En comptant les angles nt, mt et $m't$, de cet équinoxe, et désignant par δ l'ascension droite de l'intersection de l'orbe lunaire avec l'équateur, on aura $\gamma'=\gamma+\delta$.

Cela posé, lorsque la marée syzigie est parvenue à sa plus grande hauteur, les cosinus des deux angles $2nt-2mt-2\lambda$, $2nt-2m't-2\lambda'$, sont très-peu différents de l'unité. En supposant donc la demi-circonférence dont le rayon est l'unité, égale à π, et

$$nt-mt-\lambda=i\pi+q;$$
$$nt-m't-\lambda'=i'\pi+q';$$

i et i' étant des nombres entiers; q et q' seront de petites quantités, et l'on aura, à-fort-peu-près,

$$\cos.(2nt-2mt-2\lambda)=1-2q^2;$$
$$\cos.(2nt-2m't-2\lambda')=1-2q'^2.$$

6.

On aura ensuite

$$t=\frac{i\pi+q+\lambda}{n-m}=\frac{i'\pi+q'+\lambda'}{n-m'};$$

d'où, en substituant pour λ', sa valeur $\lambda-(m'-m).\beta$, et faisant

$$\beta'=(m'-m).\beta-\frac{\lambda.(m'-m)}{n-m}-\frac{i\pi.(m'-m)}{n-m}-(i'-i).\pi,$$

on tire

$$q'=\left(\frac{n-m'}{n-m}\right).q+\beta'.$$

L'expression précédente de la hauteur de la mer devient ainsi, en substituant pour t sa valeur précédente, et pour γ, $\lambda+m\beta$,

$$A.\frac{L}{r^3}.\cos.^4\tfrac{1}{2}\varepsilon.(1-2q^2)+A'.\frac{L'}{r'^3}.\cos.^4\tfrac{1}{1}\varepsilon'.(1-2q'^2)$$

$$+\frac{1}{2}B.\frac{L}{r^3}.\sin.^2\varepsilon.\cos.\left(\frac{2m(i\pi+\lambda)}{n-m}-2m\beta+\frac{2nq}{n-m}\right)$$

$$+\frac{1}{2}B.\frac{L'}{r'^3}.\sin.^2\varepsilon'.\cos.\left(\frac{2m.(i\pi+\lambda)}{n-m}-m\beta-2\delta+\frac{2nq}{n-m}\right).$$

La condition de la haute mer exige que la différentielle de cette fonction soit nulle : en la différenciant donc, et observant que l'on a

$$dq=(n-m).dt;$$

$$dq'=(n-m').dt;$$

on aura

$$0=-4A.\frac{L}{r^3}.\cos.^4\tfrac{1}{2}\varepsilon.(n-m).q$$

$$-4A'.\frac{L'}{r'^3}.\cos.^4\tfrac{1}{2}\varepsilon'.(n-m').q'$$

$$-nB.\frac{L}{r^3}.\sin.^2\varepsilon.\left\{\sin.\left(\frac{2m.(i\pi+\lambda)}{n-m}-2m\beta\right)\right.$$
$$\left.+\frac{2nq}{n-m}.\cos.\left(\frac{2m.(i\pi+\lambda)}{n-m}-2m\beta\right)\right\}$$

$$-nB.\frac{L'}{r'^3}.\sin.^2\varepsilon'.\left\{\sin.\left(\frac{2m.(i\pi+\lambda)}{n-m}-2m\beta-2\delta\right)\right.$$
$$\left.+\frac{2nq}{n-m}.\cos.\left(\frac{2m.(i\pi+\lambda)}{n-m}-2m\beta-2\delta\right)\right\};$$

ce qui donne, en faisant pour abréger,

$$2A.\frac{L}{r^3}.\cos.^4\tfrac{1}{2}\varepsilon=a;\quad 2A'.\frac{L'}{r'^3}.\cos.^4\tfrac{1}{2}\varepsilon'=a';$$

$$B.\frac{L}{r^3}.\sin.^2\varepsilon.\cos.\left(2m.\frac{(i\pi+\lambda)}{n-m}-2m\beta\right)$$
$$+B.\frac{L'}{r'^3}.\sin.^2\varepsilon'.\cos.\left(2m\frac{(i\pi+\lambda)}{n-m}-2m\beta-2\delta\right)=b;$$

$$B.\frac{L}{r^3}.\sin.^2\varepsilon.\sin.\left(2m.\frac{(i\pi+\lambda)}{n-m}-2m\beta\right)$$
$$+B.\frac{L'}{r'^3}.\sin.^2\varepsilon'.\sin.\left(2m.\frac{(i\pi+\lambda)}{n-m}-2m\beta-2\delta\right)=2h;$$

$$q=-\frac{(n-m).\left((n-m').a'\beta'+nh\right)}{(n-m)^2.a+(n-m')^2.a'+n^2b};$$

$$q'=\frac{\left((n-m)^2.a+n^2b\right).\beta'-(n-m').nh}{(n-m)^2.a+(n-m')^2.a'+n^2b}.$$

L'expression entière de la hauteur de la marée au-dessus de la basse mer, expression double de la valeur précédente de la haute mer, devient ainsi, à-très-peu-près, en négligeant le quarré de h, à cause de son extrême petitesse, sur-tout dans les équinoxes et dans les solstices,

$$a+a'+b-\frac{2a'.\left((n-m)^2.a+n^2b\right).\text{б}^2+4.n.(n-m').a'h.\text{б}'}{(n-m)^2.a+(n-m')^2.a'+n^2b}.$$

Si l'on suppose dans les expressions de $\text{б}'$, b et h,

$$i'-i=i''; \; i=i'''+s,$$

et si l'on nomme $\text{б}''$, b' et h', ce que deviennent ces expressions, lorsqu'on y change i en i'''; la fonction précédente devient, à-très-peu-près,

$$a+a'+b'-\frac{2n.s\pi.h'}{n-m}$$

$$-2a'.\frac{\left\{\begin{matrix}\left((n-m)^2a+n^2b'\right).\left(\frac{s^2\pi^2.(m'-m)^2}{(n-m)^2}-2\text{б}''.s\pi.\frac{m'-m}{n-m}+\text{б}''^2\right)\\ -2n.(n-m').\left(\text{б}''-\frac{s\pi.(m'-m)}{n-m}\right).\left(h'+\frac{ms\pi}{n-m}.b'\right)\end{matrix}\right\}}{(n-m)^2.a+(n-m')^2.a'+n^2b'}.$$

Si l'on détermine les constantes б et λ de l'expression de $\text{б}''$, de manière que le coëfficient de la première puissance de s soit nul; cette fonction devient à-très-peu-près, et en observant que l'on peut négliger les termes affectés de m^2b',

$$a+a'+b'-\frac{2.s^2\pi^2.\left(aa'.(m'-m)^2+ab'.m^2+a'b'm'^2\right)}{(n-m)^2.a+(n-m')^2.a'+n^2b'},$$

ou

$$a+a'+b'$$

$$-2.\frac{\left[s\pi.\left(\frac{m'-m}{n-m}\right)\right]^2.a'}{a+a'+b'}.\left(a+b'.\frac{m'+m}{m'-m}\right).\left(1+2\frac{\left((m'-m)a'-mb'\right)}{(n-m).(a+b')}\right). \quad (o)$$

s étant supposé nul, on a la plus grande marée vers les syzigies. Si l'on fait successivement $s=\pm 1$; $s=\pm 2$; $s=\pm 3$, etc.,

on a les hautes marées qui suivent ou précèdent cette plus grande marée; et en ne considérant que les nombres pairs de ces valeurs de s, on aura les plus hautes mers qui suivent ou précèdent cette plus haute mer, d'un ou de plusieurs jours.

Au moment de la syzigie, $m't'-mt'$ est nul ou un multiple de la demi-circonférence, t' désignant le temps relatif à cette phase. Soit $t'+T$ le temps relatif à la plus haute mer; $nt-mt-\lambda$, et $nt-m't-\lambda'$ étant, au moment de cette marée, multiples de la demi-circonférence, $m't-mt-\lambda'+\lambda$ sera un multiple de la demi-circonférence; d'où il est aisé de conclure que $(m'-m)\,T-\lambda'+\lambda$ ou $(m'-m).(T-6)$ est égal à zéro; ce qui donne $T=6$. De là il suit que $\cos.(2nt-2\gamma)$, ou $\cos.(2nt-2mt-2\lambda+2mt-2m6)$ devient, au moment de la plus haute mer, $\cos.(2mt-2m6)$, ou $\cos.2mt'$. Pareillement,

$$\cos.(2mt-2\gamma-2\delta)=\cos.(2mt'-2\delta):$$

ainsi les cosinus de l'expression de $6'$ se rapportent à l'instant même de la syzigie; ce qui a également lieu pour les marées quadratures.

Soit p le quarré du cosinus de la déclinaison du soleil, à l'instant de la syzigie; on aura, par ce qui précède,

$$p=\frac{1+\cos.^2\varepsilon}{2}+\frac{1}{2}.\sin.^2\varepsilon.\cos.^2mt';$$

or on a

$$\cos.^4\tfrac{1}{2}\varepsilon=\frac{1+\cos.^2\varepsilon}{2}-\sin.^4\tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

En négligeant donc, comme nous l'avons fait, $\sin.^4\frac{1}{2}\varepsilon$; on aura

$$2A.cos.^4\frac{1}{2}\varepsilon.\frac{L}{r^3}+B.sin.^2\varepsilon.\frac{L}{r^3}\cdot cos.\,2mt'$$

$$=2A.\frac{L}{r^3}\cdot p-(A-B.\frac{L}{r^3}\cdot sin.^2\varepsilon.cos.\,2mt'.$$

En nommant pareillement p' le quarré du cosinus de la déclinaison de la lune à l'instant de la syzigie, on aura

$$2A'.\,cos.^4\frac{1}{2}\varepsilon'.\,\frac{L'}{r'^3}\cdot+B.sin.^2\varepsilon'.\,\frac{L'}{r'^3}\cdot\,cos.\,(2m't'-2\delta)$$

$$=2A'.\frac{L'}{r'^3}\cdot p'-(A'-B)\frac{L'}{r'^3}\;sin.^2\varepsilon'.cos.\,(2m't'-2\delta).$$

Dans les syzigies des solstices, mt' et $m't'$ sont augmentés de $\frac{1}{2}\pi$. En désignant donc par $\frac{1}{2}\pi+mt''$, et $\frac{1}{2}\pi+m't''$, les angles mt' et $m't'$, ce qui revient à compter du solstice, les arcs mt'', et $m'\,t''$; on aura

$$cos.\,2mt'=-cos.\,2mt''$$

$$cos.\,(2mt'-2\delta)=-cos.2\,(m't''-\delta).$$

En désignant par q et q' les quarrés des cosinus des déclinaisons solaires lunaires à l'instant de la syzigie, on aura

$$2A.cos.^4\frac{1}{2}\varepsilon.\,\frac{L}{r^3}+B.\frac{L}{r^3}\cdot sin.\,\varepsilon.cos.\,2mt'$$

$$=q.2A.\frac{L}{r^3}\cdot+(A-B).\frac{L}{r^3}\cdot sin.^2\varepsilon.cos.\,2mt'';$$

$$2A'.cos.^4\frac{1}{2}\varepsilon'.\frac{L'}{r'^3}\cdot+B.\frac{L'}{r'^3}\cdot sin.^2\varepsilon'.cos.(2m't'-2\delta)$$

$$=q'.2A'.\frac{L}{r^3}\cdot+(A'-B).\frac{L'}{r'^3}\cdot sin.^2\varepsilon'.\,cos.\,(2mt''-2\delta).$$

On peut supposer que, dans l'ensemble des syzigies considérées ci-dessus, la somme des cosinus de $2mt$ est égale à la

somme des cosinus de $2mt''$, et que la somme des cosinus de $2mt'-2\delta$ égale la somme des cosinus de $2m't''-2\delta$, parce que ces angles diffèrent peu de l'unité, et parce que leurs cosinus sont multipliés dans les expressions précédentes, par les très-petits facteurs $(A-B).\sin.^2\varepsilon$ et $(A'-B).\sin.^2.\varepsilon'$. En supposant donc que p et q expriment les sommes des quarrés des cosinus des déclinaisons du soleil aux instants des syzigies équinoxiales et solsticiales, et que p' et q' expriment les mêmes sommes pour la lune; la somme des quantités $\sin.^2\varepsilon.\cos.2mt'$ sera $p-q$, et la somme des quantités $\sin.^2.\varepsilon'.\cos.(2mt'-2\delta)$ sera $p'-q'$.

On aura donc, dans les syzigies équinoxiales,

$$2i\alpha=2A.\frac{L}{r^3}.p+2A'.\frac{L'}{r'^3}.p'-(A-B).(p-q).\frac{L}{r^3}.$$
$$-(A'-B).(p'-q').\frac{L'}{r'^3};$$

et dans les syzigies solsticiales,

$$2i\alpha'=2A.\frac{L}{r^3}.q+2A'\frac{L'}{r'^3}.q'+(A-B).\frac{L}{r^3}.(p-q).$$
$$+(A'-B).\frac{L'}{r'^3}.(p'-q'),$$

$2i\alpha'$ étant la valeur de $2i\alpha$, relative aux syzigies solsticiales.

Dans les quadratures, la haute marée lunaire coïncide avec la basse marée solaire; ce qui revient à supposer $\frac{L}{r^3}$ négatif, dans les expressions précédentes. De-là il suit que si l'on désigne par $p_{,}$ et $q_{,}$ les déclinaisons du soleil dans les quadratures équinoxiales et solsticiales; si l'on désigne par $p'_{,}$ et $q'_{,}$ les déclinaisons de la lune dans les mêmes quadratures; enfin, si l'on nomme $2i\alpha''$ et $2i\alpha'''$ ce que devient $2i\alpha$ dans

ces quadratures, on aura

$$2i\alpha'' = 2A' . \frac{L'}{r'^3} . q_{,}' - 2A . \frac{L}{r^3} . p_{,} + (A - B) . \frac{L}{r^3} . (p_{,} - q_{,})$$
$$+ (A' - B) . \frac{L'}{r'^3} . (p_{,}' - q_{,}');$$

$$2i\alpha''' = 2A' . \frac{L'}{r'^3} . p_{,}' - 2A . \frac{L}{r^3} . q_{,} - (A - B) . \frac{L}{r^3} . (p_{,} - q_{,})$$
$$-(A' - B') . \frac{L'}{r'^3} . (p_{,}' - q_{,}').$$

J'ai observé, dans le n° 25 du livre IV de la Mécanique céleste, qu'à raison de l'argument de la variation, dans l'expression de la parallaxe lunaire, l'action de la lune sur la mer est augmentée d'environ un quarantième dans les syzigies, et diminuée de la même quantité dans les quadratures. Ayant traité depuis, avec un soin particulier, la théorie de la lune, dans le septième livre de la Mécanique céleste, j'ai reconnu que cet accroissement et cette diminution sont un peu plus petits, et qu'ils sont environ un quarante-cinquième de la valeur moyenne, ou, plus exactement, le produit de cette valeur par 0,022486, lorsque l'on considère, comme nous l'avons fait, autant de pleines que de nouvelles lunes.

Dans les syzigies que nous avons considerées, on a

$$p = 63{,}632467;\quad q = 54{,}260856;$$
$$p' = 63{,}546581;\quad q' = 56{,}879696;$$
$$p_{,} = 63{,}635484;\quad q_{,} = 54{,}301142;$$
$$p_{,}' = 63{,}497242;\quad q_{,}' = 56{,}962913;$$

et, par ce qui précède, on a

$$2i\alpha = 411^{m}{,}359;\quad 2i\alpha' = 367^{m}{,}468;$$
$$2i\alpha'' = 160^{m}{,}850;\quad 2i\alpha''' = 203^{m}{,}948.$$

On aura ainsi les quatre équations suivantes:

$$411^{m}.359 = 63{,}546581 . 1{,}022486 . 2A' . \frac{L'}{r'^3} + 63{,}632467 . 2A . \frac{L}{r^3}$$

$$-3{,}333442 . 2(A'-B) . 1{,}022486 . \frac{L'}{r'^3} - 4{,}685805 . 2(A-B) . \frac{L}{r^3}; \quad (1)$$

$$367^{m},468 = 56{,}879696 . 1{,}022486 . 2A' . \frac{L'}{r'^3} + 54{,}260856 . 2A . \frac{L}{r^3}$$

$$+3{,}333442 . 2(A'-B) . 1{,}022486 . \frac{L'}{r'^3} + 4{,}685805 . 2(A-B) . \frac{L}{r^3}; \quad (2)$$

$$160^{m},850 = 56{,}962913 . 0{,}977514 . 2A' . \frac{L'}{r'^3} - 63{,}635484 . 2A . \frac{L}{r^3}$$

$$+3{,}267165 . 0{,}977514 . 2(A'-B) . \frac{L'^3}{r'};$$

$$+4{,}667171 . 2(A-B) . \frac{L}{r^3}; \quad (3)$$

$$203^{m},948 = 63{,}497242 . 0{,}977514 . 2A' . \frac{L'}{r^3} - 54{,}301142 . 2A\frac{L}{r^3}$$

$$-3{,}267165 . 0{,}977514 . 2(A'-B) . \frac{L'}{r'^3} - 4{,}667171 . 2(A-B) . \frac{L}{r^3}; \quad (4)$$

Dans toutes ces équations, les valeurs $\frac{L'}{r'^3}$ et $\frac{L}{r^3}$ sont relatives aux moyennes distances de la lune et du soleil à la terre.

Le systême $+(1)+(2)$ des équations précédentes, donne

$$778^{m},708 = 120{,}426277 . 1{,}022486 . 2A' . \frac{L'}{r'^3} + 117{,}893323 . 2A . \frac{L}{r^3}; \quad (5)$$

Le systême des équations $+(3)+(4)$, donne

$$364^{m},798 = 120{,}460155 . 0{,}977514 . 2A' . \frac{L'}{r'^3} - 117{,}936626 . 2A . \frac{L}{r^3}; \quad (6)$$

De ces deux équations, on tire

$$2A' . \frac{L'}{r'^3} = 4^{m},74788; \quad 2A . \frac{L}{r^3} = 1^{m},64658.$$

Le système des équations $+(1)-(2)$, donne

$$43^{m},891 = 6,666885 . 1,022486 . 2A'.\frac{L'}{r'^3} + 9,371611 . 2A.\frac{L}{r^3}$$

$$-6,666885 . 1,022486 . 2\frac{(A'-B)}{A'}.A'.\frac{L'}{r'^3} - 9,371611 . 2\frac{(A-B)}{A}.A.\frac{L}{r^3}; \quad (7)$$

le système des équations $+(4)-(3)$ donne

$$43^{m},098 = 6,534329 . 0,977514 . 2A'.\frac{L'}{r'^3} + 9,334342 . 2A\frac{L}{r^3}$$

$$-6,534329 . 0,977514 . 2\frac{(A'-B)}{A'}.A'\frac{L'}{r'^3} - 9,334342 . 2\frac{(A-B)}{A}.A\frac{L}{r^3}. \quad (8)$$

En substituant pour $2A'.\frac{L'}{r'^3}$ et $2A.\frac{L}{r^3}$ leurs valeurs précédentes, l'équation (7) donne

$$3,9054 = 32,3653 . \frac{(A'-B)}{A'} + 15,4311 . \frac{(A-B)}{A}; \quad (9)$$

et l'équation (8) donne

$$2,5983 = 30,3266 . \frac{(A'-B)}{A'} + 15,3697 . \frac{(A-B)}{A}. \quad (10)$$

Si l'on suppose $A' = (1+x).B$, xB sera l'accroissement de A' dû à la rapidité du mouvement de l'astre L' dans son orbite; alors on a $\frac{A'-B}{A'} = \frac{x}{1+x}$. On peut supposer ici sans erreur sensible, cet accroissement proportionnel à la vîtesse angulaire m' de l'astre dans son orbite, et dans ce cas, $A-B = \frac{m}{m'}.x$; ce qui donne

$$\frac{A-B}{A} = \frac{mx}{m'-mx} = \frac{m}{m'}.x,$$

en négligeant le quarré de la petite fraction $\frac{m}{m'}$. On peut

même supposer, sans erreur sensible, vu la petitesse de x,

$$\frac{m}{m'}.\,x = \frac{m}{m'}.\,\frac{x}{1+x};$$

de plus

$$\frac{m}{m'} = 0{,}0748.$$

En ajoutant donc les équations (9) et (10), on aura

$$x = 0{,}11119;$$

ce qui donne

$$2B.\frac{L'}{r'^3} = 4^m{,}27279;$$

$$2B.\frac{L}{r^3} = 1^m{,}63289;$$

et par conséquent

$$\frac{\frac{L'}{r'^3}}{\frac{L}{r^3}} = 2{,}6167.$$

On voit, par les équations (9) et (10), qu'une valeur positive de x, peu différente de $\frac{1}{9}$, est à-la-fois indiquée par les observations des marées syzigies et des marées quadratures.

On aura d'une manière approchée la probabilité de l'existence d'une valeur positive de x, en observant que si elle n'existait pas, l'erreur de la différence 43,891, des valeurs de $2i\alpha$, relatives aux syzigies des équinoxes et des solstices, serait 3,9054, ou au-dessus; et par le nº 3, sa probabilité est $\frac{1}{223{,}6}$. L'erreur de la différence 43,098 des valeurs de $2i\alpha$ relatives aux quadratures des solstices et des équinoxes, serait 2,5983, ou au-dessus; et par le nº 5, sa probabilité est

$\frac{1}{11,4564}$. La probabilité de l'existence simultanée de ces erreurs est le produit des deux probabilités précédentes; elle est donc $\frac{1}{2562}$, en sorte que la probabilité d'une valeur positive de x, est $\frac{2561}{2562}$.

Les observations anciennes des marées syzigies m'ont donné pour x, 0,10657. (*Mécanique céleste*, liv. IV, n° 27.) Les observations anciennes des marées quadratures m'ont donné pour x, 0,1061; ce qui diffère très-peu de la valeur précédente de x, qui me semble préférable, à cause du plus grand nombre d'observations que nous venons d'employer. L'existence d'une valeur de x positive étant donc à-la-fois prouvée par les observations anciennes et modernes, il me semble impossible de la révoquer en doute.

Les observations anciennes m'ont donné

$$2A'.\frac{L'}{r'^3}=4^m,6740;\ \frac{2AL}{r^3}=1^m,5750.$$

Ces valeurs diffèrent peu des précédentes, $4^m,74788$ et $1^m,64658$. La somme des valeurs de $48.\alpha$ est 416,156 par les observations anciennes, et 430,825 par les observations modernes; il faut donc, pour comparer les valeurs anciennes et modernes de $2A'\frac{L'}{r'^3}$ et de $\frac{2AL}{r^3}$, multiplier les valeurs modernes par la fraction $\frac{416,156}{430,825}$, et alors elles deviennent $4^m,5968$, et $1^m,5905$; mais les valeurs modernes étant fondées sur un plus grand nombre d'observations, elles doivent être préférées.

Le rapport de $\frac{L'}{r'^3}$ à $\frac{L}{r^3}$ est un élément important de

l'astronomie. Le rapport précédent donne $\frac{1}{69,3}$, pour le rapport de la masse de la lune à celle de la terre; il donne encore, en secondes décimales, le coëfficient de la nutation, égal à 29″,940; ce qui correspond à 9″,70 en secondes sexagésimales.

Newton a déterminé le rapport des actions du soleil et de la lune sur la mer, dans la proposition 37 du troisième livre des Principes mathématiques de la Philosophie naturelle. Il suppose, d'après les observations de Sturmius, qu'aux jours des équinoxes, la marée, à Bristol, est de quinze pieds dans les quadratures, et de vingt-cinq pieds dans les syzigies; et il en conclut que, dans les moyennes distances du soleil et de la lune à la terre, les actions de ces astres sur la mer sont dans le rapport de 1 à 4,4815. Pour déterminer ce rapport, Newton observe que le *maximum* des marées syzigies et le *minimum* des marées quadratures n'ont pas lieu les jours mêmes de ces phases, mais environ quarante-trois heures sexagésimales après leur arrivée. A ce moment, la lune s'est éloignée sensiblement du soleil; ce qui, selon ce grand géomètre, doit affaiblir l'action solaire dans le rapport du cosinus du double de cette distance à l'unité. Mais cela n'est pas exact; et l'on a vu précédemment qu'il faut, pour avoir le *maximum* ou le *minimum* des marées, supposer cette distance nulle, comme au moment de la phase, et employer les déclinaisons des astres qui ont lieu à ce moment. C'est ce que Newton avait fait dans la première édition de son ouvrage. Il a pensé, dans les deux éditions suivantes, qu'il obtiendrait plus d'exactitude en considérant les actions des astres à l'instant même de la marée. Ce n'est pas le seul

exemple des erreurs que l'on commet en cherchant à s'approcher de la vérité.

VII. Considérons maintenant le coëfficient de $2i6$. Ce coëfficient, par ce qui précède, est dans les syzigies des équinoxes,

$$\frac{2a'.\left(a+b'.\frac{m'+m}{m'-m}\right)}{a+a'+b'}.\left(2\pi.\frac{(m'-m)}{n-m}\right)^2\left(1+\frac{2a'.(m'-m)-2mb'}{(n-m).(a+a'+b')}\right); \quad (x)$$

on peut faire disparaître le terme $\frac{2a'.(m'-m)-2mb'}{(n-m).(a+a'+b')}$, en observant que le retard journalier des marées syzigies est, à-fort-peu-près, $\frac{a'.(m'-m)-mb'}{(n-m).(a+a'+b')}$, comme on le verra dans la suite. D'où il suit que, si l'on prend pour unité de temps, comme nous l'avons fait ci-dessus, l'intervalle de deux marées syzigies d'un jour à l'autre, et si l'on désigne par v le mouvement synodique de la lune dans cet intervalle, la formule de la hauteur des marées deviendra pour le nombre t d'intervalles, à partir du *maximum*,

$$a+a'+b'-\frac{2a'.\left(a+b'.\frac{m'+m}{m'-m}\right)}{a+a'+b'}.t^2v^2. \quad (y)$$

Voyons maintenant comment on peut y faire entrer les inégalités du mouvement lunaire. Si l'on développe, dans une série d'angles croissants proportionnellement au temps, la fonction

$$2\cdot\frac{L'}{r'^3}\cdot\left(\cos.^4\tfrac{1}{2}\epsilon'.\cos.(2nt+2\omega-2\varphi')+\tfrac{1}{2}\cdot\sin.^2\epsilon'.\cos.(2nt+2\omega)\right)$$

$$+2\cdot\frac{L}{r^3}\cdot\left(\cos.^4\tfrac{1}{2}\epsilon.\cos.(2nt+2\omega-2\varphi)+\tfrac{1}{2}\cdot\sin.^2\epsilon.\cos.(2nt+2\omega)\right),$$

en désignant cette série par

$$b\cos.(2nt+2\omega)+b'.\cos.(2nt+2\omega-2mt)+b''\cos.(2nt+2\omega-2m't)$$
$$+b'''\cos.(2nt+2\omega-2m''t)+\text{etc.};$$

chacun de ces termes produira un reflux partiel, dont la somme sera de la forme

$$b.\cos.(2nt-2\gamma)+a.\cos.(2nt-2mt-2\lambda)+a'.\cos.(2nt-2m't-2\lambda')$$
$$+a''.\cos.(2nt-2m''t-2\lambda'')+\text{etc.}$$

Le plus grand flux possible a lieu lorsque tous les cosinus deviennent égaux à l'unité. Supposons qu'à partir de cet état, on ait

$$nt-\gamma=s\pi+p;$$
$$nt-mt-\lambda=i\pi+nq;$$
$$nt-m't-\lambda'=i'\pi+q';$$
etc.

En réduisant en série l'expression précédente de la hauteur des marées, elle deviendra

$$b+a+a'+a''+\text{etc.}-2bp^2-2aq^2-2a'q'^2-\text{etc.}$$

La supposition d'une grande marée donne la différentielle de cette fonction, nulle; et par conséquent,

$$bp=-aq-a'q'-a''q''-\text{etc.},$$

à cause de $dp=dq=dq'=$etc.; toutes ces différentielles étant à-très-peu-près égales à ndt. Maintenant les équations

$$nt-\gamma=s\pi+p$$
$$nt-mt-\lambda'=i\pi+q,$$

donnent

$$q=p.\frac{(n-m)}{n}-\frac{ms\pi}{n}-(i-s).\pi-\lambda+\frac{(n-m)}{n}\gamma.$$

En faisant $i-s=s'$, et déterminant γ et λ de manière que $-s'\pi-\lambda+\frac{(n-m)}{n}\gamma$ soit nul, on aura, à-très-peu-près,

$$q=p-\frac{ms\pi}{n},$$

à cause de la petitesse de m, relativement à n. On aura pareillement

$$q'=p-\frac{m's\pi}{n}$$

etc.;

et alors on aura

$$p=\frac{s\pi}{n}.\frac{(am+a'm'+a''m''+\text{etc.}}{b+a+a'+a''+\text{etc.}}=\frac{s\pi}{n}.p';$$

en exprimant par p' la quantité

$$\frac{am+a'm'+\text{etc.}}{b+a+a'+\text{etc.}}.$$

L'expression de la hauteur de la mer devient ainsi

$$b+a+a'+\text{etc.}-2\left(\frac{s\pi}{n}\right)^2.\left(bp'^2+a.(p'-m)^2+a'.(p'-m')^2+\text{etc.}\right).$$

Considérons le terme

$$2\frac{L'}{r'^3}.\cos.^4\frac{1}{2}\epsilon'.\cos.(2nt+2\omega-2\varphi')$$

de l'expression des forces perturbatrices. Soit $h.\sin.(lt-\delta')$, une des inégalités de φ', qui devienne nulle constamment au moment des syzigies. En n'ayant égard qu'à cette inégalité, et négligeant le quarré de h, le terme précédent devient

$$2\frac{L'}{r'^3}\cdot \cos.^4 \tfrac{1}{2}\,\epsilon'.\left\{\begin{array}{l}\cos.(2nt+2\omega-2m't)\\ +h.\cos.(2nt+2\omega-2m't-lt+\delta')\\ -h.\cos.(2nt+2\omega-2m't+lt-\delta')\end{array}\right\};$$

ce qui produit, dans l'expression de la hauteur de la mer, trois termes de la forme

$$\begin{array}{l} a'.\cos.(2nt-2m't-2\lambda') \\ +a'h'.\cos.(2nt-2m't-lt-2\lambda'') \\ -a'h''.\cos.(2nt-2m't+lt-2\lambda'''). \quad (i) \end{array}$$

Il en résulte, par ce qui précède, dans l'expression du *maximum* de la marée, les trois termes $a'+a'h'-a'h''$. h' et h'' seraient égaux à h, si l'action des astres n'était point accrue par la rapidité de leur mouvement. Mais on a vu précédemment que cette augmentation que nous avons désignée par x, est $\frac{1}{9}$ environ pour la lune; d'où il suit que l'on a à-fort-peu-près, en supposant, comme nous l'avons fait, l'accroissement proportionnel au mouvement de l'astre dans son orbite,

$$a'h'=a'h+x.a'h.\frac{l}{2m'},$$

$$a'h''=a'h-x.a'h.\frac{l}{2m'}.$$

et qu'ainsi les trois termes

$$a'+a'h'-a'h''$$

se réduisent à

$$a'+xa'h.\frac{l}{m}.$$

Le second terme de cette quantité peut être négligé sans erreur sensible, relativement à l'argument de la variation.

8.

Les trois termes précédents produisent encore, dans l'expression de la hauteur de la marée, la quantité

$$-2.\left(\frac{s\pi}{n}\right)^2.\left\{\begin{array}{l} a'.(p'-m')^2+a'.h'.\left(p'-m'-\frac{1}{2}l\right)^2 \\ -a'.h''.\left(p'-m'+\frac{1}{2}l\right)^2 \end{array}\right\};$$

elle se réduit, à-très-peu-près, à

$$-2.\left(\frac{s\pi}{n}\right)^2.\left(a'.(p'-m'-hl)^2+x.\frac{l}{m'}.a'h.\left((p'-m')^2+\frac{1}{4}l^2\right)\right).$$

Ce dernier terme peut être négligé sans erreur sensible. D'ailleurs, hl est l'accroissement de la vîtesse angulaire de la lune, en vertu de l'argument $h.\sin.(lt-\delta')$. Il suffit donc, pour avoir égard à cet argument, de prendre pour m', la vîtesse angulaire de la lune, au moment de la syzigie.

La valeur de p' est

$$\frac{am+a'm'+a''m''+\text{etc.}}{b+a+a'+a''+\text{etc.}};$$

les trois termes (i) introduisent dans le numérateur de cette expression, les suivants,

$$a'm'+a'h'.\left(m'+\frac{1}{2}l\right)-a''h''.\left(m'-\frac{1}{2}l\right):$$

en substituant pour $a'h'$ et $a''h''$, leurs valeurs précédentes, et négligeant x, ces trois termes se réduisent à $a'm'+a'hl$; ce qui revient encore à prendre dans p', au lieu de m', la vîtesse angulaire de la lune.

De-là il suit que l'on aura égard à toutes les inégalités du mouvement φ' de la lune dans son orbite, en supposant,

dans la formule (y), que v est le mouvement angulaire de cet astre pendant l'intervalle t.

Considérons maintenant l'influence des variations de r', et supposons que $\frac{h}{r'} \cdot cos. (lt - \delta')$ soit une des inégalités de $\frac{1}{r'}$, ou de la parallaxe lunaire : il en résultera dans la fonction

$$2 . \frac{L'}{r'^3} \cdot cos.^4 \frac{1}{2} \epsilon' . cos. (2nt + 2\omega - 2\varphi'),$$

les trois termes

$$2 . \frac{L'}{r'^3} \cdot cos.^4 \frac{1}{2} \epsilon' . \left\{ \begin{array}{l} cos. (2nt + 2\omega - 2m't) \\ + \frac{3}{2} h . cos. (2nt + 2\omega - 2m't - lt + \delta') \\ + \frac{3}{2} h . cos. (2nt + 2\omega - 2m't + lt - \delta') \end{array} \right\};$$

ce qui produit, dans l'expression de la hauteur de la mer, les trois inégalités

$$\begin{array}{l} a' . cos. (2nt - 2m't - \lambda') \\ + \frac{3}{2} a' h' . cos. (2nt - 2m't - lt - 2\lambda'') \\ + \frac{3}{2} a' h'' . cos. (2nt - 2m't + lt - 2\lambda'''), \end{array}$$

et, par conséquent, dans l'expression du *maximum* des marées, les trois termes

$$a' + \frac{3}{2} a' h' + \frac{3}{2} \cdot a' h'',$$

ou simplement, $a' . \left(1 + 3h\right)$, en substituant pour $a' h'$ et $a' h''$, leurs valeurs précédentes. On aura donc égard à la variation du rayon vecteur, dépendante de h, en augmentant la parallaxe lunaire, de la quantité h.

Les termes précédents produisent encore, dans l'expression des marées, la quantité

$$-2.\left(\frac{s\pi}{r}\right)^2.\left\{a'.(p'-m')^2+\frac{3}{2}\ 'h'.\left(p'-m'-\frac{1}{2}l\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{3}{2}.a'h''.\left(p''-m'+\frac{1}{2}l'\right)^2\right\}.$$

Cette quantité se réduit, à-fort-peu-près, à

$$-2.\left(\frac{s\pi}{n}\right)^2.\left(a'.(1+3h).(p'-m')^2+3a'h.\frac{l^2}{4}\right):$$

Le premier terme revient à augmenter dans le calcul de a' ou de l'action lunaire, la parallaxe lunaire, de h. Le second terme devient

$$-6a'h.\left(\frac{\frac{1}{2}s\pi.l}{n}\right)^2.$$

Le terme

$$\pm\frac{L'}{r'^3}\ \frac{1}{2}\,sin.^2\,\varepsilon'.cos.\,(2nt+2\varpi)$$

de l'expression des forces perturbatrices, ajoutera à-fort-peu-près, à la hauteur des marées, les termes

$$\pm\frac{\frac{1}{2}a'.(1+3h).sin.^2\varepsilon'.}{(1+x).cos.^4\frac{1}{2}\varepsilon'}\left(1-6h.\frac{(\frac{1}{2}.s\pi.l)^2}{n}\right).$$

De-là il suit que l'on aura égard à la variation de r', en substituant, pour la parallaxe lunaire, sa valeur réduite dans une série ordonnée par rapport aux puissances du mouvement angulaire de la lune pendant l'intervalle t; et en négligeant les puissances supérieures au quarré de t.

Le seul terme de φ' qui soit constamment nul dans les syzigies et dans les quadratures, est celui qui dépend de l'argument de la variation, et dans lequel $l=2m'-2m$. Alors

la variation de r' produit le terme

$$-6a'h.\left(1+\frac{\frac{1}{2}.\sin.^2\varepsilon'}{\cos.^4\frac{1}{2}\beta'}\right).t^2v^2.$$

Dans les syzigies il faut ici, pour avoir a', multiplier la valeur précédente de $2A'.\frac{L'}{r'^3}$ par $1{,}022486.\frac{(p'+q')}{2}$, et multiplier la valeur moyenne de v, par 1,02091, pour avoir égard à l'argument de la variation. On aura $a'h.\left(1\pm\frac{1}{2}.\frac{\sin.^2\varepsilon'}{\cos.^4\frac{1}{2}\varepsilon'}\right)$, en multipliant la valeur de $\frac{2A'L'}{r'^3}.1{,}022486$ par $p'h$ dans les syzigies équinoxiales, et par $q'h$ dans les syzigies solsticiales. $3h$ est égal à 0,022486.

Dans les quadratures, on aura a' en multipliant la valeur de $\frac{2A'.L'}{r'^3}$ par

$$\frac{(p_{,}'+q_{,}')}{2}.\ 0{,}975514.$$

On aura v en multipliant sa valeur moyenne par 0,97909. $3h$ devient négatif et égal à $-0{,}022486$. On aura $a'h.\left(1\pm\frac{1}{2}.\frac{\sin.^2\varepsilon'}{\cos.^2\varepsilon'}\right)$, en multipliant la valeur de $2A'.\frac{L'}{r'^3}.\ 0{,}975514$, par $q_{,}'h$ dans les quadratures équinoxiales, et par $p_{,}'h$ dans les quadratures solsticiales.

On aura généralement

$$a+a'+b'=2i\alpha,$$

et, par conséquent,

$$a'+b'=2i\alpha-a';$$

et cela a lieu dans les équinoxes où b est positif, et dans les solstices où il est négatif. La formule (y) devient ainsi

$$2i\alpha-\frac{2a'.(2i\alpha-a')}{2i\alpha}.t^2v^2;\quad (z)$$

cette formule s'étend aux quadratures comme aux syzigies: $2i\alpha - a'$ est négatif dans les quadratures. v est le moyen mouvement synodique de la lune dans un intervalle de $1^j,026736$ pour les syzigies équinoxiales; de $1^j,028076$ pour les syzigies solsticiales; de $1^j,056223$ pour les quadratures équinoxiales, et de $1^j,04796$ pour les quadratures solsticiales. Cela posé, on trouve dans les syzigies équinoxiales,

$$2i6 = 9^m,1065.$$

Les observations nous ont donné $8^m,9446$. La différence $0^m,01619$ est dans les limites des erreurs des approximations et des observations.

On trouve par la formule, dans les syzigies solsticiales,

$$2i6 = 6^m,5817.$$

Les observations nous ont donné $5^m,9273$. La différence $0^m,5546$ est encore dans les limites des erreurs des approximations et des observations.

La formule donne, dans les quadratures équinoxiales,

$$2i6 = 19^m,4392.$$

Les observations nous ont donné 20,005. La différence $0^m,5658$ est encore dans les limites des erreurs des approximations et des observations.

Dans les quadratures solsticiales, la formule donne

$$2i6 = 9^m,2722.$$

Les observations nous ont donné $9^m,203$; ce qui s'accorde bien avec la théorie.

X. Je vais présentement considérer l'influence des distances de la lune à la terre sur les marées. J'ai choisi, pour

cela, parmi les syzigies équinoxiales considérées ci-dessus, les dix-huit suivantes, dans lesquelles la lune était vers son apogée, ou vers son périgée.

	APOGÉE.	PÉRIGÉE.
1807	9 mars	23 mars.
	8 avril	2 septembre.
	16 septembre	1er octobre.
1808	27 mars	12 mars.
		10 avril.
1811	17 septembre	2 septembre.
		2 octobre.
1812	28 mars	13 mars.
	5 septembre	11 avril.
	5 octobre	20 septembre.

J'ai pris, comme ci-dessus, dans chaque équinoxe, l'excès de la haute marée du soir, sur la basse marée du matin, du jour qui précède la syzigie, du jour même de la syzigie, et des quatre jours qui la suivent; et j'ai doublé les résultats relatifs à la syzigie la plus voisine de l'équinoxe. En faisant ensuite une somme des résultats relatifs aux mêmes jours, j'ai obtenu les résultats suivants :

	APOGÉE.	PÉRIGÉE.
1807.	20m,040	24m,385.
	21, 430	27, 590.
	21, 750	29, 710.
	21, 615	29, 105.
	20, 970	27, 860.
	19, 790	24, 280.

	APOGÉE.	PÉRIGÉE.
1808 et 1811.	20^m,290	23, 641.
	21, 370	27, 405.
	21, 890	29, 205.
	21, 740	29, 035.
	20, 750	27, 925.
	19, 360	25, 495.
1812	19^m,944	23^m,267.
	21, 340	27, 108.
	22, 459	29, 053.
	22, 186	29, 344.
	21, 403	28, 123.
	20, 533	25, 018.

Si l'on ajoute les hauteurs correspondantes de chacun de ces trois groupes, on obtient les sommes suivantes :

Apogée. 60^m,274; 64^m,140; 66^m,099; 65^m,541; 63^m,123; 59^m,683.
Périgée. 71^m,293; 82^m,103; 87^m,768; 87^m,484; 83^m,908; 73^m,803.

Si l'on détermine la loi de ces nombres par les formules du n° 1, on trouve :

Apogée. $65^m,966 - 0^m,96496.(t-2,40281)^2$;
Périgée. $88^m,457 - 2^m,52748.(t-2,5999)^2$;

t étant, comme dans le n° 1, le nombre des intervalles pris pour unité, et écoulés depuis la haute mer du soir du jour qui précède la syzigie.

Si l'on désigne toujours par $2i\alpha$, et $2i\varepsilon$, ce que nous avons désigné par là dans les n°s 1 et suivants, on aura 65^m,981, et 80^m,497, pour les valeurs respectives de $2i\alpha$, dans les hauteurs précédentes des marées apogées et péri-

gées. La valeur de $2i\beta$ est près de trois fois plus grande dans le périgée que dans l'apogée : ainsi l'effet des distances de la lune à la terre se manifeste non-seulement dans les hauteurs des marées, mais encore d'une manière fort remarquable dans la loi de variation de ces hauteurs. La somme des deux valeurs de $2i\alpha$ est $154^{m},478$. Elle se rapporte à vingt-quatre syzigies équinoxiales; elle doit être, par conséquent, les trois huitièmes de la valeur de $2i\alpha$, relative aux soixante-quatre syzigies équinoxiales du n° 1, et qui est égale à $411^{m},359$. Ces trois huitièmes sont $154^{m},260$; ce qui diffère très-peu de la somme précédente. La somme des valeurs de $2i\beta$, relative aux marées apogées et périgées précédentes, est $3^{m},5047$. La valeur de $2i\beta$, relative aux marées syzigies du n° 1, est $8^{m},9446$, dont les trois huitièmes sont $3^{m},4723$; ce qui ne diffère que d'un centième environ de la somme précédente.

Comparons maintenant les expressions précédentes, à la théorie. La différence des deux valeurs de $2i\alpha$ est $22^{m},291$; c'est l'effet du changement de la distance de la lune à la terre. Par ce qui précède, la hauteur de la marée, due à l'action de la lune sur la mer, est, en négligeant le quarré de x,

$$2.\cos.^4 \tfrac{1}{2}\varepsilon'.A'.\frac{L'}{\bar{r}'^3}.(1+3h).\left(1+\frac{1}{2}.\frac{\sin.^2\varepsilon'}{\cos.^4\frac{1}{2}\varepsilon'}\right)$$

$$+x.\frac{hl}{m'}.\,2.\cos.^4\tfrac{1}{2}\varepsilon'.\frac{A'L'}{\bar{r}'^3}.(1+3h)$$

$$-x.2\cos.^4\tfrac{1}{2}\varepsilon'.A'\frac{L'}{\bar{r}'^3}.(1+3h).\frac{\frac{1}{2}.\sin.^2\varepsilon'}{\cos.^4\frac{1}{2}\varepsilon'},$$

$\bar{r}'$ étant la moyenne distance de la lune. Or on a, à-très-peu-près, en ayant égard à l'équation du centre et à l'évection,

$$\frac{hl}{m'}+1=\frac{\bar{r}'^2}{r'^2};$$

ensuite $1+3h=\frac{\bar{r}'^3}{r'^3}$. L'expression précédente devient ainsi

$$2B.\frac{L'}{\bar{r}'^3}.p'.\frac{\bar{r}'^3}{r'^3}+\frac{2B.L'}{\bar{r}'^3}.x.\frac{\bar{r}'^5}{r'^5}.p.'\cos.^4\frac{1}{2}\varepsilon',$$

p' étant le quarré du cosinus de la declinaison de la lune, à l'instant de la syzigie. Il suit de là, que l'on aura la première partie de l'effet du changement de la distance lunaire, 1° en multipliant dans chaque syzigie, le quarré du cosinus de la déclinaison de la lune, à l'instant de la syzigie, par le cube du rapport de son demi-diamètre vrai, à sondemi-diamètre moyen égal à 2881",8; 2° en faisant une somme de ces produits relatifs aux douze syzigies périgées, que nous avons considérées, et dans chacune desquelles le demi-diamètre vrai a surpassé 3000", les syzigies dont on a doublé les résultats, comptant toujours pour deux; 3° en retranchant de cette somme, la somme des mêmes produits relatifs aux douze syzigies apogées; 4° enfin, en multipliant la différence de ces deux sommes par $2B.\frac{L'}{\bar{r}'^3}$. On trouve ainsi, pour ce produit,

$$4,59027.2B.\frac{L'}{\bar{r}'^3}.$$

Pour avoir l'autre partie de l'effet de la variation des distances lunaires, il faut 1° faire une somme des produits du quarré du cosinus de la déclinaison lunaire, par la cinquième puissance du rapport du demi-diamètre vrai de la lune dans chaque syzigie périgée, à son demi-diamètre moyen, 2881",8, et en retrancher la même somme relative aux syzigies apo-

gées; 2° multiplier la différence par $x.2B.\frac{L'}{r'^3}.\cos.^4\frac{1}{2}\varepsilon'$. On trouve ainsi, pour ce produit,

$$7{,}86126.x.\cos.^4\tfrac{1}{2}\varepsilon'.2B.\frac{L'}{r'^3}.$$

On voit que ces résultats sont conformes à ceux que j'ai obtenus par une autre méthode dans le n° 28 du liv. IV de la Mécanique céleste. On peut prendre, pour $\cos.^4\frac{1}{2}\varepsilon'$, la quantité $\frac{p'+q'}{128}$, p' et q' étant les valeurs données dans le n° 8. On aura ainsi, pour l'effet dû au changement des distances lunaires,

$$4{,}59027.\frac{2B.L'}{r'^3}+7{,}3961.x.\frac{2B.L'}{r'^3},$$

ou

$$4{,}59027.\frac{2A'L'}{r'^3}+2{,}8058.x.\frac{2BL'}{r'^3}.$$

Substituant pour $\frac{2A'L'}{r'^3}$, sa valeur trouvée dans le n° 8, on aura

$$21^m{,}794+2{,}8058.x.\frac{2B.L'}{r'^3},$$

quantité qu'il faut égaler à l'effet observé, $22^m{,}291$; ce qui donne

$$x.2{,}8058.\frac{2BL'}{r'^3}=0^m{,}497.$$

Ainsi l'accroissement de l'action lunaire est encore indiqué par la comparaison des observations apogées et périgées lunaires. Les observations anciennes que j'ai discutées dans le n° 28 du liv. IV de la Mécanique céleste, m'avaient paru indiquer le contraire. Mais j'avais pris pour $4i\alpha$ la somme

des marées des deux jours qui suivent la syzigie ; et l'on voit, par ce qui précède, que cette somme est sensiblement plus petite que $4ia$, dans les observations périgées où la diminution des hauteurs des marées, à partir du *maximum*, est très-rapide et beaucoup plus grande que dans les observations apogées. Il faut donc augmenter la différence $39^m,6961$, des marées syzigies apogées et périgées, donnée dans le n° cité ; et, d'après les résultats précédents, cette augmentation est $1^m,220$. Alors on a, par le n° cité,

$$\frac{x}{1+x} \cdot 25^m,819 = 0^m,354;$$

ce qui donne, pour x, une valeur positive ; et ce qui indique, par conséquent, un accroissement dans l'action lunaire, dû aux circonstances locales. Mais toutes ces observations apogées et périgées sont trop peu nombreuses pour déterminer la valeur de x : il vaut beaucoup mieux employer, pour cet objet, les observations des équinoxes et des solstices. Peut-être aussi n'est-il pas très-exact de supposer, comme nous le faisons, que l'accroissement de l'action d'un astre, dû aux circonstances locales, est proportionnel au mouvement de l'astre dans son orbite.

Nous allons maintenant comparer à la théorie, la loi de diminution des marées, à mesure qu'elles s'éloignent de leur *maximum* dans l'apogée et dans le périgée de la lune. Considérons d'abord l'apogée. Cette diminution est composée de deux parties ; la première est égale, par ce qui précède, à

$$-\frac{2a'.(a+b')}{a+a'+b'} \cdot t^2 . v^2,$$

v étant le mouvement réel de la lune dans l'intervalle d'une

marée syzigie à la marée correspondante du jour suivant. On aura a' en multipliant $2A'\frac{L'}{r'^3}.cos.^4\frac{1}{2}.\varepsilon'$, par douze, et par le cube du rapport du demi-diamètre lunaire dans les douze marées syzigies apogées précédentes, à son demi-diamètre moyen; et l'on peut prendre pour $cos.^4\frac{1}{2}\varepsilon'$, le rapport de $\frac{p'+q'}{2}$ à p'; p' et q' étant donnés par le n° 7. Il faut employer pour v le mouvement de la lune dans cette syzigie apogée, pendant l'intervalle t qui est ici $1^j,0227331$, et qui devient $1^j,0305744$ dans les syzigies périgées.

La seconde partie est due à la variation de la distance lunaire, à partir de l'apogée, en ayant égard aux inégalités de l'équation du centre, de l'érection et de la variation. Cela posé, on trouve $-0^m,8711$, pour le coëfficient de t^2. Un calcul semblable donne $-2^m,9635$ pour ce coëfficient dans les observations périgées. Les observations nous ont donné $-0^m,96496$ et $-2^m,52748$. La différence tient aux erreurs des observations et des approximations, et sur-tout à ce que, dans les observations précédentes, la lune n'était point exactement, soit à son périgée, soit à son apogée, comme nous l'avons supposé dans le calcul.

XI. Je vais présenter ici quelques réflexions sur l'accroissement de l'action respective des astres par les circonstances locales. Supposons que le port soit situé à la jonction de deux canaux qui lui transmettent le flux qui a lieu à leur embouchure. Soit $A.cos.(2nt-2mt-2\lambda)$ l'expression du flux transmis par le premier canal, et $B.cos.(2nt-2mt-2\lambda')$ le flux transmis par le second; le flux total dans le port sera exprimé par

$$C.\cos.\,(2nt-2mt-2Q),$$

en faisant

$$C=\sqrt{A^2+B^2+2AB.\cos.\,(2\lambda'-2\lambda)};$$

$$\sin.\,2Q=\frac{A.\sin.\,2\lambda+B.\sin.\,2\lambda'}{C}.$$

Les constantes A, B, λ et λ' dépendent de l'intensité du flux aux embouchures des canaux, de la longueur et de la figure de ces canaux. Cependant, toutes choses égales d'ailleurs, A et B, et par conséquent C, sont proportionnels à la masse L de l'astre attirant : car, en doublant cette masse, on ne fait que réunir les deux flux partiels que produit chacune de ses moitiés. λ et λ' relatifs à chacun de ces flux ont également lieu pour le flux total ; ils ne varient donc d'un astre à un autre, qu'à raison de la différence des mouvements propres de ces astres. Ces mouvements étant supposés fort petits par rapport au mouvement de rotation de la terre ; il est naturel de faire $\lambda=(n-m)T$; $\lambda'=(n-m).T'$, T et T' étant les temps que les flux respectifs emploient à se transmettre des embouchures, au port ; et de supposer, comme nous l'avons fait, l'accroissement de l'action de l'astre, dû aux circonstances locales, proportionnel à m. Mais on voit que cela n'est pas rigoureux, en admettant même le principe de la coexistence des oscillations très-petites, principe qui, vu la grandeur des oscillations de la mer dans le port de Brest, ne leur est pas exactement applicable. Mais il résulte de la précision avec laquelle les formules précédentes représentent les observations, que ces causes d'erreur sont peu considérables.

Des heures et des intervalles des marées.

XII. Pour déterminer les heures et les intervalles des marées, j'ai considéré dans les syzigies que j'ai employées précédemment pour leurs hauteurs, les heures des basses mers du matin et des hautes mers du soir, des premiers et seconds jours qui suivent ceux des syzigies, en doublant toujours les résultats relatifs à la syzigie la plus voisine de l'équinoxe ou du solstice. J'ai fait une somme des heures relatives à chaque année; et en la divisant par huit, nombre des syzigies correspondantes, j'ai obtenu les résultats suivants. Les heures observées ont été comptées en temps vrai; mais il est facile de s'assurer que l'équation du temps disparaît des heures suivantes conclues de l'ensemble des syzigies.

Syzigies des équinoxes.

ANNÉES.	HEURE DU PREMIER JOUR après la syzigie.	ACCROISSEMENT DE L'HEURE au second jour.	PREMIER JOUR.	ACCROISSEMENT.
	BASSE MER.		HAUTE MER.	
1807.	0j,41988;	0j,027214.........	0j,67795;	0j,026693.
1808.	0j,42769;	0j,025608.........	0j,68442;	0j,023785.
1809.	0j,42418;	0j,025304.........	0j,67943;	0j,024523.
1810.	0j,43116;	0j,026997.........	0j,68837;	0j,025781.
1811.	0j,42448;	0j,025347.........	0j,68125;	0j,025000.
1812.	0j,42873;	0j,027691.........	0j,68533;	0j,027604.
1813.	0j,43611;	0j,028559.........	0j,69262;	0j,027344.
1814.	0j,42899;	0j,027170.........	0j,68551;	0j,026476.
	Moyennes de ces valeurs.			
	0j,42765;	0j,026736.........	0j,68438;	0j,025901.

Syzigies des solstices.

ANNÉES.	HEURE DU PREMIER JOUR après la syzigie.	ACCROISSEMENT DE L'HEURE au second jour.	PREMIER JOUR.	ACCROISSEMENT.
	BASSE MER.		HAUTE MER.	
1807.	0j,43255;	0j,026953........	0j,68841;	0j,026736.
1808.	0j,42444;	0j,028342........	0j,68294;	0j,028212.
1809.	0j,42044;	0j,026693........	0j,67769;	0j,028082.
1810.	0j,42930;	0j,028082........	0j,68646;	0j,025694.
1811.	0j,42036;	0j,027908........	0j,67791;	0j,028038.
1812.	0j,42778;	0j,028906........	0j,68620;	0j,027604.
1813.	0j,42813;	0j,028819........	0j,68498;	0j,028472.
1814.	0j,42153;	0j,028906........	0j,67830;	0j,028906.
	Moyennes de ces valeurs.			
	0j,42556;	0j,028076........	0j,68286;	0j,027718.

QUADRATURES.

J'ai considéré pareillement, dans les quadratures que j'ai employées pour les hauteurs, les heures des hautes mers du matin et des basses mers du soir, du premier et du second jour qui suivent la quadrature, en doublant encore les résultats relatifs à la quadrature la plus voisine de l'équinoxe ou du solstice : j'ai fait une somme des heures relatives à chaque année; et, en la divisant par le nombre des quadratures correspondantes, j'ai obtenu les résultats suivants :

Quadratures des équinoxes.

ANNÉES.	HEURE DU PREMIER JOUR après la quadrature.	ACCROISSEMENT DE L'HEURE au second jour.	PREMIER JOUR.	ACCROISSEMENT.
	HAUTE MER.		BASSE MER.	
1807.	$0^{j},38589$;	$0^{j},061675$.	$0^{j},64948$;	$0^{j},063021$.
1808.	$0^{j},39891$;	$0^{j},056250$.	$0^{j},66441$;	$0^{j},054123$.
1809.	$0^{j},39097$;	$0^{j},055035$.	$0^{j},65417$;	$0^{j},057248$.
1810.	$0^{j},40278$;	$0^{j},057118$.	$0^{j},66563$;	$0^{j},057639$.
1811.	$0^{j},39058$;	$0^{j},054080$.	$0^{j},65655$;	$0^{j},053689$.
1812.	$0^{j},38941$;	$0^{j},053038$.	$0^{j},65148$;	$0^{j},054774$.
1813.	$0^{j},40439$;	$0^{j},052432$.	$0^{j},66658$;	$0^{j},053212$.
1814.	$0^{j},39792$;	$0^{j},060156$.	$0^{j},65981$;	$0^{j},063715$.
	Moyennes de ces valeurs.			
	$0^{j},39511$;	$0^{j},056223$.	$0^{j},65851$;	$0^{j},057178$.

Quadratures des solstices.

ANNÉES.	HEURE DU PREMIER JOUR après la quadrature.	ACCROISSEMENT DE L'HEURE au second jour.	PREMIER JOUR.	ACCROISSEMENT.
	HAUTE MER.		BASSE MER.	
1807.	$0^{j},40469$;	$0^{j},050521$.	$0^{j},66806$;	$0^{j},048611$.
1808.	$0^{j},40004$;	$0^{j},047129$.	$0^{j},66693$;	$0^{j},044924$.
1809.	$0^{j},39470$;	$0^{j},045269$.	$0^{j},65816$;	$0^{j},045139$.
1810.	$0^{j},40360$;	$0^{j},048437$.	$0^{j},66641$;	$0^{j},047396$.
1811.	$0^{j},40147$;	$0^{j},044097$.	$0^{j},66220$;	$0^{j},046137$.
1812.	$0^{j},40312$;	$0^{j},049653$.	$0^{j},66545$;	$0^{j},050347$.
1813.	$0^{j},41398$;	$0^{j},047483$.	$0^{j},67596$;	$0^{j},047396$.
1814.	$0^{j},41059$;	$0^{j},051042$.	$0^{j},67352$;	$0^{j},049132$.
	Moyennes de ces valeurs.			
	$0^{j},40402$;	$0^{j},047960$.	$0^{j},66709$;	$0^{j},047385$.

XIII. L'ensemble des observations syzigies donne, en prenant un milieu entre les retards journaliers des hautes et basses mers, $0^j,0271075$ pour le retard journalier moyen. Les observations anciennes m'ont donné dans le liv. IV de la Mécanique céleste, $0^j,027052$, pour ce retard; ce qui s'accorde aussi bien qu'on peut le desirer.

Les observations précédentes donnent $0^j,42660$, pour l'heure de la basse mer du matin du jour qui suit la syzigie. L'heure de la basse mer du matin du jour de la syzigie est donc $0^j,39949$. Dans ces observations, la syzigie a précédé la haute mer du soir, de $0^j,1229$; elle a donc suivi la basse mer du matin, de $0^j,1339$. De-là il est facile de conclure que si la syzigie arrivait au moment de la basse mer du matin, l'heure de cette basse mer ferait $0^j,40312$. Il résulte du n° 35 du liv. IV de la Mécanique céleste, que, par les observations anciennes, cette heure est $0^j,39826$. La différence 486″ me paraît tenir à ce que la méridienne dont on fit usage dans ces observations, n'était point exacte. Elle était d'abord en erreur de 17^j. On corrigea cette erreur; mais il y a lieu de croire qu'on en laissa subsister une partie; ce qui va être confirmé par les observations des quadratures.

L'ensemble des observations précédentes donne $0^j,0521865$ pour le retard journalier des marées quadratures. Les observations anciennes m'avaient donné, pour ce retard, $0^j,052067$; ce qui s'accorde à-très-peu-près. Les observations précédentes donnent $0^j,66280$ pour l'heure de la basse mer du jour qui suit la quadrature; ce qui donne $0^j,61061$ pour l'heure de la basse mer du soir du jour de la quadrature. La haute mer du matin de ce jour a précédé, par le n° 6, la quadrature, de $0^j,20171$; et elle a précédé la basse mer du

soir, de $0^j,25 + \frac{1}{4}.0^j,0521865$. La quadrature a donc précédé la basse mer du soir, de $0^j,06134$. De-là il est facile de conclure que l'heure de cette basse mer serait $0^j,60741$, si elle coïncidait avec la quadrature. Dans les observations anciennes, cette même heure était $0^j,60326$. La différence est 415″, au lieu de 486″, que donnent les observations anciennes. Il n'est donc pas douteux que la différence entre les heures des observations modernes et des observations anciennes tient à l'inexactitude de la méridienne dont on fit usage dans les observations anciennes : car, dans les observations modernes, le temps a été déterminé avec soin par des observations astronomiques.

L'effet des déclinaisons des astres sur les retards journaliers des marées est sensible dans la comparaison de ces retards vers les équinoxes et vers les solstices. En prenant un milieu entre les retards des hautes et des basses mers, le retard moyen a été $0^j,026318$ dans les syzigies précédentes des équinoxes, et $0^j,027897$, dans les syzigies des solstices. Les observations anciennes m'avaient donné $0^j,025503$; $0^j,028600$.

Pour déterminer la probabilité avec laquelle l'influence des déclinaisons est indiquée par les observations modernes, j'ai considéré les retards des hautes et des basses mers, dans les syzigies équinoxiales de chaque année, et je les ai comparées au retard moyen $0^j,026318$. J'ai pris le quarré de chaque différence; ce qui m'a donné seize quarrés dont la somme est ce que nous avons désigné par ε dans le n° 2. La probabilité d'une erreur u du résultat moyen est, par le numéro cité, proportionnelle à

$$c^{\frac{-n.(n+1)}{2\varepsilon}.u^2};$$

n est ici égal à seize. En supposant que u exprime un nombre de minutes décimales ou de milliemes du jour, j'ai trouvé que l'exponentielle précédente devient

$$c^{-5,2493 \cdot u^2}.$$

En considérant de la même manière les retards observés dans les syzigies des solstices, j'ai trouvé la probabilité d'une erreur u' du retard moyen $0^j,027897$, proportionnelle à

$$c^{-9,57814 \cdot u'^2}:$$

de-là j'ai conclu, par la méthode du nº 3, la probabilité que la valeur de u' surpassera u de la différence $1',579$, des deux retards $27',897$ et $26',318$, égale à la fraction $\frac{1}{25498}$; d'où il suit que l'influence des déclinaisons est indiquée par cette différence, avec une probabilité de 25497 contre l'unité.

Cette probabilité, déja fort grande, le devient beaucoup plus par la comparaison des observations des marées des quadratures. En faisant sur les retards de ces marées dans les équinoxes, le même calcul que je viens de présenter sur les retards des marées des syzigies, j'ai trouvé la probabilité d'une erreur de u'' de minutes dans le retard moyen, proportionnelle à

$$c^{-0,67910 \cdot u''^2};$$

et, relativement aux marées quadratures des solstices, j'ai trouvé la probabilité d'une erreur de u''' de minutes, proportionnelle à

$$c^{-1,9593 \cdot u'''^2}.$$

Le retard moyen des marées quadratures équinoxiales est 56',700; et celui des marées quadratures solsticiales, est 47',673. Leur différence est 9',027. J'en conclus qu'il y a plus de 8.10^{18} à parier contre un, que cette différence est l'effet des déclinaisons des astres.

Les observations syzigies précédentes donnent $0^j,68362$ pour l'heure moyenne de la haute mer du soir du jour de la syzigie. Elles donnent $0^j,42660$ pour l'heure moyenne de la basse mer du même jour; en sorte que l'excès de la première sur la seconde est $0^j,25700$. Cet excès doit être égal à un quart de jour, plus un quart du retard journalier des marées syzigies; retard qui, par ce qui précède, est $0^j,0271075$. L'excès dont il s'agit doit donc être $0^j,25678$; ce qui ne diffère que de 22" de l'excès observé. Pareillement, les observations quadratures précédentes donnent $0^j,66280$ pour l'heure moyenne des basses mers du soir du jour de la quadrature, et $0^j,39956$ pour l'heure moyenne des hautes mers du même jour. Cet excès doit être $0^j,25$ plus le quart de $0^j,0521865$, retard moyen journalier des marées quadratures. Il doit donc être $0^j,26305$; ce qui ne diffère que de 19" du retard observé. Les différences 22" et 19" sont dans les limites des erreurs des observations. Leur petitesse prouve que la mer emploie le même temps à monter qu'à descendre. Les observations anciennes m'avaient paru indiquer le temps de l'ascension un peu plus petit que celui de la descente; mais il paraît que cela tient aux erreurs des observations anciennes.

L'heure moyenne de la haute mer du soir qui suit la syzigie, a été, dans les observations précédentes, $0^j,68362$. En lui ajoutant un demi-jour plus un demi-retard journalier des marées syzigies, retard égal à $0^j,0271075$, on aura

$0^j,19717$ pour l'heure de la haute mer du matin du second jour qui suit la syzigie. La haute mer du soir du jour de la syzigie a suivi, dans ces observations, la syzigie de $0^j,1229$; la haute mer du matin du second jour après la syzigie, a donc suivi la syzigie de $0^j,1229 + \frac{3}{2} \cdot 1^j,0271075$, ou de $1^j,66356$. En nommant u, l'intervalle dont le *maximum* des hautes mers suit la syzigie, on aura l'instant de ce *maximum*, en ajoutant à l'heure de la haute mer du matin du second jour après la syzigie, la quantité $(u - 1^j,66356)$. $0^j,0271075$. Cette heure est donc

$$\left(u - 1^j,66356\right) . 0^j,0271075 + 0^j,19717.$$

L'heure de la basse mer du jour qui suit la quadrature a été, dans les observations précédentes, $0^j,66280$. En lui ajoutant $0^j,5 + \frac{1}{2} \cdot 0^j,0521865$, on aura $0^j,18889$ pour l'heure de la basse mer du matin du second jour apres la quadrature. La haute mer du matin du jour de la quadrature a précédé de $0^j,20171$ la quadrature dans les observations précédentes; elle a donc suivi la basse mer du soir de $0^j,06134$. En lui ajoutant $0^j,5 + \frac{3}{2} \cdot 0^j,0521865$, on aura $1^j,63962$ pour le temps dont la quadrature a précédé la basse mer du matin du second jour après la quadrature. Pour avoir l'heure de cette basse mer, lorsqu'elle correspond au *maximum* des basses mers quadratures, il faut lui ajouter

$$\left(u - 1^j,63962\right) \cdot 0^j,0521865\,;$$

on a donc cette heure égale à

$$\left(u - 1^j,63962\right) \cdot 0^j,0521865 + 0^j,18889.$$

A cette heure, la marée solaire est à son *maximum*, comme dans le *maximum* des hautes mers syzigies : les deux heures du *maximum* des basses mers quadratures, et du *maximum* des hautes mers syzigies doivent donc être égales ; ce qui donne

$$\left(u - 1^{j},66356\right) \cdot 0,0271075 + 0^{j},19717$$
$$= \left(u - 1^{j},63962\right) \cdot 0,0521865 + 0^{j}18889 ;$$

d'où l'on tire

$$u = 1^{j},94466.$$

Les hauteurs des marées nous ont donné, dans le n° 7, $u = 1^{j},5458$. La différence me paraît trop considérable pour être attribuée aux seules erreurs des observations ; elle indique une anticipation dans l'heure des marées quadratures, relativement à celle des marées syzigies. En supposant cette anticipation de 10′ ; les deux valeurs de u, déduites des heures et des hauteurs des marées, seraient, à-fort-peu-près, les mêmes. Les marées anciennes m'avaient donné cette anticipation, égale à $8' \frac{1}{2}$ dans le n° 39 du liv. IV de la Mécanique céleste. Je l'attribuais aux légers écarts de la supposition, que les deux flux partiels solaire et lunaire se superposent l'un à l'autre, comme ils se disposeraient séparément sur la surface du niveau de la mer. Je ne vois encore maintenant aucune autre cause de cette anticipation.

XIV. Je vais maintenant comparer les résultats précédents, à la théorie. Pour cela, je reprends l'expression de la hauteur des marées, que j'ai donnée dans le n° 8 :

$$\left.\begin{array}{l} A.\frac{L}{r^3}.\ cos.^4\frac{1}{2}\epsilon.cos.(2nt-2mt-2\lambda) \\ \qquad\qquad +\frac{1}{2}B.\frac{L}{r^3}.\ sin.^2\epsilon.cos.(2nt-2\gamma) \\ +A'.\frac{L'}{r'^3}.\ cos.^4\frac{1}{2}\epsilon'.cos.(2nt-2m't-2\lambda') \\ \qquad\qquad +\frac{1}{2}B.\frac{L'}{r'^3}.\ sin.^2\epsilon'.\ cos.(2nt-2\gamma') \end{array}\right\}. \quad (o)$$

Dans les plus hautes marées syzigies ou quadratures des équinoxes ou des solstices, les cosinus de cette expression sont à-peu-près égaux à ± 1. Je suppose que T soit le temps de la plus haute marée syzigie équinoxiale, et que $1^{jour}+T+Q$ soit le temps de la plus haute marée du jour suivant, en sorte que Q soit le retard journalier de la marée syzigie équinoxiale. La différentielle de la fonction (o) prise par rapport au temps t, étant nulle au moment de la haute mer; si l'on différencie cette fonction, en y faisant d'abord $t=T$, et ensuite $t=1^{jour}+T+Q$; si l'on observe ensuite que $(n-m).1^{jour}=2\pi$, 2π étant la circonférence dont le rayon est l'unité, on aura, par l'ensemble des marées,

$$Q=\frac{\left((n-m').(m'-m).a'-nmb'\right).1^{jour}}{(n-m)^2.a+(n-m')^2.a'+n^2b'};$$

a, a' et b' étant ce que nous avons désigné par ces lettres dans le n° 8, et se rapportant à l'ensemble des marées syzigies équinoxiales. Nous avons donné dans le n° 9, le moyen de les obtenir numériquement. Pour réduire plus facilement en nombres la formule précédente, je lui donne cette forme très-approchée,

$$Q=\left(\frac{m'-m}{n-m}\right)\cdot\frac{a'}{2ia}+\left(\left(\frac{m'-m}{n-m}\right)\cdot\frac{a'}{2ia}\right)^2\cdot\frac{(2a'-2ia)}{a'}. \quad (f)$$

On a dans les syzigies,

$$Q = 292^{m},313;$$

et en ayant égard à la variation,

$$\frac{m'-m}{n-m} = 0,033863.$$

Dans les syzigies des équinoxes,

$$2i\alpha = 411^{m},350;$$

ce qui donne

$$Q = 0^{j},024924.$$

Les observations nous ont donné

$$Q = 0^{j},026318.$$

Mais cette dernière valeur de Q est exprimée en temps vrai, et, dans les équinoxes, le jour moyen surpasse le jour vrai, de $0^{j},000218$; ce qui réduit la valeur observée de Q à $0^{j},026100$. La différence $0^{j},001176$ est dans les limites des erreurs, soit des observations, soit des suppositions sur lesquelles le calcul est fondé.

Dans les syzigies des solstices, b' est négatif, et l'on a

$$2i\alpha = 367^{m},468;$$

ce qui donne

$$Q = 0^{j},028063.$$

Les observations donnent, en temps vrai,

$$Q = 0^{j},027897;$$

mais, dans les solstices, le jour vrai surpasse le jour moyen d'environ $0^{j},000238$; ce qui donne $0^{j},028135$ pour cette valeur de Q réduite en temps moyen. L'excès de la valeur calculée n'est que $0^{j},000072$; ce qui est insensible.

II.

Dans les quadratures,

$$a' = 279^{m},535;$$

dans les quadratures des équinoxes

$$2i\alpha = 160^{m},850;$$

ce qui donne

$$Q = 0^{j},062300.$$

Les observations réduites en temps moyen, donnent

$$Q = 0^{j},056462.$$

La différence $0^{j},005838$ est dans les limites des erreurs des observations et des suppositions du calcul; ce que l'on verra si l'on considère que, par le nº 12, le poids de Q, ou le coëfficient du quarré de ses erreurs possibles, pris négativement dans l'exponentielle qui représente leur probabilité, est très-petit.

Dans les quadratures des solstices,

$$2i\alpha = 202^{m},948;$$

ce qui donne

$$Q = 0^{j},048815.$$

Les observations réduites au temps moyen donnent

$$Q = 0^{j},047911.$$

La différence $0^{j},000904$, est dans les limites des erreurs des observations.

XV. Considérons maintenant les variations des intervalles des marées, dues aux variations de la parallaxe lunaire. Pour cela, j'ai pris les heures des basses mers du matin et des hautes mers du soir, des jours des syzigies pé-

rigées du n° 10, et je les ai retranchées des heures correspondantes des troisièmes jours qui suivent ces syzigies. J'ai fait une somme de toutes ces différences, et je l'ai divisée par 72 : car il y a douze syzigies, et chaque syzigie produit trois retards journaliers relatifs aux basses mers, et trois semblables retards relatifs aux hautes mers. J'ai trouvé ainsi $0^j,0305744$ pour les retards journaliers des marées syzigies périgées. Un calcul semblable fait sur les marées syzigies apogées du même numéro, m'a donné $0^j,0227331$, pour le retard journalier correspondant des mêmes marées. On voit donc que ce retard augmente et diminue avec la parallaxe lunaire. Le demi-diamètre moyen apparent de la lune était $3094'',65$ dans les syzigies périgées, et $2734'',57$ dans les syzigies apogées. Ainsi l'accroissement du retard journalier dû à une minute d'accroissement dans le demi-diamètre lunaire apparent a été $217'',76$. Les observations anciennes m'avaient donné $258''$ pour cet accroissement; mais elles se rapportaient à des syzigies, tant équinoxiales que solsticiales. Il faut donc, pour ramener l'accroissement observé $217'',76$, à l'accroissement moyen, le diviser par le quarré du cosinus de l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'équateur dans les observations précédentes; ce qui donne $231'',77$ pour cet accroissement. En le fixant par un milieu à $245''$, on sera fort près de la vérité.

Je trouve dans les syzigies apogées précédentes,

$$a' = 45^m,658.$$

En ayant égard aux arguments de la variation, de l'évection, et à l'équation du centre, je trouve

$$\frac{m'-m}{n-m} = 0,029569.$$

On a, de plus,

$$2i\alpha = 65^{m},982.$$

La formule (f) donne ainsi

$$Q = 0^{j},020590.$$

Les observations donnent

$$Q = 0^{j},022731.$$

La différence $2',143$ est dans les limites des erreurs, soit des observations, soit des suppositions employées dans le calcul.

Dans les syzigies périgées précédentes, je trouve

$$a' = 66^{m},405;\quad \frac{m'-m}{n-m} = 0,039493;$$

on a, de plus,

$$2i\alpha = 88^{m},497.$$

La formule (f) donne ainsi

$$Q = 0^{j},029983.$$

Les observations donnent

$$Q = 0^{j},0305744.$$

La différence est presque insensible.

XVI. L'expression de Q, donnée dans le n° 11, peut servir à déterminer le rapport des actions de la lune et du soleil sur la mer, soit par les retards journaliers des marées syzigies, soit par ceux des marées quadratures. Elle donne, à très-peu-près,

$$Q.\left(a+a'+b'-2\frac{(m'-m)}{n-m}\cdot a'+\frac{2m}{n-m}\cdot b'\right)$$
$$=\left(\frac{m'-m}{n-m}\cdot a'-\frac{m.b'}{n-m}\right)\cdot 1^{j}.\left(1-\frac{(m'-m)}{n-m}\right).$$

Si l'on nomme Q' ce que devient Q dans les syzigies solsticiales, cette équation subsistera en y changeant Q en Q' et en y faisant b' négatif; ce qui donne

$$Q'.\left(a+a'-b'-\frac{2.(m'-m)}{n-m}.a'-\frac{2mb'}{n-m}\right)$$
$$=\left(\frac{m'-m}{n-m}.a'+\frac{mb'}{n-m}\right).\ 1^{i}.\left(1-\frac{(m'-m)}{n-m}\right).$$

En réunissant ces deux équations, et négligeant le terme $\frac{mb'}{n-m}.(Q'-Q)$, à raison de la petitesse de m, b' et $Q'-Q$, on aura

$$(Q+Q').\left(a+a'-\frac{2(m'-m)}{n-m}.a'\right)-(Q'-Q)\,b'$$
$$=2.\frac{(m'-m)}{n-m}.a'.\ 1^{i}.\left(1-\frac{(m'-m)}{n-m}\right).$$

Nommons R la fraction

$$\frac{A'.\frac{L'}{r'^3}}{A.\frac{L}{r^3}},$$

ou le rapport des actions lunaires et solaires sur l'Océan dans les syzigies; l'équation précédente donnera par le n° 8, en négligeant les termes de l'ordre $(Q'-Q).b'.\frac{A'-B}{A'}$,

$$(Q+Q').\left(\frac{p+q}{2}+\frac{(p'+q')}{2}.R.\left(1-\frac{2(m'-m)}{n-m}\right)\right)$$
$$-(Q'-Q).\left(\frac{(p-q)}{2}\right)+\frac{(p'-q')}{2}.R\Big)$$
$$=\frac{(m'-m)}{n-m}.\left(1-\frac{(m'-m)}{n-m}\right).(p'+q').\ 1^{i}.R;$$

d'où l'on tire

$$R=\frac{(Q+Q').\frac{(p+q)}{2}-(Q'-Q).\frac{(p-q)}{2}}{\left\{\begin{array}{l}(p'+q').\frac{(m'-m)}{n-m}.\left(1-\frac{(m'-m)}{n-m}\right)1^j\\-(Q+Q').\left(1-\frac{2(m'-m)}{n-m}\right).\frac{(p'+q')}{2}+(Q'-Q).\frac{(p'-q')}{2}\end{array}\right\}}.\quad(z)$$

Pour réduire cette valeur de R à la moyenne distance de la lune à la terre, il faut, par le n° 8, la diviser par 1,022486.

On a, par le numéro précédent, en temps moyen,

$$Q=0^j,026100;$$
$$Q'=0^j,028135.$$

De plus, en ayant égard à l'argument de la variation

$$\frac{m'-m}{n-m}=0,0345239.$$

En employant les valeurs précédentes de p, q, p' et q', on trouve pour la valeur de R, dans les moyennes distances du soleil et de la lune,

$$R=3,17738.$$

On pourra encore déterminer la valeur de R, par les intervalles des marées quadratures, en observant que la formule (z) s'étend à ces marées, pourvu que l'on change les signes du dénominateur, et p, q, p' et q', en $p_{,}$, $q_{,}$, $p'_{,}$, et $q'_{,}$. On a alors

$$R=\frac{(Q+Q').\frac{(p_{,}+q_{,})}{2}+(Q-Q').\frac{(p_{,}-q_{,})}{2}}{\left\{\begin{array}{l}(Q+Q'_{,}).\left(1-2\frac{m'-m}{n-m}\right).\frac{(p'_{,}+q'_{,})}{2}\\+(Q-Q').\frac{(p'_{,}-q'_{,})}{2}-(p'_{,}+q'_{,}).\frac{(m'-m)}{n-m}.\left(1-\frac{(m'-m)}{n-m}\right).1^j\end{array}\right\}};$$

ici l'on a, par le numéro précédent,

$$Q = 0^j{,}056462\,;$$

$$Q' = 0^j{,}047911.$$

En ayant égard à l'argument de la variation, on a

$$\frac{m'-m}{n-m} = 0{,}0331898.$$

De plus, pour réduire la valeur de R, à la moyenne distance de la lune à la terre, il faut diviser la valeur que donne la formule précédente, par 0,977514. On trouve ainsi, par les intervalles des marées quadratures,

$$R = 3{,}11826.$$

Cette valeur diffère peu de la précédente. Leur milieu donne

$$R = 3{,}14782.$$

Les hauteurs des marées donnent, par le n° 7,

$$R = 2{,}88347\,;$$

la moyenne de ces trois valeurs est

$$R = 3{,}05970\,;$$

ce qui coïncide à-fort-peu-près avec la valeur 3, que j'ai trouvée pour R dans le quatrième volume de la Mécanique céleste.

L'ensemble des hauteurs des marées syzigies et quadratures nous a donné, dans le n° 7,

$$2A'.\frac{L'}{r'^3} = 4^m{,}74788.$$

En adoptant la valeur moyenne de R donnée par les inter-

valles des marées, on a

$$2A.\frac{L}{r^3}=1^m,50831.$$

Le second membre de l'équation (5) du n° 7 serait par-là diminué de 16^m environ, et le second membre de l'équation (6) serait augmenté de la même quantité. Il faudrait supposer une erreur de 16^m dans chacun des premiers membres de ces équations, qui sont donnés par les observations. Cette erreur est peu vraisemblable, et il me paraît naturel d'en rejeter au moins une partie, sur l'hypothèse de la coëxistence des oscillations très-petites, hypothèse qui cesse d'avoir lieu quand les oscillations sont considérables.

REMARQUE.

Dans les applications que je viens de faire du calcul des probabilités aux phénomènes des marées, j'ai déterminé la constante que la loi inconnue des erreurs des observations partielles introduit dans ce calcul, par les différences du résultat moyen aux résultats semblables donnés par les observations de chaque année. Le petit nombre des années que j'ai considérées, rend incertaine la valeur de cette constante. On l'obtiendrait plus exactement, en déterminant les résultats semblables, par l'ensemble des observations des deux syzigies correspondantes vers chaque équinoxe, ou vers chaque solstice; ce qui donnerait trois résultats pour chaque année, et par conséquent vingt-quatre résultats pour les huit années. Il faudrait, de plus, corriger les résultats, de l'effet du mouvement des nœuds de l'orbe lunaire, effet donné par les formules précédentes de la théorie. Mais mon objet a été moins d'avoir exactement la probabilité des résultats, que de constater qu'ils indiquent avec une extrême probabilité, l'influence des déclinaisons des astres : les formules de probabilité auxquelles je suis parvenu, remplissent parfaitement cet objet.

MÉMOIRE

Sur les inondations souterraines auxquelles sont exposés périodiquement plusieurs quartiers de Paris ;

Lu à l'Académie royale des Sciences, le 15 juin 1818,

PAR M. GIRARD.

IL s'est manifesté, depuis quelques mois, dans les quartiers septentrionaux de Paris, une crue d'eau souterraine qui a produit l'inondation d'un assez grand nombre de caves, et qui s'est répandue sur la superficie de quelques marais situés au-dessous de l'hôpital Saint-Louis, entre le faubourg du Temple et le faubourg Saint-Martin.

Les opérations auxquelles j'ai eu occasion de me livrer pour établir un systême général de distribution d'eaux publiques, m'ayant conduit à recueillir sur le relief des divers quartiers de Paris des détails importants, sans la connaissance desquels il est impossible d'assigner la véritable cause de l'accident dont il s'agit, j'ai pensé qu'il serait utile de donner quelque publicité à ces détails, et d'ajouter ainsi quelque chose à ce que M. Buache a publié dans nos anciens

Mémoires (1) sur la topographie et la constitution physique du sol de cette capitale.

La ville de Paris est couverte au nord par les hauteurs de *Charonne*, de *Mesnil-montant*, de *Bèlleville*, de *Montmartre* et *du Roule;* ces éminences contiguës forment une espèce d'enceinte presque demi-circulaire que la Seine traverse diamétralement. Le terrain compris dans cet espace est un attérissement dans l'étendue duquel la ville s'est accrue par degrés, à partir des bords de la rivière jusqu'au pied des collines dont il vient d'être fait mention.

Antérieurement aux premiers établissements qui se firent sur la rive septentrionale de la Seine, ses bords, exhaussés par des dépôts périodiques d'alluvions, présentaient, ainsi qu'on l'observe par-tout ailleurs dans des localités semblables, une sorte de bourrelet plus élevé que le reste de la plaine; les décombres qui s'accumulèrent dans l'enceinte de la capitale, à mesure qu'elle s'étendit, élevèrent de plus en plus cette digue, et il se forma naturellement entre elle, et les collines de *Charonne*, de *Belleville*, de *Montmartre* et *du Roule*, un bas-fond assez prononcé, parallèle à la direction de ces collines.

Ce bas-fond recevait les eaux pluviales qui tombaient dans la vallée, et celles qui descendaient des monticules dont elle était entourée. Ces eaux rassemblées entretenaient un ruisseau qui coulait de l'est au sud-ouest, à partir du coteau de *Mesnil-montant* jusqu'au pied de la butte de *Chaillot*, audelà de l'emplacement actuel de la Savonnerie. La direction de ce ruisseau est indiquée sur un plan que j'ai publié en

(1) Mémoires de l'Académie des sciences. An 1741 et 1742.

1812, et qui est destiné à représenter les enceintes successives de Paris, ainsi que le relief du terrain sur lequel cette ville est bâtie. (1)

Nous avons dit que les bords de la Seine s'étant exhaussés de plus en plus, par l'effet naturel des alluvions et des dépôts de décombres, le sol de la ville se trouvait incliné vers le nord. On conserva cette pente générale à la plupart de ses rues, lorsqu'elles furent pavées pour la première fois. Les eaux pluviales qu'elles recevaient furent conduites hors de l'enceinte fortifiée par des arceaux que l'on pratiqua à travers ses murs; elles s'écoulaient ensuite au moyen de rigoles qui débouchaient dans le ruisseau de *Mesnil-montant*, lequel étant ainsi devenu le réceptacle naturel de ces eaux, reçut le nom de *grand égout découvert*, par opposition avec quelques-uns de ceux que l'on avait pratiqués dans la ville et que l'on avait recouverts de voûtes.

Ce grand égout était encore, au commencement du siècle dernier, un simple fossé creusé en pleine terre dans les marais des faubourgs du *Temple*, *Saint-Martin*, *Saint-Denis*, *Montmartre* et *Saint-Honoré* : on le voit indiqué sur les anciens plans de Paris, depuis le plus ancien de tous, qui appartenait à l'abbaye Saint-Victor, et que l'on fait remonter au règne de Charles IX, jusqu'à celui connu sous le nom de plan *Turgot*, parce qu'il fut dressé sous la prévôté de ce magistrat, de 1734 à 1739. Ces plans montrent que l'on traversait cet égout découvert, ou fossé, au moyen de

---

(1) Recherches sur les eaux publiques de Paris, les distributions qui en ont été faites, et les divers projets qui ont été proposés pour en augmenter le volume. (Paris, 1812.)

ponts de maçonnerie qui avaient été construits dans toutes les grandes rues des faubourgs.

Tant que les choses subsistèrent en cet état, le fossé dont il s'agit, creusé de près de deux mètres au-dessous du sol des marais, ne recevait pas seulement les égouts de la ville qui y débouchaient en différents points en coulant du midi au nord; mais il recevait encore les eaux pluviales qui s'y rendaient des hauteurs de *Belleville*, de *Montmartre*, etc., en coulant du nord au midi; ainsi tous les marais qu'il parcourait, quoique inférieurs au sol de Paris, se trouvaient naturellement desséchés, quelle que fût la fréquence des pluies, soit par infiltrations à travers les berges en terre de cet égout, soit au moyen de saignées superficielles que l'on y faisait aboutir au besoin.

Les quartiers du Louvre, de Saint-Honoré et de la butte Saint-Roch, ayant été couverts de nouveaux hôtels pendant la régence, l'on reconnut la nécessité de reculer les limites de la ville; et il parut convenable de les porter au-delà du rempart entre la rue d'Anjou de la Ville-l'Évêque, et le faubourg Montmartre: on accorda quelques priviléges à ceux qui voudraient s'y établir; mais le voisinage du grand égout en aurait éloigné les habitants que l'on voulait y attirer, si on l'avait laissé dans l'état où il se trouvait. On ordonna en conséquence, en 1721, de le recreuser dans toute sa longueur, et de le revêtir de murs; mais ces dispositions restèrent sans exécution jusqu'en 1737, époque à laquelle la ville entreprit ces ouvrages, qui furent terminés en 1740. (1)

(1) Le grand égout suit les rues des Fossés-du-Temple, Neuve-Saint-Nicolas, Neuve-Saint-Jean, des Petites-Ecuries, Richer, de Provence,

Il ne suffisait pas d'avoir redressé le grand égout, d'en avoir pavé le fond, et d'en avoir revêtu les parois de maçonnerie, afin de procurer un écoulement facile aux eaux bourbeuses qu'il recevait ; il convenait encore de le nettoyer par des lavages fréquents : c'est à ce dessein que l'on établit à son origine, vis-à-vis la rue des Filles-du-Calvaire, un vaste réservoir qui pouvait contenir environ vingt-deux mille muids d'eau; outre le produit entier des sources de Belleville que l'on y avait conduites. Il recevait encore les eaux que l'on tirait de deux puits creusés dans la même enceinte, et de temps à autre on lâchait ces eaux dans le grand égout par des bondes pratiquées convenablement au fond de ce réservoir. Ces lavages fréquemment répétés produisirent d'heureux résultats dont les mémoires du temps font mention. Bientôt on put s'établir sur les bords de cet ancien cloaque, sans avoir à craindre aucune exhalaison dangereuse. Les quartiers du faubourg Montmartre, de la chaussée d'Antin, de la Ville-l'Évêque, et du faubourg Saint-Honoré, se peuplèrent; enfin le terrain devint si précieux dans ces différents quartiers, que les propriétaires riverains du grand égout demandèrent et obtinrent la permission de le couvrir d'une voûte construite à leurs frais. Mais, comme après l'exécution de cette voûte les inconvénients attachés à la stagnation des immondices cessèrent d'être apparents, on se persuada qu'ils n'existaient plus ; et l'on cessa d'employer au

---

Saint-Nicolas ; il traverse ensuite des propriétés particulières dans le quartier de la Ville-l'Evêque ; de là il suit la rue d'Angoulême, traverse l'avenue de Neuilly, et vient se jeter dans la Seine, sous le quai de Billy à Chaillot.

lavage du grand égout les eaux qui avaient été rassemblées, à cet effet; dans le réservoir établi à son origine.

Nous avons rappelé cet établissement dû sur-tout à la prévoyance de M. Turgot; parce que c'est aux améliorations que la salubrité publique en retira, qu'on doit attribuer la nouvelle extension que prit la ville de Paris, vers la fin du siècle dernier, dans les terrains de la Grange-Batelière, des Porcherons, de la Ville-l'Évêque et du Roule; extension par suite de laquelle les anciens marais de ces quartiers se sont transformés en jardins d'agrément, dont la plupart ont été exhaussés par des terres rapportées, pour les mettre à-peu-près de niveau avec les rües adjacentes, car ces rues forment toutes, comme on sait, des chaussées plus ou moins élevées au-dessus du sol naturel de la plaine.

Ce que nous venons de rapporter des divers changements faits au grand égout, suffit pour rendre facile à concevoir ce qui dut arriver, et ce qui arriva en effet, lorsqu'à une simple tranchée creusée jusques alors en pleine terre et dans laquelle s'étaient rendues les eaux pluviales qui descendaient des hauteurs voisines de Paris, on eut substitué un aquéduc voûté, en saillie de plusieurs mètres au-dessus du terrain. Ces eaux, lorsqu'elles tombaient abondamment, devaient être arrêtées par cette espèce de digue, et demeurer stagnantes sur le sol pendant un temps plus ou moins long, jusqu'à ce qu'elles se perdissent par une infiltration lente, ou qu'elles se dissipassent par l'évaporation.

Les rues nouvelles dont ces marais furent entrecoupés, ajoutèrent, par leur élévation au-dessus du terrain, de nouveaux obstacles au libre écoulement des eaux pluviales, et divisèrent ces marais en plusieurs compartiments qui

auraient été exposés à des submersions périodiques, s'ils n'eussent point été exhaussés par les décharges publiques qui y ont été transportées à mesure que Paris s'est étendu de ce côté; cet accroissement a été si rapide, qu'à l'exception des marais du faubourg Saint-Martin, et de quelques-uns que l'on voit encore le long de la rue de la Pépinière, tout l'espace compris entre la Villette et la butte Montmartre, d'un côté, et les anciens boulevards de l'autre, est aujourd'hui remblayé.

Mais ces remblais n'ont influé ni sur les intempéries des saisons, ni sur la nature du terrain primitif. Il est arrivé seulement que là où ils ont été faits, les eaux de pluies extraordinaires qui descendent des monticules voisins, au lieu de se montrer à découvert à leur pied, sont venues plus lentement, en suivant les couches imperméables qui les arrêtent, exhausser la nappe souterraine par laquelle les puits sont entretenus, et submerger le fond de la plupart des caves, qui sont creusées au-dessous du niveau de cette nappe; et il convient d'observer ici que cet effet doit se manifester non-seulement au nord du grand égout, mais encore dans les quartiers situés entre cet égout et la Seine, attendu que la terre cultivable des marais le long desquels cet égout se prolonge, ne repose point sur des couches de la même nature qui soient perméables au même degré.

Dans les marais de Popincourt, par exemple, dans ceux du quartier Montmartre, de la chaussée d'Antin et du faubourg Saint-Honoré, on trouve au-dessous de la terre végétale, un banc de sable ou de gravier semblable à celui de la Seine; ce banc, dont l'épaisseur est en quelques endroits de plusieurs mètres, s'appuie sur une couche de glaise imper-

méable, ou quelquefois immédiatement sur une couche de marne très-compacte, prolongement incliné de celle qui sert de base aux masses de plâtre de Belleville et de Montmartre.

C'est entre ce banc de gravier et ces couches de glaise ou de marne, que s'établit le niveau de la nappe ordinaire des puits; nappe que les eaux pluviales ne peuvent atteindre qu'après avoir traversé d'abord la couche superficielle de terre végétale, et ensuite les bancs plus ou moins épais de sable ou de gravier que cette terre végétale recouvre. Dans quelques autres parties de marais, et notamment entre les rues des faubourgs du *Temple* et *Saint-Martin*, des deux côtés de la rue *Grange-aux-Belles*, on ne trouve point de bancs de sable sous la terre cultivable, et quoiqu'elle n'ait que cinquante à soixante centimètres d'épaisseur, elle repose immédiatement sur un tuf marneux, tout-à-fait impénétrable à l'eau, de sorte que les eaux sourcillent presque à la surface du sol, pour peu que les pluies aient été abondantes, et qu'elles soient retenues dans cet espace.

La fondation du grand égout n'a donc point été établie sur un terrain homogène dans toute sa longueur : ici cette fondation pénètre un massif de marne; là, et c'est presque par-tout, le dallage de cet égout est établi, comme celui des aquéducs et des galeries de l'intérieur de Paris, sur le banc de sable ou de gravier à travers lequel les eaux sourcillent: il résulte de cette disposition, que les eaux pluviales qui descendent du nord de cette ville dans la vallée de la Seine, peuvent en quelques endroits filtrer à travers ces couches sablonneuses, non-seulement au-dessous des remblais dont la terre végétale a été recouverte dans l'emplacement des nouveaux quartiers, mais encore passer au-dessous des fondations du grand égout, en traversant le banc de gravier

sur lequel il est fondé, et venir entre cet égout et la Seine inonder des caves qui, jusques à l'établissement de cet ouvrage, tel qu'il existe aujourd'hui, semblaient avoir été à l'abri d'un pareil accident.

Voilà les phénomènes naturels dont une connaissance attentive de la topographie de Paris fournirait l'explication, quand même on n'y aurait point été déja conduit par l'observation de plusieurs faits; or il est digne de remarque que l'occasion de recueillir des observations à ce sujet se présenta dès 1740, c'est-à-dire l'année même où l'on acheva de revêtir le grand égout de murs de maçonnerie. Les désastres occasionnés par l'inondation extraordinaire de cette année, ont laissé de longs souvenirs. M. Buache de l'Académie des sciences, et M. Bonami de l'Académie des inscriptions, nous ont transmis les détails de ces désastres (1); ils remarquent tous les deux qu'après l'inondation superficielle des quartiers voisins de la rivière, deux inondations souterraines se manifestèrent successivement dans les caves voisines des quais, et dans des caves qui en étaient fort éloignées. La première de ces inondations fut occasionnée par les eaux de la rivière, qui s'infiltrèrent à travers les terrains qui la bordent à des distances inégales, selon le plus ou moins de perméabilité de ces terrains. On s'en aperçut dans les quartiers Saint-Honoré, Saint-Denis, Saint-Martin, et du Marais, dès la fin de 1740, quinze jours après que la rivière eut commencé à s'enfler. Les caves se vidèrent naturellement à mesure qu'elle baissa; mais quand elle fut des-

(1) Mémoires de l'Académie des sciences, pour 1741; Mémoires de l'Académie des inscriptions, tom. XVII, pag. 675.

cendue à sa hauteur ordinaire, c'est-à-dire vers le commencement d'avril, il y eut une seconde inondation souterraine qui se manifesta d'abord dans les caves les plus éloignées de la rivière. Cette marche des eaux, inverse de celle qui avait suivi la première inondation souterraine, fit conclure à MM. Buache et Bonami, que la seconde submersion des caves était due aux pluies qui avaient précédemmeut abreuvé la terre, et qui en s'écoulant à la Seine, leur réceptacle naturel, remplissaient les diverses cavités qu'elles trouvaient sur leur chemin; fait d'autant moins étonnant, suivant le témoignage de M. Bonami, qu'à la même époque les caves du château de Mesnil-montant se trouvèrent également remplies d'eau, quoique situées sur une haute sommité, par rapport au niveau de Paris.

L'inondation des caves de Paris observée en 1740 se reproduisit avec des circonstances bien plus graves en 1788. Aux mois d'avril et de mai, elles se trouvèrent tellement remplies d'eau en plusieurs quartiers, que tous les habitants s'en plaignirent aux diverses autorités du temps. Les mémoires que l'on présenta au prévôt des marchands, au ministre du département de Paris, au premier président du parlement, furent renvoyés au bureau de la ville (1), qui chargea ses architectes, ainsi que les inspecteurs des bâtiments et des fontaines, d'éclairer son opinion sur les causes de cette calamité et sur les moyens d'y porter remède. M. Perronet, premier ingénieur des ponts-et-chaussées, et

(1) Ces réclamations, et toutes les pièces qui y sont relatives, se retrouvent aujourd'hui, avec les papiers de l'ancien greffe de l'hôtel-de-ville, déposées aux archives du royaume, et à celles de la préfecture de police.

membre de l'Académie des sciences, fut aussi consulté à ce sujet par le prévôt des marchands. Le rapport de ce premier ingénieur, en date du 28 avril 1788, est appuyé d'un procès-verbal constatant que l'inondation souterraine dont on se plaignait s'était étendue, de part et d'autre, du grand égout dans les quartiers *de Popincourt, du Marais, du Temple, Saint-Martin, Saint-Denis, Saint-Honoré,* et *de la chaussée d'Antin*, etc. (1)

Le bureau de la ville, après avoir reçu les divers renseignements qu'il avait provoqués, publia, le 13 juin de la même année, une ordonnance relative à cette inondation, et qui rappelle avec beaucoup de détails les causes diverses auxquelles elle était alors attribuée. (2)

Plusieurs de ceux dont elle avait excité les réclamations, s'appuyant sur une sorte de rumeur publique, prétendaient qu'elle était due à des filtrations d'eau provenant des grands réservoirs de la pompe à feu de Chaillot, lesquels avaient été établis, comme on sait, depuis peu d'années, au sommet

---

(1) Ce procès-verbal, en date du 27 avril 1788, est dressé par M. le Sage, inspecteur de l'école des ponts-et-chaussées; et par MM. Regnard et Feraudy, qui étaient alors élèves de cette école. Il porte que la submersion des caves s'étendait dans les rues de Mesnil-montant, des Gravilliers, Jean-Robert, Saint-Martin, de la Chaussée-d'Antin, Neuve-des-Mathurins, Boudreau, Thiroux, de Provence, Chantereine, Taitbout, d'Artois, Saint-Georges, Saint-Lazare et Coquenard.

(2) Cette ordonnance du bureau de la ville indique que l'inondation souterraine s'étendait dans les quartiers de la chaussée-d'Antin, du faubourg Montmartre, du faubourg Poissonnière, des faubourgs Saint-Denis et Saint-Martin, et dans les rues adjacentes; dans les rues de Nazareth, du Temple, et des Fossés-du-Temple, dans les rues de Richelieu et Montorgueil. Elle indique encore que le niveau de l'eau dans les caves inondées était à-très-peu-près le même que celui des puits voisins.

d'une colline élevée de quarante mètres environ au-dessus des basses eaux de la Seine. Ils prétendaient que ces filtrations avaient lieu obliquement à travers des terres sablonneuses, et qu'elles se répandaient dans les caves des maisons de Paris. D'autres attribuaient la submersion de ces caves à des ruptures de conduites posées dans les rues. Enfin, et beaucoup de personnes se réunissaient à cet avis, on pensait que cette inondation des caves provenait des eaux des monticules et des plateaux élevés dont Paris est couvert du côté du nord.

On savait depuis long-temps que les bassins de Chaillot étaient parfaitement étanches, et l'on se fut bientôt assuré que les caves étaient inondées, dans un grand nombre de rues sous le pavé desquelles il n'y avait jamais eu de conduites posées (1); ces deux causes de l'inondation se trouvant, par ces motifs, écartées de la recherche qu'on avait à faire, il ne restait à examiner que l'opinion de ceux qui attribuaient cet accident à quatorze mois de pluies consécutives, dont le produit, après avoir pénétré jusqu'à la couche imperméable de glaise ou de marne sur laquelle reposent les couches superficielles des montagnes de Mesnil-montant, de Belleville et de Montmartre, filtrait lentement sur la surface

(1) « Dans les rues Grange-aux-Belles, de Lancry, Beaurepaire, du « Bout-du-Monde, Neuve-Saint-Jean, des Marais, Neuve-Saint-Laurent, « du Vert-Bois; Neuve-Saint-Martin, du Pont-aux-Biches, de la Croix, « des Fontaines, Frépillon, Jean-Robert, aux Ours, de la grande Truan- « derie, Grange-Batelière, Saint-Sauveur, de l'Égout-Saint-Martin, « la Pologne, le marché Saint-Martin, il n'y a pas une seule conduite « des tuyaux de Chaillot, et cependant il y a de l'eau dans les caves « de ces rues. » (*Ordonnance du bureau de la ville, du 13 juin 1788, pag.* 10.)

de cette couche imperméable, suivant les inclinaisons variées qu'elle présente, et remplissait successivement les caves qui se trouvaient creusées au-dessous du plan de cette nappe.

M. Perronet, en adoptant cette opinion dans le rapport qui vient d'être cité, en donne pour motif non pas tant l'abondance des pluies, que leur continuité et l'humidité de l'atmosphère qui en fut la suite. Il observe, au surplus, que ce n'était pas seulement à l'intérieur de Paris que ces submersions souterraines s'étaient manifestées; qu'on en était également incommodé dans des campagnes voisines, et notamment près de Champigny, à Draveil, et à Montfermeil, où l'on trouvait l'eau à six pouces seulement au-dessous de la surface du terrain.

Pour apprécier convenablement le degré de confiance que mérite cette explication, il nous reste à comparer à l'année moyenne les deux années qui précédèrent immédiatement 1788, en les considérant sous le rapport de la hauteur d'eau de pluie qui tomba pendant leur durée, et sur-tout sous le rapport de la continuité avec laquelle cette intempérie se manifesta.

Or, suivant l'annuaire du bureau des longitudes, la hauteur d'eau qui tombe année moyenne à Paris est de 53 centimètres (1). Il résulte aussi d'observations faites sur dix années consécutives, que le nombre moyen annuel des jours de pluie est de cent quarante-deux. (2)

---

(1) Annuaire du bureau des longitudes, pour l'année 1816.

(2) Voici le tableau des jours de pluie pendant chacune des dix dernières années:

D'un autre côté, remontant à 1786, je trouve dans le tableau météorologique dressé pour cette année, par M. Cassini, que la hauteur d'eau tombée fut de 64 centimètres, et qu'il y eut cent cinquante-six jours de pluie. (1)

Je trouve également qu'en 1787, la hauteur d'eau tombée fut de 60 centimètres, et le nombre de jours de pluie de cent soixante-huit. (2)

Ainsi il demeure constant que pendant les deux années qui précédèrent l'inondation des caves de 1788, la quantité de pluie qui tomba à Paris fut, à-très-peu-près, d'un cinquième

---

En 1808	132 jours.
1809	140
1810	131
1811	143
1812	133
1813	151
1814	122
1815	141
1816	167
1817	158
Total des jours de pluie pendant dix ans.	1418

(1) Nous comptons ensemble les jours de pluie et les jours de neige.

Le nombre des jours de pluie fut de....	134
Celui des jours de neige fut de..........	22
Total............	156

La hauteur d'eau tombée fut de 23po. 5lig. = 0m.6336.

(*Mémoires de l'Académie des sciences, pour l'année* 1786, pag. 331.)

(2) Le nombre des jours de pluie fut de...........

Le nombre des jours de pluie fut de...........	159
Celui des jours de neige fut de..........	9
Total.	168

La hauteur d'eau tombée fut de 22po. = 0m.5951.

(*Mémoires de l'Académie des sciences pour l'année* 1787, pag. 18.)

plus forte que celle qui y tombe année commune, et que le nombre des jours de pluie surpassa d'un septième ce nombre de jours observé dans les années ordinaires.

Cette surabondance d'eaux pluviales en 1786 et 1787, et les obstacles que diverses constructions, dont nous avons parlé, opposaient au pied des sommités de Belleville, de Montmartre et du Roule, à leur écoulement libre sur la surface du sol, fournissaient, comme on voit, une explication simple de l'écoulement souterrain qu'elles avaient été obligées de prendre; et il ne paraît pas qu'il ait été fait, dans le temps, aucune objection plausible contre cette explication.

Malheureusement, l'expérience d'une génération est presque toujours perdue pour la génération suivante; et, comme il s'est écoulé trente ans depuis l'inondation souterraine de 1788, il n'est point étonnant que ce qui arrive aujourd'hui soit regardé comme une calamité d'une espèce nouvelle. (1)

Si l'on se rappelle, d'ailleurs, que la submersion des caves en 1788 fut attribuée, par un grand nombre de personnes, aux filtrations qui avaient lieu à travers le fond et les parois des réservoirs de la pompe à feu établis depuis quelques années sur la montagne de Chaillot, on ne sera point étonné que l'inondation souterraine qui s'est manifestée dernière-

(1) Les caves des quartiers septentrionaux de Paris furent cependant inondées en 1802. M. Bralle attribue cette submersion souterraine aux eaux qui descendent des buttes de Mesnil-montant, de Belleville et de Montmartre, dans les quartiers du Temple, de Saint-Lazare et de la chaussée d'Antin. (Voyez *le Précis des faits et observations relatifs à l'inondation de* 1802, *imprimé en* 1803, *par ordre de monsieur le préfet de police.*)

ment, soit attribuée aux filtrations du bassin de la Villette. L'étendue de ce bassin, la masse d'eau qu'il contient frappent assez les yeux pour que le public, dont le jugement se fonde quelquefois sur des aperçus superficiels, ne cherche point ailleurs la cause des accidents dont il s'agit. Mais, outre que les inondations souterraines ne sont qu'accidentelles et temporaires (1), tandis que le réservoir de la Villette est constamment entretenu plein d'eau à la même hauteur, et qu'on ne peut raisonnablement attribuer des effets momentanés à une cause permanente, n'est-il pas évident que le retour des mêmes circonstances a pu ramener, cette année, sur les mêmes lieux, les mêmes accidents qu'elles y occasionnèrent en 1788.

Or, si l'on consulte l'histoire météorologique des années

(1) Les marais situés le long de la rue Grange-aux-Belles, entre les faubourgs du Temple et Saint-Martin, ont été inondés en 1817, depuis le mois de mars jusqu'à la fin de juin. Leur inondation a commencé cette année avant le mois de février; entre les deux submersions, ils ont été mis en culture, comme dans les temps ordinaires.

Les plus anciens habitants de ce quartier se rappellent les submersions de ces marais en 1788 et 1802, époques antérieures l'une et l'autre à l'établissement du bassin de la Villette, où les eaux n'ont été mises pour la première fois que le 2 décembre 1808.

Ce qui a contribué sur-tout à la stagnation des eaux dans ces marais, c'est que leur sol est plus bas que celui d'aucun quartier de la ville, et qu'ils reçoivent nécessairement les eaux pluviales des buttes de Montfaucon et de la Villette, ainsi qu'on peut s'en assurer en jetant les yeux sur un plan de nivellement général de Paris. Pour faire écouler ces eaux stagnantes, il n'a fallu qu'ouvrir deux tranchées à travers la rue des Marais, et pratiquer deux percements dans le mur septentrional du grand égout; c'est-à-dire donner à ces eaux le moyen de s'écouler dans cet égout, comme elles s'y écoulaient avant qu'il eût été revêtu de murs de maçonnerie, en suivant la pente naturelle du terrain.

1816 et 1817, on verra que nous nous trouvons aujourd'hui placés, à la suite de ces années, précisément comme on se trouva placé, en 1788, à la suite de deux années extraordinairement pluvieuses.

En effet la hauteur annuelle d'eau de pluie fut, en 1786 et 1787, de 62 centimètres;

Elle a été de 61 centimètres en 1816 et 1817. (1)

Le nombre total des jours de pluie, en 1786, et 1787, fut de 324;

Il a été de 325 pendant les deux dernières années.

Ainsi, quant à la hauteur d'eau tombée, et à la continuité des pluies, on remarque une parité absolue de circonstances entre les deux couples d'années que nous venons de citer; de sorte que, d'après l'expérience du passé, on doit être bien moins étonné de la dernière inondation souterraine, qu'on ne devrait l'être si elle n'avait pas eu lieu. J'ajouterai pour compléter la parité, et la rendre plus sensible, qu'aujourd'hui comme en 1788 les inondations souterraines se montrent dans les mêmes endroits aux environs de Paris, et notamment au village de Montfermeil, qui est situé à plus de 50 mètres au-dessous de la plaine de Bondy, sur la sommité des collines qui séparent le bassin de la Seine de celui de la Marne. (2)

Si l'on considère que les inondations souterraines qui font

(1) *Voyez* les tableaux météorologiques rapportés dans les cahiers du Journal de physique, pour les années 1816 et 1817.

(2) Je tiens de notre confrère M. Bosc, que, dans la commune de Rosny, dont le territoire est de beaucoup supérieur à la plaine de la Villette, les caves ont aussi été submergées dernièrement, et que l'eau se trouve presque à la surface de la terre.

l'objet de ce mémoire ont eu lieu à trente ans d'intervalle, et qu'elles ont été le résultat nécessaire de circonstances absolument semblables, on en conclura que cet accident doit être assez rare : car il ne dépend pas seulement de l'abondance des pluies, mais il dépend encore de leur continuité. Il faut, pour qu'il se manifeste, que la terre soit profondément imbibée, et que l'évaporation à sa surface ait été moindre qu'elle n'est ordinairement. Il semble donc que le retour de submersions semblables ne pourrait être prévu quelque temps d'avance, qu'autant qu'on ajouterait aux observations que l'on recueille sur la quantité de pluie qui tombe annuellement, des observations analogues sur la hauteur de l'évaporation journalière à la surface du sol. La quantité d'eau de pluie qui échappe à l'évaporation est en effet la seule qui puisse servir à l'entretien des nappes souterraines, et produire ainsi des submersions accidentelles. Ce qui est certain, d'après les observations que nous venons de rapporter, c'est que, par l'effet des obstacles qu'on a successivement opposés au libre écoulement des eaux pluviales dans les quartiers septentrionaux de Paris, et sur-tout par l'élévation des murs du grand égout au-dessus du sol de la vallée, toutes les fois que la hauteur d'eau tombée dans l'espace de deux années consécutives se sera élevée au-dessus de 120 centimètres, et que le nombre de jours de pluie aura été, dans le même intervalle, de plus de 320, les quartiers de Paris situés sur la rive droite de la Seine seront menacés, pour l'année suivante, d'une inondation souterraine.

DESCRIPTION

D'une aggrégation de pierres observée dans la Caroline du Nord, Etats-Unis d'Amérique, et connue dans le pays sous la dénomination de mur naturel *(natural wall).*

Par M. de BEAUVOIS.

Lu à l'Académie royale des Sciences, le 6 avril 1818.

Le territoire des États-Unis d'Amérique renferme, comme on sait, soit à l'extérieur, soit dans son sein, un grand nombre de productions naturelles plus curieuses et plus intéressantes les unes que les autres. Il suffit de consulter les ouvrages des nombreux voyageurs et des savants qui ont exploré cette riche et fertile contrée, pour se convaincre de cette vérité. Outre la description des nombreux végétaux et animaux propres au sol et au climat de cette partie du nouveau continent, on y trouve celle de cascades, chutes d'eau, d'un pont naturel, de précipices, de cavernes dans lesquelles reposent depuis un temps plus ou moins long des ossements d'animaux dont les individus vivants, du moins quelques-uns, ne sont pas encore connus, et d'une infinité d'autres objets curieux qui donnent à penser aux naturalistes. Mais tous les faits curieux que peut offrir ce vaste pays n'ont pas encore été découverts,

plusieurs même déja connus ont été incomplètement observés et étudiés. On ne saurait donc trop les signaler aux connaisseurs et aux savants, afin d'obtenir des renseignements plus circonstanciés, plus exacts, et propres à fixer l'opinion et lever les doutes qu'un premier aperçu a pu faire naître. Telle est entre autres une aggrégation régulière et symétrique de roches uniformes dans un lieu isolé de la Caroline du Nord et dont l'origine ainsi que la nature ont donné lieu à des opinions très-diverses. A l'époque où j'eus occasion de visiter cette curiosité, elle n'était connue que des habitants voisins du lieu de son gisement, elle l'est même encore très-peu aujourd'hui du reste des États-Unis et du monde savant. C'est de ce phénomène que je vais avoir l'honneur d'entretenir l'Académie.

En l'année 1796, au retour d'un voyage, parmi deux nations indiennes (les Creeks et les Chérokées), après avoir repassé les Apalaches, je suivis dans sa longueur une partie du haut pays de la Caroline du Nord, pour me rendre en Virginie et de là dans la Pensylvanie. Arrivé à Salisbury, chef-lieu du comté de Rowan, district de Salisbury, à quelque distance de la rivière Catabaw, que j'avais été obligé de traverser deux fois, je m'arrêtai chez M. Wm Sharp, ancien avocat, homme qui me parut instruit, et même plus qu'à cette époque on avait coutume d'en rencontrer dans des cantons aussi éloignés des bords de la mer. Dans l'énumération que M. Sharp me fit des diverses curiosités du pays qu'il avait choisi pour sa retraite, il me cita entre autres celle que les habitants du pays nomment *mur naturel* et situé à 25 ou 30 milles de son habitation. La description qu'il m'en fit, l'espèce d'enthousiasme qu'il mit dans son ton

et dans ses expressions, m'inspirèrent le plus vif desir de visiter ce phénomène. Je reçus de lui les renseignements nécessaires; il me donna même des lettres de recommandation pour les propriétaires des habitations que je devais rencontrer sur ma route. Je saisirai cette occasion de rappeler un fait déja connu, mais qui ne saurait être trop répété. Partout dans les États-Unis d'Amérique on reçoit l'hospitalité la plus franche et la plus amicale. Dans les lieux écartés des bords de la mer on ne rencontre pas d'auberge; mais de distance en distance on trouve des habitations où sont admis, moyennant une rétribution assez légère, les voyageurs et les étrangers. Les propriétaires de ces habitations sont, pour l'ordinaire, des colonels, des majors, des capitaines de la milice nationale, et dont les plus anciens, à l'époque de mes voyages, avaient servi glorieusement dans la guerre de l'indépendance.

Muni des renseignements et des lettres de M. Sharp, je pris congé de lui et m'acheminai vers le *mur naturel*. Mais soit que mon itinéraire eût été mal tracé, soit plutôt que je me sois écarté de la vraie route, je m'égarai parmi des chemins mal percés au milieu des bois, tortueux et de difficile accès. Je n'arrivai que le lendemain chez M. Parson auquel j'étais adressé. Il était absent, mais sa femme le suppléa en me procurant un guide pour me conduire directement au lieu de ma destination.

Avant de décrire la curiosité qui fait l'objet de ce mémoire, il me paraît convenable de donner un aperçu de la localité, et de faire remarquer que les pierres de ce prétendu mur ont tout-à-fait l'apparence de basaltes, si elles n'en sont pas de véritables, et qu'aucun des nombreux voyageurs qui ont par-

couru, à différentes époques, le territoire des États-Unis d'Amérique, n'a rencontré le plus léger indice, ni la plus petite trace d'un volcan.

Le terrain entre la mer et les montagnes des Apalaches est dans une assez grande profondeur très-bas, uni, extrêmement marécageux et mal-sain. Il y croît des graminées, des cyperées, des joncs en abondance, et généralement toutes les plantes qu'on rencontre ordinairement sur un semblable sol. Un de ces marécages, voisin de la ville de Wilmenton, capitale de l'état, est renommé par la présence d'une plante, appelée par les botanistes *Dionœa muscipula*, ou *attrape-mouche*. Elle y est abondante, et paraît s'y trouver exclusivement. Je ne sache pas du moins qu'on l'ait rencontrée ailleurs, et moi-même je l'ai vainement cherchée dans les endroits bourbeux et marécageux de la Géorgie, de la Caroline du Sud et de la Virginie. La *Dionœa muscipula*, qualifiée par Linné de *miraculum naturæ*, a été surnommée *attrape-mouche*, à cause de la singularité de ses feuilles bordées de longs cils ou poils; à l'approche d'un corps étranger, elles se contractent, se plient et se serrent de manière que, lors-lorsqu'un insecte vient s'y reposer, il est saisi à l'instant, sans pouvoir se dégager, et trouve la mort et son tombeau dans le lieu même où il espérait recueillir un suc pour la conservation du peu de jours qui lui restaient à vivre.

On conçoit aisément que, dans un pareil sol, on ne doit rencontrer que très-peu ou point de pierres. Mais à mesure qu'on approche des montagnes, le terrain prend un autre aspect. Jedidiah Morse et Joseph Scott parlent d'un banc de pierres à chaux (je me sers de leur expression) à la distance de 50 ou 60 milles de la mer. Ce banc court parallèlement

à la mer, et se prolonge jusque dans la Caroline du Sud, dans la même direction. Ensuite le pays abonde en mines de fer dont plusieurs sont exploitées. Enfin le district de Salisbury, et principalement le comté de Rowan, où gît l'amas de pierres en question, devient plus inégal, montueux et entièrement sablonneux.

L'amas de pierres, ou *mur naturel*, est placé dans un monticule, au pied duquel coule un petit ruisseau, entretenu constamment par les eaux qui suintent de ce monticule et des terres avoisinantes; dans les temps ordinaires il n'y a pas plus de 2 à 3 pouces d'eau, il ne devient très-gros que dans le temps des pluies abondantes. Ce *mur naturel* a une direction nord et sud; il paraît avoir une de ses extrémités, qui était déja dégradée à l'époque où je le visitai, sur le revers du monticule. Les pierres dont il est formé ne sont point égales en longueur ni en épaisseur. On en trouve depuis 0,1083 jusqu'à 0,3248$^{\text{mill.}}$ (environ 4 à 12 pouces) de long; mais la forme est à-peu-près égale dans toutes. Cette forme est alongée, a quatre angles ou arêtes, amincies à l'une des extrémités, et une petite entaille au-dessous du sommet; ainsi qu'on peut s'en assurer sur les deux échantillons qui sont sous les yeux de l'Académie avec le dessin que j'ai pris, sur les lieux, de l'ensemble. Les pierres sont rangées horizontalement. La masse a une épaisseur de 4 à 4 décim. $\frac{1}{2}$ (18 à 20 pouces anglais); à l'endroit dégradé elle se trouvait découverte à la hauteur d'environ 2 mètres (6 pieds) et recouverte par la superficie d'environ moitié. Cette superficie, ainsi que le sol de chaque côté du *mur* est un sable très-fin, entremêlé de petites pierres de quartz plus grosses, et de nombreuses petites parcelles de mica argenté. D'après les renseignements

que j'ai pris sur les lieux, il paraît que le sol est le même à plusieurs milles de distance. Chacune de ces pierres est revêtue d'une couche de terre sablonneuse, jaune, ocracée et adhérente; l'intervalle qui les sépare est occupé par une substance grasse, assez semblable, quand elle est fraîche, au ciment des vitriers. Mais ce ciment est mélangé de taches irrégulières, noires et ferrugineuses. La même substance recouvre les deux côtés du mur, comme si on l'en avait crépi. Mais ce qu'il y a de remarquable, ce ciment du côté ouest est comme marbré et chargé des mêmes taches noires qui manquent entièrement au côté opposé. On ne peut se le dissimuler, toutes ces circonstances donnent à cet amas de pierres l'apparence d'un mur construit par la main et l'industrie des hommes. Mais d'autres motifs qui me paraissent plus puissants, et que les bornes de ce mémoire ne me permettent pas de discuter, me semblent suffisantes pour faire rejeter cette opinion.

Tel était l'état et la situation de ce phénomène curieux à l'époque de 1796. Depuis ce temps il a été visité par plusieurs naturalistes, entre autres par MM. Zéchariah Lewis, M'Korkle, Hall et Newman. Les travaux qu'ils ont faits, leurs recherches et leurs observations se trouvent consignés dans le quatrième vol. du Recueil médical de New-York pour l'année 1801, et rédigé par MM. Samuel Mitchil et Edward Miller; ce dernier y a joint ses propres réflexions, dont nous ferons mention.

D'après ces travaux et ces recherches, le mur, que l'on ne désigne plus sous le nom de *mur naturel,* mais sous celui de *mur souterrain*, a été sondé. On l'a suivi dans une longueur d'environ 100 mètres (300 pieds anglais). Le sol a été creusé à la profondeur de 4 mètres (12-14 pieds, même mesure),

sans pouvoir aller plus avant à cause des eaux. Les autres détails sont à-peu-près les mêmes que ceux dont il a été fait mention plus haut. Mais les observations de MM. M'Korkle, Hall et Newman ne sont pas toujours d'accord avec les miennes. Suivant eux, par exemple, ces roches ne sont point uniformes; les unes sont quarrées, d'autres approchent de la forme d'un parallélogramme, d'un triangle, ou rhomboïdales. Celles-ci ont la même figure et la même dimension dans toute leur longueur, celles-là sont plus étroites et amincies à une extrémité. Parmi ces roches, au nombre de plus de 100, que j'ai examinées, j'en ai effectivement rencontré de plus petites que les autres; mais toutes m'ont paru égales quant à la forme, et semblables à celle que l'Académie a sous les yeux, c'est-à-dire quadrangulaires, à surfaces inégales, toujours amincies plus ou moins à l'une des extrémités; et ce qu'il y a de remarquable, et paraît avoir échappé à MM. M'Korkle, Hall et Newman, on voit constamment dans cette dernière partie une entaille plus ou moins prononcée.

Cet amas de pierres symétriquement arrangées, d'une grosseur et d'une longueur à-peu-près égales, ayant comme une espèce de ciment interposé, est, sans contredit, un phénomène aussi curieux qu'il est difficile à expliquer. On ne doit donc pas s'étonner qu'il ait donné matière à réflexion et fait naître des opinions diverses, tant sur son origine et sa formation, que sur la nature des roches dont il est composé (1). Quelques-uns veulent que ce mur soit de formation très-ancienne et produit par la main et l'industrie des hommes:

(1) *Voyez* le quatrième volume du Recueil médical de New-York, pag. 227 et suiv.

c'était, suivant eux, un mur de défense, élevé par une nation *antédiluvienne éclairée,* dans un temps où les flèches et les arcs étaient les seules armes usitées dans les guerres; ils pensent que s'il se trouve aujourd'hui comblé et recouvert par le sol, c'est que, depuis l'époque de sa construction, la surface du terrain a éprouvé de grands changements, occasionnés par les pluies répétées et abondantes, et même, ce qui serait possible, par le déluge général.

On n'est pas plus d'accord sur la nature des roches qui composent ce mur, que sur sa formation. Elles ont été examinées par des chimistes dans les États-Unis. Ils ont reconnu dans ces roches tous les caractères du basalte. Les personnes qui veulent que ce mur soit artificiel, contredisent cette opinion, qui contrarierait entièrement leur système.

Dans cet état de choses, et cette partie de l'histoire naturelle étant étrangère, en quelque sorte, à mes occupations ordinaires, j'ai cru devoir les faire examiner de nouveau. Elles ont été soumises à l'examen de MM. Sage, Brongniart, Brochant-de-Villiers et Gilet-Laumont. Ces savants sont d'accord pour trouver dans ces pierres, comme les chimistes des États-Unis, tous les caractères du basalte. Mais comment de tels amas de pierres, (car on voit dans le Recueil médical cité ci-dessus, qu'à la distance de 6 ou 8 milles du premier mur, il en a été découvert un autre pareil de 4 pieds de long, sur quatre ou cinq de hauteur, mais dont l'épaisseur également uniforme, est beaucoup moindre, et seulement de 7 pouces;) mais comment, disons-nous, des amas de basaltes peuvent-ils se rencontrer sur des points isolés, dans une contrée où l'on ne trouve aucun vestige de volcan?

Ce fait, très-curieux en lui-même, et qui, comme le dit

M. Miller, doit donner lieu à de grandes recherches, et à de profondes discussions dans les siècles à venir, offre, par les circonstances qui l'accompagnent, de nouvelles raisons de douter, tant sur les causes de son origine, que sur la nature des roches. Il peut également servir d'autorité aux diverses opinions déja manifestéès, et qui ont été si savamment présentées par M. Cuvier dans ses éloges comparatifs de MM. Werner et Desmarets. Il ne nous appartient pas de prendre part à la diversité des opinions des Vulcaniens et des Neptuniens, quelque favorable que puisse paraître au système de ces derniers le fait en question. Mais nous croyons pouvoir émettre notre opinion sur l'origine de cette aggrégation de roches. Il nous paraît improbable et impossible, quelle que soit la régularité dans leur symétrie, que ces pierres, ainsi amoncelées, soient le produit des mains et de l'industrie des hommes. Nous disons même que nous le croyons évidemment naturel. Il n'en est pas de même de la nature de ces mêmes roches, sur laquelle il ne nous appartient pas de prononcer; nous nous bornerons donc à rester dans le doute avec M. Brochant-de-Villiers dont il me reste à présenter l'opinion.

« Les échantillons prismatiques, dit ce savant, trouvés à « Salisbury, en un amas rectangulaire de quelques pieds « d'épaisseur, empâté dans un grès, ont dans leur intérieur, « et en partie dans leur décomposition extérieure, beaucoup « du caractère du basalte. C'est la même couleur, la même « cassure, et à la coupe les mêmes points éclatants. La forme « prismatique, quoique bien peu volumineuse, sert encore « à appuyer ce rapprochement, et l'essai au chalumeau a « donné les mêmes résultats que plusieurs basaltes de l'Au-

« vergne. On en a obtenu un émail noir sur les bords du « fragment, sans mélange de points blancs. On doit ajouter « que cette substance attire l'aiguille aimantée.

« Mais on sait en général combien les minéralogistes ont « eu de discussions sur les basaltes; combien ils ont été et « sont encore partagés sur la manière de juger différentes « roches de ce genre, que les uns appellent basaltes, tandis « que d'autres leur refusent ce nom. Cette différence d'opi- « nions provient de ce que des roches, tout-à-fait semblables « aux basaltes, qui ont évidemment une origine moderne, « existent dans des terrains anciens; et comme cette origine « des vrais balsates est attribuée aujourd'hui, presque géné- « ralement, à l'action des feux volcaniques, on sent que la « décision que l'on porte, en assimilant une substance aux « basaltes, entraîne avec elle l'idée de cette origine volca- « nique.

« Parmi les questions de ce genre, celles sur lesquelles il « n'existe plus aucun doute, n'ont pu être résolues que par « l'observation de toutes les circonstances accompagnantes, et « il doit en être de même de celles-ci.

« Or les indications géologiques que l'on a sur cette roche « de Salisbury, sont beaucoup trop restreintes pour qu'on « puisse prononcer affirmativement, et on est d'autant plus « forcé de se maintenir dans le doute, que les minéralogistes « américains, déja assez nombreux, ont parcouru toutes leurs « provinces, et ont annoncé qu'ils n'y avaient découvert nulle « part le moindre indice de véritable basalte.

« Il serait bien extraordinaire, que le basalte s'y montrât « uniquement sur un point isolé. Sans doute ce point pour- « rait être un fragment écarté d'une formation plus considé-

« rable; mais il serait bien extraordinaire qu'on n'eût pas « retrouvé ailleurs la moindre trace de cette formation.

« Ce doute est encore confirmé par la nature du sol de « Salisbury, qui est compris dans une longue bande de « terrain primitif; et on sait que ce genre de terrain ren- « ferme fréquemment des roches amphiboliques, dont plu- « sieurs variétés, comme en Suède, ont une grande ressem- « blance avec le basalte.

« On doit donc reconnaître que cette roche a beaucoup de « rapports avec le basalte; mais il paraît impossible, quant- « à-présent, de prononcer qu'elle est réellement un basalte. »

D'après l'avis d'un minéralogiste aussi savant que M. Brochant-de-Villiers, nous devons avec lui rester dans le doute sur la vraie nature de cette roche; mais l'aggrégation en forme de mur, et qui s'étend à une assez grande distance, à la même hauteur et dans la même épaisseur, est un fait curieux, qu'il nous a paru intéressant de faire connaître. D'autant plus que cette nouvelle publicité pourra stimuler le zèle des minéralogistes des États-Unis, et engager les savants de cette partie du monde à prendre de nouveaux renseignements, et à faire d'ultérieures observations, propres à nous éclairer sur ce phénomène, et à lever tous les doutes dont il reste encore enveloppé.

Institut,

Est



Vue d'une veine de
par les Habitan

MÉMOIRE

Sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles, et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques;

PAR M. POISSON.

Lu à l'Académie le 19 juillet 1819.

Les géomètres sont parvenus à intégrer les équations aux différences partielles du premier ordre, quels que soient leur forme et le nombre des variables indépendantes; ils ont du moins ramené cette intégration à celle d'un système d'équations différentielles du premier ordre, en même nombre que ces variables; et par-là, ils ont prouvé que les équations aux différences partielles de cet ordre, n'ont pas d'autres difficultés que celles des équations différentielles ordinaires. Il n'en est plus de même lorsqu'on passe aux ordres supérieurs; les équations aux différences partielles ont alors des difficultés qui leur sont propres, et qui ne dépendent pas de l'imperfection des méthodes. On sait, en effet, que dès le second ordre, et, à plus forte raison, dans les ordres plus élevés, le plus grand nombre de ces

équations n'est point intégrable sous forme finie, en employant les seules variables qu'elles contiennent. Pour obtenir leurs intégrales sous cette forme, on a imaginé de chercher à les exprimer par des intégrales définies, relatives à des variables auxiliaires qui ne sont pas celles de la question ; et ce nouveau champ, ouvert aux recherches des géomètres, a fourni le moyen, sinon de compléter, du moins d'étendre les procédés d'intégration.

Euler avait déja indiqué l'usage des intégrales définies, pour intégrer, sous forme finie, les équations différentielles ordinaires qui résistent aux méthodes connues, telles que, par exemple, l'équation de Riccati dans les cas de non intégrabilité proprement dite. M. Laplace a pensé le premier à étendre ce procédé aux équations linéaires aux différences partielles; et il a intégré, de cette manière, l'équation du second ordre, à deux variables indépendantes, dans le cas où tous les coëfficients sont constants, et dans un autre cas particulier. Les expressions qu'il a trouvées ne contiennent que des intégrales simples; mais les quantités qui multiplient les fonctions arbitraires sous le signe intégral, ne sont pas données explicitement : elles dépendent d'équations différentielles ordinaires, qui ne peuvent elles-mêmes s'intégrer que par des intégrales définies; en sorte que ces expressions contiennent réellement des intégrales définies doubles, ainsi qu'on peut le voir dans l'ouvrage de M. Lacroix, où sont exposées les différentes méthodes d'intégration employées jusqu'ici.

Depuis l'époque où M. Laplace a publié ces résultats (*),

(*) Mémoires de l'Académie, année 1779.

lui-même et d'autres géomètres se sont occupés de ce nouveau mode d'intégration : on a intégré, par ce moyen, plusieurs équations remarquables; et l'on a montré, sur-tout, l'usage de cette forme d'intégrales dans la résolution des problêmes qui conduisent à des équations aux différences partielles. Mais les différents procédés qu'on a suivis, paraissent peu susceptibles d'être généralisés; aussi n'existe-t-il jusqu'à-présent aucune méthode qui soit applicable à des classes nombreuses de ces équations, et qui puisse servir à les intégrer par le moyen des intégrales définies, toutes les fois qu'elles ne sont pas intégrables sans leur secours : le mémoire de M. Brisson, inséré dans le quatorzième cahier du Journal de l'École polytechnique, renferme ce qu'on a écrit de plus général sur cette matière.

A défaut de méthodes générales, dont nous manquerons peut-être encore long-temps, il m'a semblé que ce qu'il y avait de mieux à faire, c'était de chercher à intégrer isolément les équations aux différences partielles les plus importantes par la nature des questions de mécanique et de physique qui y conduisent. C'est là l'objet que je me suis proposé dans ce nouveau mémoire.

L'équation dont je me suis principalement occupé est celle d'où dépendent les petits mouvements des fluides élastiques, lorsqu'on suppose constantes la densité naturelle du fluide et sa température. Elle est, comme on sait, du second ordre, linéaire et à quatre variables indépendantes, qui sont le temps et les trois coordonnées des molécules fluides. Quand on fait abstraction de deux de ces coordonnées, et que l'on considère le mouvement suivant une seule dimension du fluide, elle se réduit à l'équation des *cordes vibrantes*, que

d'Alembert a intégrée le premier, à l'origine même du calcul aux différences partielles. Euler en a ensuite trouvé l'intégrale, pour le cas où le mouvement des molécules ne dépend que du temps et de leurs distances à un point fixe; en sorte que le mouvement soit le même, et se propage symétriquement dans tous les sens autour de ce point. Mais, en conservant à cette équation toute la généralité qu'elle comporte, on n'avait point encore obtenu son intégrale complète; et les essais que l'on a tentés pour la découvrir ont conduit à des résultats si compliqués, qu'il serait impossible d'en faire aucun usage (*). Cependant l'intégrale à laquelle je suis parvenu dans ce mémoire, est d'une forme très-simple : elle ne contient que des intégrales définies doubles; et les deux fonctions arbitraires s'y déterminent immédiatement d'après l'état initial du fluide; ce qui sera d'un grand avantage dans les applications qu'on en pourra faire. Le procédé qui m'y a conduit est aussi très-simple : il est fondé sur un théorème relatif à certaines intégrales définies, et sur les analogies connues des puissances et des différences, que j'ai employées dans tout ce mémoire, pour trouver, d'une manière plus rapide, les sommes des séries par lesquelles j'ai d'abord exprimé les intégrales des équations que j'ai considérées.

Cette intégrale générale se change dans les intégrales de d'Alembert et d'Euler, lorsqu'on fait les suppositions qui s'y rapportent. Par un changement de variables, qui consiste à substituer les coordonnées polaires des molécules fluides à leurs coordonnées droites, elle prend une forme qui la rend

---

(*) *Voyez* le tome II des anciens Mémoires de Turin, pag. 120, et le tome I[er] des Mémoires présentés à la première classe de l'Institut, p. 379.

propre à déterminer le mouvement du fluide, lorsqu'il part d'un centre donné : elle montre clairement alors que, quel que soit l'ébranlement primitif, le mouvement se propage avec la même vitesse dans tous les sens, quoique les vitesses propres des molécules ne soient pas les mêmes suivant toutes les directions; proposition que j'avais déja démontrée, mais d'une manière moins simple et moins directe, dans mon mémoire *sur la Théorie du son*. En géneral, cette nouvelle intégrale pourra servir à résoudre, par rapport au mouvement des fluides élastiques, des problêmes qui n'avaient point encore été résolus, ou qui ne l'avaient été que dans des cas particuliers. Je me propose de faire de ces applications l'objet spécial d'un autre mémoire.

Les autres équations aux différences partielles que j'ai considérées dans celui-ci, sont moins importantes que l'équation générale du mouvement des fluides; d'ailleurs les intégrales de la plupart d'entre elles étaient déja connues; mais les procédés que j'ai employés, diffèrent de ceux dont on avait fait usage; et la forme des intégrales que j'ai obtenues n'est pas non plus toujours la même que celle des intégrales connues. En effet, lorsqu'on exprime l'intégrale d'une équation aux différences partielles, par le moyen des intégrales définies, sa forme n'est pas unique et déterminée; elle dépend, au contraire, pour une même équation, du procédé d'intégration qu'on a suivi; et souvent l'on n'a aucun moyen direct de transformer ses diverses expressions les unes dans les autres, ni de s'assurer qu'on est parvenu, dans chaque cas, à la forme la plus simple qui soit possible. Ce qu'il faut sur-tout rechercher dans ces sortes d'intégrales, c'est qu'elles se prêtent facilement à la détermination des fonctions arbi-

traires qu'elles renferment. Toutes celles que l'on trouvera dans mon mémoire, jouissent de cet avantage; en sorte que, non-seulement elles satisfont de la manière la plus générale aux équations dont elles sont les intégrales complètes, mais on doit aussi les regarder comme étant les solutions définitives des problêmes qui ont conduit à ces équations.

Équation générale du mouvement des fluides.

(1) Nous démontrerons d'abord un théorême relatif à la réduction des intégrales doubles, remarquable en lui-même, et qui nous sera très-utile dans la suite de ce mémoire.

Les intégrales auxquelles ce théorême se rapporte, sont comprises sous la forme :

$$\iint f(g\cos. u + h.\sin. u \sin. v + k \sin. u \cos. v) \sin. u\, du\, dv = \mathrm{P},$$

et doivent être prises depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \pi$, et depuis $v = 0$ jusqu'à $v = 2\pi$, π désignant le rapport de la circonférence au diamètre : g, h et k sont des quantités constantes; la caractéristique f indique une fonction quelconque. Si l'on fait

$$g = p\cos. u', \quad h = p \sin. u' \sin. v', \quad k = p \sin. u' \cos. v',$$

la quantité P deviendra

$$\mathrm{P} = \iint f\Big[p\Big(\cos. u' \cos. u + \cos. (v - v') \sin. u' \sin. u\Big)\Big] \sin. u\, du\, dv.$$

Or, pour savoir ce que cette quantité représente, concevons une sphère décrite d'un rayon pris pour unité; par le centre, menons arbitrairement un plan fixe, et dans ce plan, un axe fixe; supposons que u soit l'angle compris entre cet axe et

un rayon quelconque de la sphère, et v l'angle dièdre, compris entre le plan de ces deux droites et le plan fixe ; appelons ω l'élément de la surface sphérique, qui répond à l'extrémité de ce rayon : nous aurons

$$d\omega = \sin. u\, du\, dv;$$

et l'intégrale double, d'après ses limites, s'étendra à tous les points de cette surface. Supposons encore que les constantes u' et v' soient les valeurs de u et v, qui répondent à un rayon déterminé de la sphère ; soit θ l'angle compris entre cette droite et le rayon quelconque, correspondant aux angles u et v; la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique donnera

$$\cos. \theta = \cos. u' \cos. u + \cos. (v' - v) \sin. u' \sin. u;$$

et l'on aura ensuite

$$\mathrm{P} = \iint f(p \cos. \theta)\, d\omega.$$

Ainsi cette quantité P représente la somme de tous les éléments de la surface sphérique, multipliés chacun par une fonction donnée du cosinus de l'angle compris entre son rayon et un rayon déterminé de position.

Cela posé, si l'on désigne par ψ l'angle dièdre compris entre le plan de ces deux rayons et un plan fixe, mené arbitrairement par le rayon déterminé, on pourra employer les deux angles ψ et θ au lieu de v et u, à la détermination du rayon variable, et exprimer l'élément $d\omega$ de la surface au moyen de leurs différentielles ; on aura alors

$$d\omega = \sin. \theta\, d\theta\, d\psi,$$

et, par conséquent,

$$P = \iint f(p\cos.\theta)\sin.\theta\, d\theta\, d\psi.$$

Pour étendre l'intégrale à la surface entière de la sphère, il faudra la prendre depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$, et depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = 2\pi$; l'intégration relative à ψ s'effectue immédiatement; et en remettant pour P ce que cette lettre représente, nous aurons

$$\iint f(g\cos.u + h\sin.u\sin.v + k\sin.u\cos.v)\sin.u\, du\, dv$$
$$= 2\pi \int f(p\cos.\theta)\sin.\theta\, d\theta; \quad (1)$$

d'où il résulte que l'intégrale double que nous considérons, se réduit, quelle que soit la fonction f, à une intégrale simple, et que sa valeur ne sera fonction que de la quantité p, laquelle est égale à $\sqrt{g^2 + h^2 + k^2}$.

(2). En prenant pour la fonction f une puissance quelconque m, on aura

$$\iint (g\cos.u + h\sin.u\sin.v + k\sin.u\cos.v)^m \sin.u\, du\, dv$$
$$= \frac{2\pi}{(m+1)p}\left(p^{m+1} - (-p)^{m+1}\right);$$

et si l'on désigne par n un nombre entier positif, et qu'on fasse successivement $m = 2n + 1$, $m = 2n$, il en résultera

$$\left.\begin{aligned} &\iint (g\cos.u + h\sin.u\sin.v + k\sin.u\cos.v)^{2n+1}\sin.u\, du\, dv = 0, \\ &\iint (g\cos.u + h\sin.u\sin.v + k\sin.u\cos.v)^{2n}\sin.u\, du\, dv = \frac{4\pi p^{2n}}{2n+1}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Les éléments de la première de ces deux intégrales doubles sont deux à deux égaux et de signes contraires; l'intégrale

doit donc être nulle, comme nous la trouvons. Quant à la seconde équation (2), on peut aussi la vérifier en développant la puissance $2n$ du trinome contenu entre les parenthèses, et effectuant ensuite les intégrations.

En partant des équations (2), on pourra démontrer l'équation (1), mais pour le cas seulement où la fonction f indique une fonction rationnelle et entière (*), ou, du moins, une fonction qui soit réductible en série convergente, ordonnée suivant les puissances positives et entières de la variable. La démonstration que nous venons de donner de cette formule, est à-la-fois plus simple et plus générale.

Observons encore que, par des différentiations relatives aux quantités g, h, k, on déduira de l'équation (1) une infinité d'autres formules de la même nature. Ainsi, en différenciant une première fois par rapport à l'une de ces trois quantités, et mettant une fonction F à la place du coëfficient différentiel de f, on aura

$$\iint F(g\cos.u + h\sin.u\sin.v + k\sin.u\cos.v)\cos.u\sin.u\,du\,dv = \frac{2\pi g}{p}\int F(p\cos.\theta)\cos.\theta\sin.\theta\,d\theta,$$

$$\iint F(g\cos.u + h\sin.u\sin.v + k\sin.u\cos.v)\sin.^2u\sin.v\,du\,dv = \frac{2\pi h}{p}\int F(p\cos.\theta)\cos.\theta\sin.\theta\,d\theta,$$

$$\iint F(g\cos.u + h\sin.u\sin.v + k\sin.u\cos.v)\sin.^2u\cos.v\,du\,dv = \frac{2\pi k}{p}\int F(p\cos.\theta)\cos.\theta\sin.\theta\,d\theta;$$

(*) *Exercices de calcul intégral,* 5e partie, pag. 273.

d'où l'on conclut, quelle que soit la fonction F,

$$\iint F(g\cos.u+h\sin.u\sin.v+k\sin.u\cos.v)\,(h\cos.u-g\sin.u\sin.v)\,\sin.u\,du\,dv=0,$$

$$\iint F(g\cos.u+h\sin.u\sin.v+k\sin.u\cos.v)\,(k\cos.u-g\sin.u\cos.v)\,\sin.u\,du\,dv=0,$$

$$\iint F(g\cos.u+h\sin.u\sin.v+k\sin.u\cos.v)\,(k\sin.v-h\cos.v)\,\sin.^2u\,du\,dv=0.$$

Nous ne nous arrêterons pas davantage à développer les conséquences de l'équation (1), qui sont étrangères à l'objet de ce mémoire.

(3) Proposons-nous maintenant d'intégrer l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right), \qquad (3)$$

dans laquelle a est une constante donnée. C'est, comme on sait, de la fonction φ, déterminée par cette équation, que dépendent les lois du mouvement des fluides élastiques, lorsqu'on néglige les termes de seconde dimension, par rapport aux vitesses et aux condensations de leurs molécules, et qu'on suppose la densité naturelle et la température du fluide, constantes dans toute son étendue.

Afin d'exprimer commodément son intégrale complète, en série ordonnée suivant les puissances de t, nous emploierons cette notation abrégée : q étant une fonction quelconque de x, y, z, nous ferons

$$\frac{d^2q}{dx^2}+\frac{d^2q}{dy^2}+\frac{d^2q}{dz^2}=\delta q,$$

$$\frac{d^2\delta q}{dx^2}+\frac{d^2\delta q}{dy^2}+\frac{d^2\delta q}{dz^2}=\delta^2 q,$$

$$\frac{d^2\delta^2 q}{dx^2}+\frac{d^2\delta^2 q}{dy^2}+\frac{d^2\delta^2 q}{dz^2}=\delta^3 q,$$

etc.;

de sorte qu'on ait généralement $\delta^n q = \delta . \delta^{n-1} q$. De cette manière, l'intégrale complète de l'équation (3) sera évidemment

$$\varphi = \mathrm{U} + \frac{a^2 t^2}{1.2} \delta \mathrm{U} + \frac{a^4 t^4}{1.2.3.4} \delta^2 \mathrm{U} + \frac{a^6 t^6}{1.2.3.4.5.6} \delta^3 \mathrm{U} + \text{etc.}$$

$$+ t\mathrm{V} + \frac{a^2 t^3}{1.2.3} \delta \mathrm{V} + \frac{a^4 t^5}{1.2.3.4.5} \delta^2 \mathrm{V} + \frac{a^6 t^7}{1.2.3.4.5.6.7} \delta^3 \mathrm{V} + \text{etc.};$$

U et V étant deux fonctions arbitraires de x, y, z. Pour obtenir cette intégrale sous forme finie, il s'agit donc d'exprimer, par le moyen des intégrales définies, les sommes des deux séries qui composent la valeur de φ; mais on peut remarquer que la première se déduit de la seconde, en différentiant celle-ci par rapport à t, et en y remplaçant V par U; ainsi, en faisant

$$\mathrm{T} = t\mathrm{V} + \frac{a^2 t^3}{1.2.3} \delta \mathrm{V} + \frac{a^4 t^5}{1.2.3.4.5} \delta^2 \mathrm{V} + \frac{a^6 t^7}{1.2.3.4.5.6.7} \delta^3 \mathrm{V} + \text{etc.},$$

il nous suffira de chercher l'expression de cette quantité T en intégrales définies.

(4) D'après les analogies connues entre les puissances et les différences, on a

$$\delta^n \mathrm{V} = \left(g^2 + h^2 + k^2\right)^n \mathrm{V},$$

pourvu que, dans le développement du second membre, on regarde les puissances de g, h, k, comme des signes d'opérations qui indiquent des différentielles relatives à x, y, z, divisées respectivement par dx, dy, dz; c'est-à-dire que, dans ce développement, un terme quelconque, tel que

$$\mathrm{A} g^i h^{i'} k^{i''} \mathrm{V},$$

dans lequel le coëfficient A est indépendant de g, h, k, devra être remplacé par

$$A\,\frac{d^{i+i'+i''}\,V}{dx^{i}\,dy^{i'}\,dz^{i''}}.$$

Par ce moyen, la quantité T deviendra

$$T=\left(1+\frac{a^2\,t^2}{1.2}\cdot\frac{p^2}{3}+\frac{a^4\,t^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{p^4}{5}+\frac{a^6\,t^6}{1.2.3.4.5.6}\cdot\frac{p^6}{7}+\text{etc.}\right)V\,t,$$

en faisant, comme plus haut, $g^2+h^2+k^2=p^2$. Si l'on fait aussi, pour abréger,

$$g\,cos.u+h\,sin.u\,sin.v+k\,sin.u\,cos.v=\alpha,$$

les équations (2) deviendront

$$\iint \alpha^{2n+1}\,sin.u\,du\,dv=0,$$
$$\iint \alpha^{2n}\,sin.u\,du\,dv=\frac{4\pi\,p^{2n}}{2n+1};$$

au moyen de quoi l'on pourra écrire la valeur de T sous cette forme :

$$T=\frac{1}{4\pi}\iint\left(1+a\,t\alpha+\frac{a^2\,t^2\,\alpha^2}{1.2}+\frac{a^3\,t^3\,\alpha^3}{1.2.3}+\frac{a^4\,t^4\,\alpha^4}{1.2.3.4}+\text{etc.}\right)V\,t\,sin.u\,du\,dv,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$T=\frac{1}{4\pi}\iint e^{at\alpha}\,V\,t\,sin.u\,du\,dv;$$

e désignant la base des logarithmes népériens.

Or, si l'on a $V=f(x, y, z)$, et qu'on représente par x', y', z', trois quantités quelconques, on aura, en vertu des mêmes analogies qu'on vient de citer,

$$e^{gx'}\,e^{hy'}\,e^{kz'}\,V=f(x+x',\,y+y',\,z+z');$$

donc, en remettant pour α sa valeur, nous aurons

$$c^{at\alpha}\,\mathrm{V}=f(x+\alpha t\cos.u,\ y+at\sin.u\sin.v,\ z+at\sin.u\cos.v),$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{T}=\frac{1}{4\pi}\int\!\!\int f(x+at\cos.u,\ y+at\sin.u\sin.v,\ z+at\sin.u\cos.v)\,t\sin.u\,du\,dv.$$

En faisant de même $\mathrm{U}=\mathrm{F}(x, y, z)$, et désignant par T′ la somme de la première série contenue dans la valeur de φ, on aura

$$\mathrm{T}'=\frac{d.}{4\pi\,dt}\int\!\!\int \mathrm{F}(x+at\cos.u,\ y+at\sin.u\sin.v,\ z+at\sin.u\cos.v)\,t\sin.u\,du\,dv;$$

donc, en comprenant le diviseur 4π dans les fonctions arbitraires f et F, il en résultera, pour l'intégrale complète de l'équation (3),

$$\varphi=\int\!\!\int f(x+at\cos.u,\ y+at\sin.u\sin.v,\ z+at\sin.u\cos.v)\,t\sin.u\,du\,dv$$
$$+\frac{d.}{dt}\int\!\!\int \mathrm{F}(x+at\cos.u,\ y+at\sin.u\sin.v,\ z+at\sin.u\cos.v)\,t\sin.u\,du\,dv;$$

les limites des intégrales définies étant toujours $u=0$, $u=\pi$, et $v=0$, $v=2\pi$.

Cette forme d'intégrale est aussi simple qu'on puisse le desirer, eu égard au nombre des variables de l'équation à laquelle elle répond : elle a, en outre, l'avantage que les deux fonctions arbitraires f et F s'y déterminent immédiatement, d'après les valeurs initiales de φ et $\frac{d\varphi}{dt}$; car, en fai-

sant $t=0$, on a simplement

$$\varphi=4\pi F(x,y,z),\quad \frac{d\varphi}{dt}=4\pi f(x,y,z).$$

(5) Nous pouvons mettre l'intégrale de l'équation (3) sous une forme plus symétrique, par rapport aux trois variables x, y, z, en l'écrivant ainsi :

$$\varphi=\iint f(x+at\cos.u,\ y+at\cos.u',\ z+at\cos.u'')\,t\,d\omega$$
$$+\frac{d.}{dt}\iint F(x+at\cos.u,\ y+at\cos.u',\ z+at\cos.u'')\,t\,d\omega.$$

Pour effectuer les intégrations, on prendra indifféremment l'un de ces trois systêmes de valeurs :

$$\cos.u'=\sin.u\sin.v,\quad \cos.u''=\sin.u\cos.v,\quad d\omega=\sin.u\,du\,dv;$$
$$\cos.u=\sin.u'\sin.v',\quad \cos.u''=\sin.u'\cos.v',\quad d\omega=\sin.u'.du'\,dv';$$
$$\cos.u=\sin.u''\sin.v'',\quad \cos.u'=\sin.u''\cos.v'',\quad d\omega=\sin.u''\,du''\,dv'';$$

et dans le premier cas, on intégrera depuis $u=0$ et $v=0$, jusqu'à $u=\pi$ et $v=2\pi$; dans le second, depuis $u'=0$ et $v'=0$, jusqu'à $u'=\pi$ et $v'=2\pi$; enfin dans le troisième, depuis $u''=0$ et $v''=0$, jusqu'à $u''=\pi$ et $v''=2\pi$. Sous cette forme, on peut vérifier, sans développer la valeur de φ suivant les puissances de t, qu'elle satisfait à l'équation (3).

En effet, supposons d'abord que cette valeur de φ ne contienne que la partie dépendante de la fonction f; en différenciant par rapport à t, on aura

$$\frac{d\varphi}{dt}=\iint f\,d\omega+a\iint\frac{df}{dx}t\cos.u\,d\omega$$
$$+a\iint\frac{df}{dy}t\cos.u'\,d\omega+a\iint\frac{df}{dz}t\cos.u''\,d\omega;$$

différenciant de même une seconde fois, il vient

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=2a\iint\frac{df}{dx}\cos.u\,d\omega+2a\iint\frac{df}{dy}\cos.u'\,d\omega+2a\iint\frac{df}{dz}\cos.u''\,d\omega$$
$$+a^2\iint\frac{d^2f}{dx^2}t\cos.^2u\,d\omega+a^2\iint\frac{d^2f}{dy^2}t\cos.^2u'\,d\omega+a^2\iint\frac{d^2f}{dz^2}t\cos.^2u''\,d\omega$$
$$+2a^2\iint\frac{d^2f}{dx\,dy}t\cos.u\cos.u'\,d\omega+2a^2\iint\frac{d^2f}{dx\,dz}t\cos.u\cos.u''\,d\omega$$
$$+2a^2\iint\frac{d^2f}{dy\,dz}t\cos.u'\cos.u''\,d\omega.$$

Or, si l'on prend $d\omega=\sin.u\,du\,dv$, et qu'on intègre par parties relativement à u, on aura

$$2\int\frac{df}{dx}\cos.u\sin.u\,du=\frac{df}{dx}\sin.^2u+at\int\frac{d^2f}{dx^2}\sin.^3u\,du$$
$$-at\int\frac{d^2f}{dx\,dy}\cos.u\sin.^2u\sin.v\,du-at\int\frac{d^2f}{dx\,dz}\cos.u\sin.^2u\cos.v\,du:$$

aux deux limites $u=0$ et $u=\pi$, le premier terme de cette valeur est nul ; en le supprimant et prenant l'intégrale double, on aura donc

$$2\iint\frac{df}{dx}\cos.u\,d\omega=at\iint\frac{d^2f}{dx^2}\sin.^2u\,d\omega-at\iint\frac{d^2f}{dx\,dy}\cos.u\cos.u'\,d\omega$$
$$-at\iint\frac{d^2f}{dx\,dz}\cos.u\cos.u''\,d\omega.$$

On trouvera de même

$$2\iint\frac{df}{dy}\cos.u'\,d\omega=at\iint\frac{d^2f}{dy^2}\sin.^2u'\,d\omega-at\iint\frac{d^2f}{dy\,dx}\cos.u'\cos.u\,d\omega$$
$$-at\iint\frac{d^2f}{dy\,dz}\cos.u'\cos.u''\,d\omega,$$

$$2\iint\frac{df}{dz}\cos.u''\,d\omega=at\iint\frac{d^2f}{dz^2}\sin.^2u''\,d\omega-at\iint\frac{d^2f}{dz\,dx}\cos.u''\cos.u\,d\omega$$
$$-at\iint\frac{d^2f}{dz\,dy}\cos.u''\cos.u'\,d\omega;$$

au moyen de quoi la valeur précédente de $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ se réduit à

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=a^2\,t\iint\frac{d^2f}{dx^2}\,d\omega+a^2\,t\iint\frac{d^2f}{dy^2}\,d\omega+a^2\,t\iint\frac{d^2f}{dz^2}\,d\omega:$$

on a en même temps

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=t\iint\frac{d^2f}{dx^2}\,d\omega+t\iint\frac{d^2f}{dy^2}\,d\omega+t\iint\frac{d^2f}{dz^2}\,d\omega;$$

l'équation (3) est donc satisfaite, quelle que soit la fonction f, par la première partie de la valeur de φ.

En général, si l'on satisfait à cette équation par une valeur quélconque $\varphi=\mathrm{T}$, il est évident, d'après sa forme, qu'on y satisfera également en prenant $\varphi=\frac{d\mathrm{T}}{dt}$; d'où l'on peut conclure que la seconde partie de la valeur de φ se trouve vérifiée en même temps que la première; par conséquent sa valeur entière est bien, en effet, l'intégrale complète de l'équation (3).

(6) On sait intégrer cette équation sous forme finie, sans le secours des intégrales définies, dans deux cas particuliers: lorsque φ n'est fonction que de t et de l'une des trois variables x, y, z, de x, par exemple; et lorsqu'en faisant $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r$, cette quantité φ n'est fonction que de r et de t. Nous allons faire voir que, dans ces deux cas, l'intégrale générale coïncide avec les intégrales connues.

Dans le premier cas, l'équation (3) se réduit à

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=a^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}, \qquad (4)$$

et son intégrale devient

$$\varphi=\iint f\,(x+at\cos.u)\,t\sin.u\,du\,dv$$
$$+\frac{d.}{dt}\iint \mathrm{F}\,(x+at\cos.u)\,t\sin.u\,du\,dv;$$

l'intégration relative à v s'effectue immédiatement, en sorte qu'on a

$$\varphi = 2\pi \iint f(x + at\cos.u)\, t\sin.u\, du$$
$$+ 2\pi \frac{d.}{dt} \iint \mathrm{F}\,(x + at\cos.u)\, t\sin.u\, du;$$

de plus, si l'on fait $fx\, dx = df_{,}x$, $\mathrm{F}x\, dx = d\mathrm{F}_{,}x$, on aura, en intégrant par rapport à u, depuis $u = o$ jusqu'à $u = \pi$,

$$\int f(x + at\cos.u)\, t\sin.u\, du = \frac{1}{a} f_{,}(x - at) - \frac{1}{a} f_{,}(x + at),$$
$$\int \mathrm{F}\,(x + at\cos.u)\, t\sin.u\, du = \frac{1}{a}\mathrm{F}_{,}(x - at) - \frac{1}{a}\mathrm{F}_{,}(x + at);$$

et par conséquent

$$\varphi = \frac{2\pi}{a}\Big(f_{,}(x - at) - f_{,}(x + at) + \mathrm{F}_{,}(x - at) - \mathrm{F}_{,}(x + at)\Big);$$

ou bien, en réunissant les termes semblables,

$$\varphi = fonct.\,(x - at) + Fonct.\,(x + at);$$

ce qui est effectivement l'intégrale connue de l'équation (4).

Lorsque φ n'est fonction que de t et de r, l'équation (3) devient

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right);$$

si on la multiplie par r, elle prend la forme :

$$\frac{d^2.\,r\varphi}{dt^2} = a^2\frac{d^2.\,r\varphi}{dr^2};$$

et en la comparant à l'équation (4), on voit que son intégrale doit être

$$r\varphi = fonct.\,(r - at) + Fonct.\,(r + at).$$

Or, si l'on fait, dans ce cas, $f(x,y,z)=fr$, $F(x,y,z)$ $=Fr$, et, pour abréger,

$$(x+at\cos.u)^2+(y+at\sin.u\sin.v)^2+(z+at\sin.u\cos.v)^2$$
$$=r^2+2at(x\cos.u+y\sin.u\sin.v+z\sin.u\cos.v)+a^2t^2=\rho^2,$$

les fonctions arbitraires, contenues sous les signes d'intégration dans l'intégrale générale, seront $f\rho$ et $F\rho$, et cette intégrale deviendra

$$\varphi=\iint f\rho.t\sin.u\,du\,dv+\frac{d.}{dt}\iint F\rho.t\sin.u\,du\,dv.$$

En vertu de l'équation (1), nous aurons

$$\iint f\rho.t\sin.u\,du\,dv=2\pi\int f\rho'.t\sin.\theta\,d\theta,$$

en faisant

$$r^2+2atr\cos.\theta+a^2t^2=\rho'^2,$$

et intégrant depuis $\theta=0$ jusqu'à $\theta=\pi$. Si l'on différencie cette valeur de ρ'^2 par rapport à θ, on aura

$$-2atr\sin.\theta\,d\theta=2\rho'\,d\rho';$$

par conséquent, l'équation précédente deviendra

$$\iint f\rho.t\sin.u\,du\,dv=-\frac{2\pi}{ar}\int f\rho'.\rho'\,d\rho';$$

donc, en faisant $\rho'f\rho'\,d\rho'=d.f_1\rho'$, et observant qu'on a $\rho'=r+at$, $\rho'=r-at$, aux deux limites $\theta=0$, $\theta=\pi$, on en conclura

$$\iint f\rho.t\sin.u\,du\,dv=\frac{2\pi}{ar}\Big(f_1(r+at)-f_1(r-at)\Big).$$

Je substitue la fonction F à f; et en différenciant par rapport à t, il vient

$$\frac{d.}{dt}\iint F\rho.t\sin.u\,du\,dv=\frac{2\pi}{r}\Big((r+at)F(r+at)+(r-at)F(r-at)\Big).$$

L'expression complète de φ sera donc

$$\varphi = \frac{2\pi}{r}\Big(\tfrac{1}{a}f_{\prime}(r+at) - \tfrac{1}{a}f_{\prime}(r-at) + (r+at)\,\text{F}(r+at) + (r-at)\,\text{F}(r-at)\Big);$$

expression qui se réduit à la forme :

$$\varphi = \frac{1}{r}\Big(fonct.\,(r-at) + Fonct.\,(r+at)\Big),$$

et qui coïncide avec l'intégrale connue.

(7) Dans le cas général, l'intégrale de l'équation (3) peut être présentée sous une autre forme, qui sera souvent utile dans les applications, sur-tout lorsqu'il s'agira, comme dans la théorie du son, de déterminer le mouvement d'un fluide dont l'ébranlement primitif a été circonscrit dans une étendue limitée.

Pour cela, soit

$$x = r\cos.\theta,\quad y = r\sin.\theta\sin.\psi,\quad z = r\sin.\theta\cos.\psi;$$

les angles θ et ψ seront réels, et nous aurons

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Désignons par ρ, θ' et ψ', ce que deviennent r, θ et ψ, lorsqu'on change x, y, z, en $x + at\cos.u$, $y + at\sin.u\sin.v$, $z + at\sin.u\cos.v$; en sorte qu'on ait

$$x + at\cos.u = \rho\cos.\theta',$$
$$y + at\sin.u\sin.v = \rho\sin.\theta'\sin.\psi',$$
$$z + at\sin.u\cos.v = \rho\sin.\theta'\cos.\psi',$$

et en même temps

$$\rho^2 = r^2 + 2a\,tr\Big(\cos.u\cos.\theta' + \sin.u\sin.\theta'\cos.(v-\psi')\Big) + a^2t^2.$$

Les angles θ' et ψ' seront aussi réels, ainsi que u et v; en désignant donc par μ un certain angle réel, on pourra toujours supposer

$$\cos. u \cos. \theta' + \sin. u \sin. \theta' \cos. (v - \psi') = \cos. \mu ;$$

on aura alors

$$\rho^2 = r^2 + 2 a t r \cos. \mu + a^2 t^2 ;$$

d'où il résulte que la valeur de ρ sera toujours comprise entre $r + at$ et $r - at$.

Cela posé, représentons par $f(r, \theta, \psi)$, $F(r, \theta, \psi)$, les valeurs des fonctions f et F qui répondent à $t=0$; les fonctions qui entrent sous les signes d'intégration dans la valeur de φ, deviendront $f(\rho, \theta', \psi')$, $F(r, \theta, \psi')$, pour une valeur quelconque de la variable t, et l'intégrale de l'équation (3) prendra la forme :

$$\varphi = \iint f(\rho, \theta', \psi') \sin. u \, du \, dv + \frac{d.}{dt} \iint F(\rho, \theta', \psi') \sin. u \, du \, dv.$$

Dans la théorie du son, les fonctions initiales $f(r, \theta, \psi)$ et $F(r, \theta, \psi)$ seront nulles, quels que soient les angles ψ et θ, pour toute valeur de r plus grande que le rayon de l'ébranlement primitif; si donc on désigne ce rayon par α, on aura aussi

$$f(\rho, \theta', \psi') = 0, \quad F(\rho, \theta', \psi') = 0,$$

quelles que soient les variables θ' et ψ', pour toute valeur de ρ plus grande que α : d'où l'on conclut que la quantité φ, d'où dépendent les vîtesses des molécules fluides, ne cessera d'être nulle que quand la plus petite valeur de ρ, ou $r - at$, sera

devenue égale à α; ce qui suffit pour montrer que le son se propagera avec la vîtesse a, dans toutes les directions autour de l'ébranlement primitif, quelle que soit la nature de cet ébranlement. Nous développerons dans un autre mémoire les conséquences qui résultent de l'expression de la quantité φ, relativement aux lois générales du mouvement des fluides élastiques.

(8) Si l'on suppose la fonction φ indépendante de la variable x, l'équation (3) se réduit à

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right), \qquad (5)$$

et son intégrale devient

$$\varphi=\iint f(y+at\sin.u\sin.v,\ z+at\sin.u\cos.v)\,t\sin.u\,du\,dv$$
$$+\frac{d.}{dt}\iint \mathrm{F}(y+at\sin.u\sin.v,\ z+at\sin.u\cos.v)\,t\sin.u\,du\,dv.$$

Cette équation (5) est celle d'où dépendent les petites vibrations des surfaces tendues. M. Parseval en avait déja donné l'intégrale, mais sous une forme beaucoup moins simple que la précédente. (*)

Dans le mouvement des fluides incompressibles, la fonction φ dépend de l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0, \qquad (6)$$

qui se déduit de la précédente, en y changeant t en x, et

(*) Traité des différences et des séries de M. Lacroix, 1re édition, pag. 515.

faisant $a=\sqrt{-1}$. Son intégrale complète sera donc

$$\varphi=\iint f(y+x\,sin.u\,sin.v\sqrt{-1},\ z+x\,sin.u\,cos.v\sqrt{-1})\,x\,sin.u\,du\,dv$$
$$+\frac{d.}{dx}\iint \mathrm{F}\,(y+x\,sin.u\,sin.v\sqrt{-1},\ z+x\,sin.u\,cos.v\sqrt{-1})\,x\,sin.u\,du\,dv;$$

mais à cause des imaginaires qui sont contenues sous les fonctions f et F, cette intégrale sera peu utile pour la résolution des problêmes, sur-tout lorsque, par la nature de la question, ces fonctions arbitraires devront être discontinues. Il vaudra mieux alors exprimer la valeur de φ en séries infinies d'exponentielles, de sinus ou de cosinus, ainsi que je l'ai fait dans mon mémoire *sur la Théorie des ondes.*

L'équation (6) se présente aussi dans les recherches relatives aux attractions des sphéroïdes, pourvu toutefois que le point attiré ne fasse point partie du sphéroïde attirant; car s'il est une des molécules de ce corps, j'ai fait voir ailleurs (*) que cette équation devait être remplacée par celle-ci:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=\Delta,$$

dans laquelle Δ est, en général, une fonction donnée de x, y, z. On verra plus bas, dans un cas analogue (nº 16), comment on peut toujours déterminer une valeur particulière de φ qui satisfasse à une équation de cette forme : au moyen de cette valeur, on fera disparaître le second membre de cette équation, et on la ramènera à la précédente, dont nous connaissons déja l'intégrale complète; mais nous ne

(*) Bulletin de la Société philomatique, décembre 1813.

pensons pas que ces intégrations puissent être d'aucune utilité dans le calcul de l'attraction des sphéroïdes, ni dans les questions qui en dépendent.

Équations relatives à la distribution de la chaleur dans les corps solides.

(9) Les lois des températures dans un corps solide, homogène et de figure quelconque, dépendent de l'équation

$$\frac{d\varphi}{dt}=a\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right), \quad (7)$$

dans laquelle le coëfficient a est une constante positive. D'après la remarque que j'ai faite, il y a déja long-temps (*), cette équation, quoiqu'elle soit du second ordre, est du nombre de celles qui ne comportent qu'une seule fonction arbitraire dans leur intégrale complète. En développant la valeur de φ suivant les puissances de t, on aura, pour cette intégrale,

$$\varphi=\text{U}+at\,\delta\text{U}+\frac{a^2t^2}{1.2}\delta^2\text{U}+\frac{a^3t^3}{1.2.3}\delta^3\text{U}+\frac{a^4t^4}{1.2.3.4}\delta^4\text{U}+\text{ etc.};$$

U étant une fonction arbitraire de x, y, z, et la caractéristique δ ayant ici la même signification que plus haut (n° 3). En vertu des analogies entre les puissances et les différences que nous avons déja employées, nous pourrons écrire cette valeur de φ, sous la forme :

$$\varphi=\left(1+at(g^2+h^2+k^2)+\frac{a^2t^2}{1.2}(g^2+h^2+k^2)^2 + \frac{a^3t^3}{1.2.3}(g^2+h^2+k^2)^3+\text{ etc.}\right)\text{U},$$

(*) Journal de l'École polytechnique, 13e cahier, pag. 107.

pourvu que les puissances de g, h, k, soient, comme précédemment (n° 4), des signes d'opérations qui marquent des différentielles relatives à x, y, z, divisées respectivement par dx, dy, dz.

Cette dernière expression de φ est la même chose que

$$\varphi = e^{a\,tg^2}\, e^{a\,th^2}\, e^{a\,tk^2}\, \mathrm{U};$$

e étant la base des logarithmes népériens. Or, d'après une formule connue, on a

$$e^{atg^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-\alpha^2} e^{2g\alpha\sqrt{at}}\, d\alpha,$$

$$e^{ath^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-6^2} e^{2h6\sqrt{at}}\, d6,$$

$$e^{atk^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-\gamma^2} e^{2k\gamma\sqrt{at}}\, d\gamma;$$

les intégrales étant prises depuis $\alpha = -\frac{1}{0}$, $6 = -\frac{1}{0}$, $\gamma = -\frac{1}{0}$, jusqu'à $\alpha = +\frac{1}{0}$, $6 = +\frac{1}{0}$, $\gamma = +\frac{1}{0}$: on aura donc

$$\varphi = \pi \frac{1}{\sqrt{\pi}} \iiint e^{-\alpha^2 - 6^2 - \gamma^2} e^{2(g\alpha + h6 + k\gamma)\sqrt{at}}\, \mathrm{U}\, d\alpha\, d6\, d\gamma;$$

et comme, en vertu des analogies dont nous faisons usage, on a généralement

$$e^{2(g\alpha + h6 + k\gamma)\sqrt{at}} f(x,y,z) = f(x + 2\alpha\sqrt{at}, y + 26\sqrt{at}, z + 2\gamma\sqrt{at});$$

il en résulte qu'en prenant $\mathrm{U} = \pi\sqrt{\pi} f(x,y,z)$, nous aurons, pour l'intégrale complète de l'équation (7) sous forme finie,

$$\varphi = \iiint e^{-\alpha^2 - 6^2 - \gamma^2} f(x + 2\alpha\sqrt{at}, y + 26\sqrt{at}, z + 2\gamma\sqrt{at})\, d\alpha\, d6\, d\gamma.$$

La fonction arbitraire f se détermine immédiatement, au moyen de la valeur initiale de la quantité φ; car, en faisant $t=0$, on a

$$\varphi=f(x,y,z)\iiint e^{-\alpha^2}e^{-6^2}e^{-\gamma^2}d\alpha\, d6\, d\gamma;$$

et à cause que

$$\int e^{-\alpha^2}d\alpha=\int e^{-6^2}d6=\int e^{-\gamma^2}d\gamma=\sqrt{\pi},$$

il en résulte

$$\varphi=\pi\sqrt{\pi}f(x,y,z).$$

(10) Nous donnerons à l'intégrale que nous venons de trouver une forme différente et plus appropriée à certaines questions, en faisant

$$\alpha=s\cos.u,\quad 6=s\sin.u\sin.v,\quad \gamma=s\sin.u\cos.v.$$

D'après les règles connues sur la transformation des intégrales multiples, nous aurons

$$d\alpha\, d6\, d\gamma=s^2\sin.u\, ds\, du\, dv;$$

la valeur de φ deviendra

$$\varphi=\iiint e^{-s^2}f\Big(x+2s\sqrt{at}\cos.u,\ y+2s\sqrt{at}\sin.u\sin.v,$$
$$z+2s\sqrt{at}\sin.u\cos.v\Big)\, s^2\sin.u\, ds\, du\, dv;$$

et les intégrales relatives aux nouvelles variables s, u et v, devront être prises depuis $s=0$, $v=0$, $u=0$, jusqu'à $s=\frac{1}{0}$, $u=\pi$, $v=2\pi$. En effet, si nous considérons α, 6, γ, comme les trois coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de l'espace, s, u, v seront les trois coordonnées polaires du même point; et comme l'intégrale triple, relative aux pre-

mières variables, devait s'étendre à tous les points de l'espace, il faudra qu'il en soit de même à l'égard de l'intégrale relative à s, u, v; ce qui exige que cette intégrale triple soit prise entre les limites que nous avons assignées.

(11) Si l'on fait $x^2+y^2+z^2=r^2$, et si l'on suppose que la fonction φ ne dépende que de r et t, l'équation (7) se changera en celle-ci:

$$\frac{d.r\varphi}{dt}=a\frac{d^2.r\varphi}{dr^2}; \qquad (8)$$

et la valeur précédente de φ deviendra

$$\varphi=\iiint e^{-s^2} f\rho.s^2 \sin.u\, ds\, du\, dv;$$

en supposant qu'on ait, dans ce cas particulier, $f(x, y, z)=fr$, et faisant, pour abréger,

$$(x+2s\sqrt{at}\cos.u)^2+(y+2s\sqrt{at}\sin.u \sin v)^2$$
$$+(z+2s\sqrt{at}\sin.u\cos.v)^2$$
$$=r^2+4s\sqrt{at}\,(x\cos.u+y\sin.u\sin.v+z\sin.u\cos.v)$$
$$+4ats^2=\rho^2.$$

D'après le théorême contenu dans l'équation (1), nous aurons

$$\iint f\rho.\sin.u\, du\, dv=2\pi\int f\rho'.\sin.\theta\, d\theta,$$

si nous faisons

$$r^2+4rs\sqrt{at}\cos.\theta+4ats^2=\rho'^2.$$

On tire de là

$$\sin.\theta\, d\theta=-\frac{\rho'\, d\rho'}{2rs\sqrt{at}};$$

si donc on suppose $f\rho'.\,\rho'\,d\rho'=d.\mathrm{F}\rho'$, on aura

$$\int f\rho'.\,sin.\,\theta\,d\theta=-\frac{1}{2rs\sqrt{at}}\mathrm{F}\rho'+const.$$

Les deux limites de cette intégrale relative à θ, doivent être $\theta=0$ et $\theta=\pi$; pour ces valeurs de θ, on a $\rho'=r+2s\sqrt{at}$, $\rho'=r-2s\sqrt{at}$; d'où l'on conclut

$$\iint f\rho.\,sin.\,u\,du\,dv=2\pi\int f\rho'.\,sin.\,\theta\,d\theta=\frac{\pi}{rs\sqrt{at}}\Big(\mathrm{F}(r+2s\sqrt{at})$$
$$-\mathrm{F}(r-2s\sqrt{at})\Big);$$

ce qui change la valeur de φ en celle-ci :

$$\varphi=\frac{\pi}{r\sqrt{at}}\int e^{-s^2}\Big(\mathrm{F}(r+2s\sqrt{at})-\mathrm{F}(r-2s\sqrt{at})\Big)s\,ds.$$

En intégrant par parties, depuis $s=0$ jusqu'à $s=\frac{1}{0}$, et observant que $d.\mathrm{F}r=fr.r\,dr$, cette valeur, multipliée par r, devient

$$r\varphi=\pi\int e^{-s^2}\Big[(r-2s\sqrt{at})f(r-2s\sqrt{at})$$
$$+(r+2s\sqrt{at})f(r+2s\sqrt{at})\Big]ds;$$

et si l'on convient de prendre l'intégrale depuis $s=-\frac{1}{0}$ jusqu'à $s=+\frac{1}{0}$; que l'on mette, en outre, fr à la place de πrfr, on aura enfin

$$r\varphi=\int e^{-s^2}f(r+2s\sqrt{at})\,ds,$$

pour l'intégrale complète de l'équation (8).

Lorsqu'on suppose la quantité φ indépendante de y et de z,

l'équation (7) se réduit à

$$\frac{d\varphi}{dt}=a\frac{d^2\varphi}{dx^2}; \qquad (9)$$

et l'integrale générale devient

$$\varphi=\iiint e^{-\alpha^2}e^{-\beta^2}e^{-\gamma^2}f(x+2\alpha\sqrt{at})\,d\alpha;$$

mais on a $\iint e^{-\beta^2}e^{-\gamma^2}\,d\beta\,d\gamma=\pi$; et si l'on comprend ce facteur constant, dans la fonction f, on aura simplement

$$\varphi=\int e^{-\alpha^2}f(x+2\alpha\sqrt{at})\,d\alpha;$$

ce qui coïncide avec l'intégrale de l'équation (8), en mettant α, x et φ, à la place de s, r et $r\varphi$. M. Laplace a donné, le premier, sous forme finie, cette intégrale de l'équation (9), de laquelle il était facile de conclure, par analogie, l'intégrale de l'équation (7), qu'on a trouvée plus haut (nº 9).

Equation des surfaces élastiques vibrantes.

(12) Dans mon mémoire *sur les surfaces élastiques*, j'ai prouvé que les petites vibrations des plaques sonores, homogènes et d'une épaisseur constante, dépendent de cette équation du quatrième ordre :

$$\frac{d^2z}{dt^2}+b^2\left(\frac{d^4z}{dx^4}+2\frac{d^4z}{dx^2dy^2}+\frac{d^4z}{dy^4}\right)=0; \qquad (10)$$

b^2 étant une constante positive. En développant la valeur de z suivant les puissances de t, et prenant ensuite la somme de cette série par un procédé semblable à celui du nº 9, on

obtiendrait directement l'intégrale sous forme finie de cette nouvelle équation; mais il sera plus simple de la déduire de celle de l'équation (7), de la manière suivante.

En supposant la quantité φ indépendante de z, l'équation (7) se réduit à

$$\frac{d\varphi}{dt}=a\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right);$$

et son intégrale devient

$$\varphi=\iint e^{-\alpha^2-\beta^2}f(x+2\alpha\sqrt{at},\ \ y+2\beta\sqrt{at})\,d\alpha\,d\beta.$$

Si l'on différentie, par rapport à t, la valeur précédente de $\frac{d\varphi}{dt}$, il vient

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=a\left(\frac{d^3\varphi}{dx^2\,dt}+\frac{d^3\varphi}{dy^2\,dt}\right);$$

et si l'on substitue cette même valeur de $\frac{d\varphi}{dt}$, dans le second membre de cette équation, on a

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=a^2\left(\frac{d^4\varphi}{dx^4}+2\frac{d^4\varphi}{dx^2\,dy^2}+\frac{d^4\varphi}{dy^4}\right).$$

Or, en comparant ce résultat à l'équation (10), on voit que l'on satisfera à cette équation en faisant $a^2=-b^2$, et prenant ensuite $z=\varphi$; pour obtenir de cette manière l'intégrale complète de l'équation (10), nous ferons donc successivement $a=b\sqrt{-1}$, $a=-b\sqrt{-1}$, dans l'expression de φ; nous changerons la fonction arbitraire qu'elle contient, en même temps que le signe de $\sqrt{-1}$; puis nous prendrons pour z la somme des deux valeurs de φ; ce qui donne

$$z=\iint e^{-\alpha^2-\beta^2}f(x+2\alpha\sqrt{bt\sqrt{-1}},\ \ y+2\beta\sqrt{bt\sqrt{-1}})\,d\alpha\,d\beta$$
$$+\iint e^{-\alpha^2-\beta^2}F(x+2\alpha\sqrt{-bt\sqrt{-1}},\ \ y+2\beta\sqrt{-bt\sqrt{-1}})\,d\alpha\,d\beta;$$

f et F étant les deux fonctions arbitraires que comporte l'intégrale complète de l'équation (10), d'après la forme de cette équation.

Il est aisé de faire disparaître les imaginaires qui entrent dans cette expression de z; il suffit, pour cela, de mettre à la place de α et β, $\frac{\alpha}{\sqrt{+\sqrt{-1}}}$ et $\frac{\beta}{\sqrt{+\sqrt{-1}}}$ dans la première intégrale, et $\frac{\alpha}{\sqrt{-\sqrt{-1}}}$ et $\frac{\beta}{\sqrt{-\sqrt{-1}}}$ dans la seconde; changeant en outre les exponentielles imaginaires, en sinus et cosinus d'arcs réels, il vient

$$z=\iint \sin.(\alpha^2+\beta^2) f(x+2\alpha\sqrt{bt},\ y+2\beta\sqrt{bt})\, d\alpha\, d\beta$$
$$+\iint \cos.(\alpha^2+\beta^2)\, F\,(x+2\alpha\sqrt{bt},\ y+2\beta\sqrt{bt})\, d\alpha\, d\beta:$$

f et F sont des fonctions arbitraires qui ne sont pas les mêmes que les précédentes; mais les limites des intégrales n'ont pas changé, et sont toujours $\alpha=\pm\frac{1}{0}$, $\beta=\pm\frac{1}{0}$.

On donnera encore une autre forme à cette expression de z, en faisant

$$x+2\alpha\sqrt{bt}=p,\quad y+2\beta\sqrt{bt}=q;$$

ce qui la change en celle-ci:

$$z=\frac{1}{4bt}\iint f(p,q)\sin.\left(\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{4bt}\right) dp\, dq$$
$$+\frac{1}{4bt}\iint F\,(p,q)\cos.\left(\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{4bt}\right) dp\, dq.$$

J'avais déja donné, sous ces différentes formes, l'intégrale de l'équation (10); M. Fourrier a aussi intégré cette équation, par d'autres moyens, dans un mémoire *sur les vibra-*

tions des surfaces élastiques, qui n'a point encore été imprimé. (*)

(13) Les limites de l'intégrale relative à p et q devraient aussi être $p = \pm\frac{1}{0}$, $q = \pm\frac{1}{0}$; mais à cause que les fonctions arbitraires f et F peuvent être discontinues, et qu'elles ne contiennent pas d'autres variables que p et q, il est évident que ces limites sont illusoires ; car on peut supposer ces fonctions, nulles dans une étendue quelconque des valeurs de p et q; ce qui revient à prendre les intégrales dans des limites qu'on est libre de choisir arbitrairement. Il en résulte même que chaque élément de ces intégrales doubles doit satisfaire isolément à l'équation (10), en sorte que cette équation sera satisfaite en prenant

$$z = \frac{c}{t}\sin.\left(\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{4bt}\right) + \frac{c'}{t}\cos.\left(\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{4bt}\right),$$

ou la somme d'un nombre quelconque de termes semblables; c, c', p et q étant regardées comme des constantes arbitraires. C'est, en effet, ce qu'il est aisé de vérifier par la substitution directe de cette valeur particulière de z dans l'équation (10).

La même remarque s'appliquerait à l'intégrale de l'équation (7), si l'on y faisait

$$x+2\alpha\sqrt{at}=p, \quad y+2\beta\sqrt{at}=q, \quad z+2\gamma\sqrt{at}=r;$$

ce qui changerait la fonction arbitraire, contenue sous les signes d'intégration, en $f(p, q, r)$: les limites des inté-

---

(*) *Voyez* sur ce point le Bulletin de la Société philomatique, août et septembre 1818.

grales relatives à p, q, r, cesseraient d'être déterminées; et généralement il en est ainsi, toutes les fois que les fonctions arbitraires ne renferment que les seules variables auxiliaires par rapport auxquelles on doit intégrer.

(14) Dans les applications qu'on pourra faire de l'intégrale complète de l'équation (10), les deux fonctions arbitraires qu'elle contient, devront être déterminées, en général, d'après les valeurs initiales de z et $\frac{dz}{dt}$; mais, avant de faire $t=0$ dans l'expression de $\frac{dz}{dt}$, il est nécessaire de lui faire subir la transformation suivante.

Si l'on différentie, par rapport à t, la première expression trouvée pour z, et qu'on fasse $\frac{df}{dx}=f'$, $\frac{df}{dy}=f_{,}$, on a

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\sqrt{b\sqrt{-1}}}{\sqrt{t}}\Big(\iint e^{-\alpha^2-\beta^2}f'(x+2\alpha\sqrt{bt\sqrt{-1}},\,y+2\beta\sqrt{bt\sqrt{-1}})\,\alpha d\alpha d\beta$$
$$+\iint e^{-\alpha^2-\beta^2}f_{,}(x+2\alpha\sqrt{bt\sqrt{-1}},\,y+2\beta\sqrt{bt\sqrt{-1}})\,\beta d\alpha d\beta\Big);$$

en supprimant, pour abréger, la partie relative à la fonction F, qui est de la même forme, et se traitera de la même manière que celle-ci. J'intègre par parties; et à cause des limites $\alpha=\pm\frac{1}{0}$, $\beta=\pm\frac{1}{0}$, il vient

$$\int e^{-\alpha^2}f'(x+2\alpha\sqrt{bt\sqrt{-1}},\;\; y+2\beta\sqrt{bt\sqrt{-1}})\,\alpha d\alpha=$$
$$\sqrt{bt\sqrt{-1}}\int e^{-\alpha^2}f''(x+2\alpha\sqrt{bt\sqrt{-1}},\,y+2\beta\sqrt{bt\sqrt{-1}})\,d\alpha,$$

$$\int e^{-\beta^2}f_{,}(x+2\alpha\sqrt{bt\sqrt{-1}},\,y+2\beta\sqrt{bt\sqrt{-1}})\,\beta d\beta=$$
$$\sqrt{bt\sqrt{-1}}\int e^{-\beta^2}f_{,,}(x+2\alpha\sqrt{bt\sqrt{-1}},\,y+2\beta\sqrt{bt\sqrt{-1}})\,d\beta,$$

en supposant $\frac{df'}{dx}=f''$, $\frac{df_{,}}{dy}=f_{,,}$. Soit encore, pour abréger,

$$\frac{d^2 f(x,y)}{dx^2}+\frac{d^2 f(x,y)}{dy^2}=\varphi(x,y),$$
$$\frac{d^2 \mathrm{F}(x,y)}{dx^2}+\frac{d^2 \mathrm{F}(x,y)}{dy^2}=\Phi(x,y);$$

en ayant égard à-la-fois aux deux fonctions f et F, nous aurons

$$\frac{dz}{dt}=b\sqrt{-1}\iint e^{-\alpha^2-\beta^2}\varphi\left(x+2\alpha\sqrt{bt\sqrt{-1}},\ y+2\beta\sqrt{bt\sqrt{-1}}\right)d\alpha\, d\beta$$
$$-b\sqrt{-1}\iint e^{-\alpha^2-\beta^2}\Phi\left(x+2\alpha\sqrt{-bt\sqrt{-1}},\ y+2\beta\sqrt{-bt\sqrt{-1}}\right)d\alpha\, d\beta$$

pour l'expression de $\frac{dz}{dt}$ dont il faudra faire usage.

(15) Maintenant supposons qu'on ait

$$z=\psi(x,y),\quad \frac{dz}{dt}=\Psi(x,y),$$

quand $t=0$; il en résultera

$$\psi(x,y)=\left(f(x,y)+\mathrm{F}(x,y)\right)\iint e^{-\alpha^2}e^{-\beta^2}d\alpha\, d\beta,$$
$$\Psi(x,y)=b\sqrt{-1}\left(\varphi(x,y)-\Phi(x,y)\right)\iint e^{-\alpha^2}e^{-\beta^2}d\alpha\, d\beta.$$

En observant que $\iint e^{-\alpha^2}e^{-\beta^2}d\alpha\, d\beta=\pi$, la première de ces deux équations donne

$$f(x,y)+\mathrm{F}(x,y)=\frac{1}{\pi}\psi(x,y);$$

et si l'on fait

$$\pi b\sqrt{-1}\left(f(x,y)-\mathrm{F}(x,y)\right)=\mathrm{Z},$$

la seconde devient

$$\frac{d^2\mathrm{Z}}{dx^2}+\frac{d^2\mathrm{Z}}{dy^2}=\Psi(x,y). \qquad (11)$$

Admettons, pour un moment, que la fonction Ψ soit nulle; on satisfera à cette dernière équation en prenant $Z=0$; et alors on aura

$$f(x,y)=F(x,y)=\frac{1}{2\pi}\psi(x,y).$$

Au moyen de ces valeurs des fonctions f et F, l'expression générale de la quantité z devient

$$z=\frac{1}{2\pi}\Big(\iint e^{-\alpha^2-6^2}\psi(x+2\alpha\sqrt{bt\sqrt{-1}},\ y+26\sqrt{bt\sqrt{-1}})\,d\alpha\,d6$$
$$+\iint e^{-\alpha^2-6^2}\psi(x+2\alpha\sqrt{-bt\sqrt{-1}},\ y+26\sqrt{-bt\sqrt{-1}})\,d\alpha\,d6\Big);$$

ou bien, en faisant disparaître les imaginaires, comme dans le n° 12, elle se réduit à

$$z=\frac{1}{\pi}\iint \sin.(\alpha^2+6^2)\,\psi(x+2\alpha\sqrt{bt},\ y+26\sqrt{bt})\,d\alpha\,d6.$$

Cette valeur particulière de z satisfait à l'équation (10), et aux conditions $z=\psi(x,y)$, $\frac{dz}{dt}=0$, quand $t=0$; si l'on y met la fonction Ψ à la place de ψ, qu'on la multiplie par dt, et qu'on en prenne l'intégrale par rapport à t, de manière qu'elle s'évanouisse quand $t=0$, on aura une autre valeur particulière de z, qui, d'après la forme de l'équation (10), satisfera encore à cette équation, et qui donnera $z=0$, $\frac{dz}{dt}=\Psi(x,y)$, quand $t=0$; réunissant donc ces deux valeurs particulières de z, nous aurons sa valeur complète, savoir:

$$z=\frac{1}{\pi}\iint \sin.(\alpha^2+6^2)\,\psi(x+2\alpha\sqrt{bt},\ y+26\sqrt{bt})\,d\alpha\,d6$$
$$+\frac{1}{\pi}\iiint \sin.(\alpha^2+6^2)\,\Psi(x+2\alpha\sqrt{bt},\ y+26\sqrt{bt})\,d\alpha\,d6\,dt.$$

Si l'on change, comme précédemment (n° 12), les va-

riables α et 6 dans les variables p et q, cette valeur de z prendra la forme :

$$z=\frac{1}{4\pi bt}\iint \psi(p,q)\,\sin.\left(\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{4bt}\right)dp\,dq$$
$$+\frac{1}{4\pi b}\iiint \Psi(p,q)\,\sin.\left(\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{4bt}\right)\frac{dt}{t}\,dp\,dq.$$

Ici il faudra que les intégrales relatives à p et q soient prises depuis $p=-\frac{1}{0}$, $q=-\frac{1}{0}$, jusqu'à $p=+\frac{1}{0}$, $q=+\frac{1}{0}$, non pas pour que la valeur de z satisfasse à l'équation (10), mais pour qu'elle remplisse les conditions $z=\psi(x,y)$, $\frac{dz}{dt}=\Psi(x,y)$, quand $t=0$.

(16) La manière dont nous venons de déterminer la partie de z qui répond à la fonction Ψ, est la plus simple; mais elle n'est pas la plus directe; et elle pourrait laisser quelque doute sur la généralité du résultat auquel nous sommes parvenus. Pour qu'il n'en reste aucun, il faut que la valeur de la quantité Z soit tirée de l'intégrale complète de l'équation (11): en faisant abstraction de la fonction ψ, on aura ensuite

$$f(x,y)=-F(x,y)=\frac{Z}{2\pi b\sqrt{-1}};$$

et il s'agira de savoir ce que devient l'expression de z, relativement à ces valeurs des fonctions f et F.

Or, pour intégrer l'équation (11), il faut d'abord connaître une valeur particulière de Z qui satisfasse à cette équation : nous prendrons, pour cette valeur,

$$Z=\frac{1}{\pi^2}\iiiint \Psi(p,q)\left(\frac{1-\cos.g(x-p)\cos.h(y-q)}{g^2+h^2}\right)dg\,dh\,dp\,dq;$$

les intégrales étant prises depuis $g=0$, $h=0$, $p=-\frac{1}{0}$,

$q=-\frac{1}{0}$, jusqu'à $g=\frac{1}{0}$, $h=\frac{1}{0}$, $p=\frac{1}{0}$, $q=\frac{1}{0}$: il en résultera

$$\frac{d^2Z}{dx^2}+\frac{d^2Z}{dy^2}=\frac{1}{\pi^2}\iiiint\Psi(p,q)\cos.g(x-p)\cos.h(y-q)\,dg\,dh\,dp\,dq;$$

et, d'après un théorême connu sur la transformation des fonctions (*), le second membre de cette équation coïncide avec celui de l'équation (11); par conséquent, la valeur particulière de Z que nous avons choisie, satisfait effectivement à cette équation. Cela étant, nous aurons la valeur la plus générale de cette quantité, ou l'intégrale complète de l'équation (11), en ajoutant à cette valeur particulière une quantité de la forme :

$$\Pi\left(x+y\sqrt{-1}\right)+\Pi'\left(x-y\sqrt{-1}\right);$$

Π et Π' désignant des fonctions arbitraires.

Il suit de là, que la connaissance des valeurs de z et $\frac{dz}{dt}$, qui répondent à $t=0$, ne suffit pas à la détermination complète des fonctions f et F; mais il n'en résulte aucune indétermination dans l'expression générale de z; car on peut prouver que les fonctions arbitraires Π et Π', qui entreront dans les valeurs de f et F, se détruisent toujours dans l'intégrale complète de l'équation (10).

En effet, relativement à la fonction Π, par exemple, nous aurons

$$f(x,y)=-F(x,y)=\frac{r}{2\pi b\sqrt{-1}}.\Pi(x+y\sqrt{-1});$$

(*) Mémoires de l'Académie, année 1816, pag. 87.

et par suite

$$z=\frac{1}{2\pi b\sqrt{-1}}\Big(\iint e^{-\alpha^2}e^{-\beta^2}\,\Pi\,(x+2\alpha\sqrt{bt\sqrt{-1}}+y\sqrt{-1}+2\beta\sqrt{-bt\sqrt{-1}})\,d\alpha\,d\beta$$

$$-\iint e^{-\alpha^2}e^{-\beta^2}\,\Pi\,(x+2\alpha\sqrt{-bt\sqrt{-1}}+y\sqrt{-1}+2\beta\sqrt{bt\sqrt{-1}})\,d\alpha\,d\beta\Big);$$

or, en échangeant entre elles les lettres α et β dans la seconde intégrale, ce qui est permis, on voit que ces deux intégrales sont identiquement les mêmes; par conséquent, la partie de la valeur de z, qui répond à la fonction Π, est égale à zéro. Il en serait de même à l'égard de la fonction Π'; ainsi, en substituant les valeurs de f et F dans l'expression de z, il suffira de tenir compte du terme de Z qui renferme la fonction Ψ.

(17) Cette substitution donne, pour résultat immédiat, une valeur de z composée de deux intégrales sextuples, qui diffèrent l'une de l'autre par le signe de $\sqrt{-1}$, et qui se rapportent aux variables α, β, g, h, p et q; mais nous allons voir que leur somme se réduit à une intégrale triple, relative à p et q, et à la variable t.

D'abord, les limites étant $\pm\frac{1}{0}$, on a, par les formules connues,

$$\int e^{-\alpha^2}\cos.g\,(x+2\alpha\sqrt{bt\sqrt{-1}}-p)\,d\alpha=\sqrt{\pi}\cos.g\,(x-p)\,e^{-bgt\sqrt{-1}},$$

$$\int e^{-\beta^2}\cos.h\,(y+2\beta\sqrt{bt\sqrt{-1}}-q)\,d\beta=\sqrt{\pi}\cos.h\,(y-q)\,e^{-bht\sqrt{-1}}.$$

Je fais le produit de ces deux quantités; j'y change ensuite

le signe de $\sqrt{-1}$, ce qui donne un second résultat que je retranche du premier; il vient

$$-2\pi\sqrt{-1}\; \cos.g\,(x-p)\; \cos.h\,(y-q)\; \sin.\,(g^2+h^2)\,bt;$$

au moyen de quoi, la partie de la valeur de z, que nous voulons déterminer, devient

$$z=\frac{1}{\pi^2}\int\!\!\int \Psi\,(p,\,q)\,\mathrm{T}\,dp\,dq,$$

en faisant, pour abréger,

$$\mathrm{T}=\int\!\!\int \cos.g\,(x-p)\;\cos.h\,(y-q)\;\sin.\,(g^2+h^2)\,bt.\frac{dg\,dh}{b\,(g^2+h^2)}.$$

Si l'on différentie cette quantité par rapport à t, on aura

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt}=\int\!\!\int \cos.g\,(x-p)\cos.h\,(y-q)\cos.\,(g^2+h^2)\,bt.dg\,dh$$
$$=\int \cos.g\,(x-p)\cos.g^2\,bt.dg.\int \cos.h\,(y-q)\cos.h^2\,bt.dh$$
$$-\int \cos.g\,(x-p)\sin.g^2\,bt.dg.\int \cos.h\,(y-q)\sin.h^2\,bt.dh.$$

Or, ces intégrations relatives à g et h peuvent s'effectuer par les méthodes connues: les limites étant zéro et l'infini, on a évidemment

$$\int \cos.g\,(x-p)\cos.g^2\,bt.dg=\frac{1}{2}\int \cos.\Big(g^2\,bt+g\,(x-p)\Big)\,dg,$$

pourvu que l'on prenne la seconde intégrale depuis $g=-\frac{1}{0}$, jusqu'à $g=+\frac{1}{0}$; celle-ci est la même chose que

$$\int \cos.\Big(g^2\,bt-\frac{(x-p)^2}{4bt}\Big)\,dg=\cos.\frac{(x-p)^2}{4bt}\int \cos.g^2\,bt.dg$$
$$+\sin.\frac{(x-p)^2}{4bt}\int \sin.g^2\,bt.dg;$$

donc, à cause de $\int \cos. g^2\, bt.dg = \int \sin. g^2\, bt.dg = \sqrt{\frac{\pi}{2bt}}$, on aura

$$\int \cos. g\,(x-p)\cos. g^2\, bt.dg = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2bt}}\left(\cos.\frac{(x-p)^2}{4bt} + \sin.\frac{(x-p)^2}{4bt}\right);$$

et l'on trouvera de même

$$\int \cos. g\,(x-p)\sin. g^2\, bt.dg = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2bt}}\left(\cos.\frac{(x-p)^2}{4bt} - \sin.\frac{(x-p)^2}{4bt}\right).$$

Les intégrales relatives à h auront des valeurs semblables; en les substituant avec celles des intégrales relatives à g, dans la valeur précédente de $\frac{dT}{dt}$, il vient

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\pi}{4bt}\sin.\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{4bt};$$

et, par conséquent,

$$T = \frac{\pi}{4b}\int \sin.\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{4bt}.\frac{dt}{t};$$

l'intégrale étant prise de manière qu'elle s'évanouisse quand $t=0$, parce qu'on doit avoir alors $T=0$. Nous aurons donc enfin

$$z = \frac{1}{4\pi b}\iiint \Psi(p,q)\sin.\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{4bt}.\frac{dt}{t}\,dp\,dq;$$

résultat qui coïncide avec celui du nº 15.

(18) Si la quantité z est indépendante de l'une des deux variables x ou y, de y, par exemple, l'équation (10) se réduit à

$$\frac{d^2z}{dt^2} + b^2\frac{d^4z}{dx^4} = 0; \qquad (12)$$

son intégrale complète devient alors

$$z = \frac{1}{\pi}\iint \psi\,(x+2\alpha\sqrt{bt})\sin.(\alpha^2+6^2)\,d\alpha\,d6$$
$$+\frac{1}{\pi}\iiint \Psi\,(x+2\alpha\sqrt{bt})\sin.(\alpha^2+6^2)\,dt\,d\alpha\,d6;$$

le signe de $\sqrt{-1}$, ce qui donne un second résultat que je retranche du premier; il vient

$$-2\pi\sqrt{-1}\,\cos.g\,(x-p)\,\cos.h\,(y-q)\,\sin.\,(g^2+h^2)\,bt;$$

au moyen de quoi, la partie de la valeur de z, que nous voulons déterminer, devient

$$z=\frac{1}{\pi^2}\iint\Psi\,(p,\,q)\,\mathrm{T}\,dp\,dq,$$

en faisant, pour abréger,

$$\mathrm{T}=\iint\cos.g\,(x-p)\,\cos.h\,(y-q)\,\sin.\,(g^2+h^2)\,bt.\frac{dg\,dh}{b\,(g^2+h^2)}.$$

Si l'on différentie cette quantité par rapport à t, on aura

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt}=\iint\cos.g\,(x-p)\,\cos.h\,(y-q)\,\cos.\,(g^2+h^2)\,bt.dg\,dh$$
$$=\int\cos.g\,(x-p)\,\cos.g^2\,bt.dg.\int\cos.h\,(y-q)\,\cos.h^2\,bt.dh$$
$$-\int\cos.g\,(x-p)\,\sin.g^2\,bt.dg.\int\cos.h\,(y-q)\,\sin.h^2\,bt.dh.$$

Or, ces intégrations relatives à g et h peuvent s'effectuer par les méthodes connues: les limites étant zéro et l'infini, on a évidemment

$$\int\cos.g\,(x-p)\cos.g^2\,bt.dg=\frac{1}{2}\int\cos.\Big(g^2\,bt+g\,(x-p)\Big)\,dg,$$

pourvu que l'on prenne la seconde intégrale depuis $g=-\frac{1}{0}$, jusqu'à $g=+\frac{1}{0}$; celle-ci est la même chose que

$$\int\cos.\Big(g^2\,bt-\frac{(x-p)^2}{4bt}\Big)\,dg=\cos.\frac{(x-p)^2}{4bt}\int\cos.g^2\,bt.dg$$
$$+\sin.\frac{(x-p)^2}{4bt}\int\sin.g^2\,bt.dg;$$

donc, à cause de $\int \cos. g^2\, bt.dg = \int \sin. g^2\, bt.dg = \sqrt{\frac{\pi}{2bt}}$,
on aura

$$\int \cos. g\,(x-p) \cos. g^2\, bt.dg = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2bt}}\left(\cos.\frac{(x-p)^2}{4bt} + \sin.\frac{(x-p)^2}{4bt}\right);$$

et l'on trouvera de même

$$\int \cos. g\,(x-p) \sin. g^2\, bt.dg = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2bt}}\left(\cos.\frac{(x-p)^2}{4bt} - \sin.\frac{(x-p)^2}{4bt}\right).$$

Les intégrales relatives à h auront des valeurs semblables; en les substituant avec celles des intégrales relatives à g, dans la valeur précédente de $\frac{dT}{dt}$, il vient

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\pi}{4bt} \sin.\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{4bt};$$

et, par conséquent,

$$T = \frac{\pi}{4b}\int \sin.\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{4bt}.\frac{dt}{t};$$

l'intégrale étant prise de manière qu'elle s'évanouisse quand $t=0$, parce qu'on doit avoir alors $T=0$. Nous aurons donc enfin

$$z = \frac{1}{4\pi b}\iiint \Psi(p,q) \sin.\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{4bt}.\frac{dt}{t}\, dp\, dq;$$

résultat qui coïncide avec celui du n° 15.

(18) Si la quantité z est indépendante de l'une des deux variables x ou y, de y, par exemple, l'équation (10) se réduit à

$$\frac{d^2z}{dt^2} + b^2\frac{d^4z}{dx^4} = 0; \qquad (12)$$

son intégrale complète devient alors

$$z = \frac{1}{\pi}\iint \psi\left(x+2\alpha\sqrt{bt}\right) \sin.(\alpha^2+6^2)\, d\alpha\, d6$$
$$+ \frac{1}{\pi}\iiint \Psi\left(x+2\alpha\sqrt{bt}\right) \sin.(\alpha^2+6^2)\, dt\, d\alpha\, d6;$$

Si aucun des deux coëfficients A′ et C n'est égal à zéro, on pourra déterminer p et q, en faisant $P=0$ et $Q=0$; et alors l'équation que nous considérons sera réduite à la forme

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=a\frac{d^2\varphi}{dx^2}+b\varphi. \quad (13)$$

Si, au contraire, l'un de ces coëfficients est nul; qu'on ait, par exemple, $A'=0$, on ne pourra plus poser l'équation $P=0$; mais on pourra toujours déterminer p et q, en faisant $Q=0$ et $R=0$; ce qui réduira l'équation proposée à cette autre forme :

$$\frac{d\varphi}{dt}=a\frac{d^2\varphi}{dx^2}.$$

Ainsi, l'équation générale du second ordre peut toujours être ramenée à l'une ou l'autre de ces deux formes particulières : nous avons intégré précédemment la dernière équation; il ne nous reste donc plus qu'à considérer l'équation (13), dans laquelle a et b sont des coëfficients constants qui peuvent être positifs ou négatifs.

(20) Pour exprimer commodément son intégrale en série ordonnée suivant les puissances de t, nous ferons usage de cette notation abrégée : X étant une fonction quelconque de x, nous poserons

$$a\frac{d^2X}{dx^2}+bX=\delta X,$$

et nous désignerons par δ^2X, δ^3X, etc., ce que devient δX, lorsqu'on y remplace X par δX, δ^2X, etc.; en sorte qu'on ait généralement

$$a\frac{d^2\,\delta^{n-1}X}{dx^2}+b\,\delta^{n-1}X=\delta^nX.$$

Cela posé, l'intégrale complète de l'équation (13) sera

$$\varphi = fx + \frac{t^2}{1.2}\delta fx + \frac{t^4}{1.2.3.4}\delta^2 fx + \frac{t^6}{1.2.3.4.5.6}\delta^3 fx + \text{etc.}$$

$$+ tFx + \frac{t^3}{1.2.3}\delta Fx + \frac{t^5}{1.2.3.4.5}\delta^2 Fx + \text{etc.};$$

fx et Fx étant les deux fonctions arbitraires qu'elle doit renfermer.

La première partie de cette valeur de φ se déduit de la seconde, en la différentiant par rapport à t, et y remplaçant la fonction F par f; si donc nous faisons

$$T = tFx + \frac{t^3}{2.3}\delta Fx + \frac{t^5}{2.3.4.5}\delta^2 Fx + \text{etc.},$$

il nous suffira de chercher l'expression de T sous forme finie.

Or, d'après les analogies connues des puissances et des différences, on a généralement

$$\delta^n Fx = (ak^2 + b)^n Fx,$$

pourvu que, dans le développement du second membre de cette équation, les puissances de k soient des signes d'opérations qui indiquent des différentielles de Fx, divisées par dx; de cette manière, on aura

$$T = \left(1 + \frac{t^2}{2.3}(ak^2 + b) + \frac{t^4}{2.3.4.5}(ak^2 + b)^2 + \text{etc.}\right) tFx;$$

et en vertu des équations (2) du n° 2, si l'on fait, pour abréger, $k\sqrt{a}\,\cos.u + \sqrt{b}\,\sin.u\,\sin.v = y$, cette valeur de T pourra s'écrire ainsi :

$$T = \frac{1}{4\pi}\iint\left(1 + ty + \frac{t^2y^2}{2} + \frac{t^3y^3}{2.3} + \frac{t^4y^4}{2.3.4} + \text{etc.}\right) tFx\,\sin.u\,du\,dv;$$

les intégrales étant prises depuis $u=0$ et $v=0$, jusqu'à $u=\pi$ et $v=2\pi$. Cette dernière expression est la même chose que

$$T=\frac{t}{4\pi}\iint e^{ty} Fx \sin.u \, du \, dv;$$

mais, d'après les analogies citées, on a

$$e^{kt\sqrt{a}\cos.u} Fx=F(x+t\sqrt{a}\cos.u);$$

donc, à cause de

$$e^{ty}=e^{t\sqrt{b}\sin.u\sin.v}\, e^{kt\sqrt{a}\cos.u},$$

la valeur de T deviendra

$$T=\frac{t}{4\pi}\iint e^{t\sqrt{b}\sin.u\sin.v} F(x+t\sqrt{a}\cos.u) \sin.u \, du \, dv.$$

Il résulte de là, qu'en comprenant le diviseur 4π dans les fonctions arbitraires f et F, l'intégrale complète de l'équation (13) sous forme finie, sera

$$\varphi=\iint e^{t\sqrt{b}\sin.u\sin.v} F(x+t\sqrt{a}\cos.u)\, t \sin.u \, du \, dv$$
$$+\frac{d.}{dt}\iint e^{t\sqrt{b}\sin.u\sin.v} f(x+t\sqrt{a}\cos.u)\, t \sin.u \, du \, dv.$$

Les deux fonctions f et F se détermineront immédiatement, d'après les valeurs initiales de φ et $\frac{d\varphi}{dt}$; car, en faisant $t=0$, on a

$$\varphi=4\pi fx, \quad \frac{d\varphi}{dt}=4\pi Fx.$$

Si l'on fait $\frac{1}{a}=a'$, $-\frac{b}{a}=b'$, on pourra écrire l'équation (13) de cette autre manière :

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}=a'\frac{d^2\varphi}{dt^2}+b'\varphi;$$

et alors son intégrale complète aura la forme :

$$\varphi=\iint e^{x\sqrt{b'}\,sin.u\,sin.v}\,\mathrm{F}'\,(t+x\sqrt{a'}\,cos.u)\;x\,sin.u\,du\,dv$$
$$+\frac{d.}{dx}\iint e^{x\sqrt{b'}\,sin.u\,sin.v}\,f'\,(t+x\sqrt{a'}\,cos.u)\;x\,sin u\,du\,dv;$$

les limites des intégrales étant toujours les mêmes que précédemment, et f' et F' désignant les deux fonctions arbitraires. Ces fonctions se détermineront, dans ce cas, au moyen des valeurs de φ et $\frac{d\varphi}{dx}$, qui répondent à $x=0$; car, pour cette valeur de x, on aura

$$\varphi=4\pi f'\,t,\quad \frac{d\varphi}{dx}=4\pi\,\mathrm{F}'\,t.$$

(21) Si l'on veut vérifier si la valeur de φ satisfait à l'équation (13), on suivra la même marche que dans le n° 5 : on considérera seulement la partie de cette valeur qui dépend de la fonction F, et on l'écrira sous cette forme :

$$\varphi=\iint e^{t\sqrt{b}\,cos.u'}\,\mathrm{F}\,(x+t\sqrt{a}\,cos.u)\;t\,d\omega.$$

Pour effectuer les intégrations, on prendra à volonté l'un ou l'autre de ces deux systèmes de valeurs :

$$cos.u'=sin.u\,sin.v,\quad d\omega=sin.u\,du\,dv;$$
$$cos.u=sin.u'\,sin.v',\quad d\omega=sin.u'\,du'\,dv';$$

et l'on intégrera, dans le premier cas, depuis $u=0$, $v=0$, jusqu'à $u=\pi$, $v=2\pi$; et, dans le second, depuis $u'=0$, $v'=0$, jusqu'à $u'=\pi$, $v'=2\pi$: les résultats de ces deux modes d'intégrations seront les mêmes, quelle que soit la fonction F.

En différentiant deux fois de suite par rapport à t,

il vient

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=at\iint e^{t\sqrt{b}\cos.u'}\frac{d^2F}{dx^2}\cos.^2u\,d\omega$$

$$+2t\sqrt{ab}\iint e^{t\sqrt{b}\cos.u'}\frac{dF}{dx}\cos.u\cos.u'\,d\omega$$

$$+2\sqrt{a}\iint e^{t\sqrt{b}\cos.u'}\frac{dF}{dx}\cos.u\,d\omega$$

$$+bt\iint e^{t\sqrt{b}\cos.u'}F\cos.^2u'\,d\omega$$

$$+2\sqrt{b}\iint e^{t\sqrt{b}\cos.u'}F\cos.u'\,d\omega.$$

L'intégration par parties donne

$$2\int e^{t\sqrt{b}\cos.u'}F\cos.u'\sin.u'\,du'=e^{t\sqrt{b}\cos.u'}F\sin.^2u'$$

$$+t\sqrt{b}\int e^{t\sqrt{b}\cos.u'}F\sin.^3u'\,du'$$

$$-t\sqrt{a}\int e^{t\sqrt{b}\cos.u'}\frac{dF}{dx}\sin.^2u'\cos.u'\sin.v'\,du';$$

le premier terme de cette expression s'évanouit aux deux limites $u'=0$ et $u'=\pi$; en prenant donc $d\omega=\sin.u'\,du'\,du'$, et observant que $\sin.u'\sin.v'=\cos.u$, il en résultera

$$2\sqrt{b}\iint e^{t\sqrt{b}\cos.u'}F\cos.u'\,d\omega=bt\iint e^{t\sqrt{b}\cos.u'}F\sin.^2u'\,d\omega$$

$$-t\sqrt{ab}\iint e^{t\sqrt{b}\cos.u'}\frac{dF}{dx}\cos.u\cos.u'\,d\omega;$$

d'où l'on conclut ensuite

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=at\iint e^{t\sqrt{b}\cos.u'}\frac{d^2F}{dx^2}\cos.^2u\,d\omega$$

$$+t\sqrt{ab}\iint e^{t\sqrt{b}\cos.u'}\frac{dF}{dx}\cos.u\cos.u'\,d\omega$$

$$+2\sqrt{a}\iint e^{t\sqrt{b}\cos.u'}\frac{dF}{dx}\cos.u\,d\omega$$
$$+bt\iint e^{t\sqrt{b}\cos.u'}F\,d\omega.$$

Nous aurons de même, en intégrant de nouveau par parties,

$$2\int e^{t\sqrt{b}\sin.u\sin.v}\frac{dF}{dx}\cos.u\sin.u\,du = e^{t\sqrt{b}\sin.u\sin.v}\frac{dF}{dx}\sin.^2u$$
$$-t\sqrt{b}\int e^{t\sqrt{b}\sin.u\sin.v}\frac{dF}{dx}\sin.^2u\cos.u\sin.v\,du$$
$$+t\sqrt{a}\int e^{t\sqrt{b}\sin.u\sin.v}\frac{d^2F}{dx^2}\sin.^3u\,du;$$

supprimant donc le premier terme de cette expression, qui s'évanouit aux deux limites $u=0$ et $u=\pi$; observant que $\sin.u.\sin.v=\cos.u'$, et prenant $d\omega=\sin.u\,du\,dv$, nous en conclurons

$$2\sqrt{a}\iint e^{t\sqrt{b}\cos.u'}\frac{dF}{dx}\cos.u\,d\omega = -t\sqrt{ab}\iint e^{t\sqrt{b}\cos.u'}\frac{dF}{dx}\cos.u\cos.u'\,d\omega$$
$$+at\iint e^{t\sqrt{b}\cos.u'}\frac{d^2F}{dx^2}\sin.^2u\,d\omega;$$

ce qui réduit la valeur précédente de $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, à celle-ci:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=at\iint e^{t\sqrt{b}\cos.u'}\frac{d^2F}{dx^2}d\omega+bt\iint e^{t\sqrt{b}\cos.u'}F\,d\omega.$$

Or, cette valeur est en même temps celle de la quantité $\frac{d^2\varphi}{dx^2}+b\varphi$; il s'ensuit donc que l'équation (13) est satisfaite, du moins par la partie de la valeur de φ, qui dépend de la fonction F.

Il est inutile de soumettre à un calcul semblable la partie dépendante de la fonction f, par la raison que si l'on satis-

fait à une équation linéaire à coëfficients constants, par une valeur quelconque $\varphi=T$, on y satisfait aussi en prenant $\varphi=\frac{dT}{dt}$; ainsi l'intégrale complète que nous avons trouvée pour l'équation (13), satisfait effectivement à cette équation; ce qu'il s'agissait de vérifier.

(22) Il est remarquable qu'on soit obligé, pour cette vérification, d'effectuer une partie de l'intégration sur les variables u' et v', et une autre partie sur les variables u et v. Ce changement de variables, dont nous avons déja fait usage dans le n° 5, peut encore être utile dans d'autres occasions. Il est fondé sur une proposition dont l'énoncé le plus simple et le plus général est celui-ci : soit

$$x=\cos.u,\quad y=\sin.u\,\sin.v,\quad z=\sin.u\,\cos.v,$$

et $f(x, y, z)$ une fonction quelconque de ces trois quantités; l'intégrale double $\iint f(x,y,z)\sin.u\,du\,dv$, prise depuis $u=0$ et $v=0$, jusqu'à $u=\pi$ et $v=2\pi$, conservera toujours la même valeur, quelque permutation qu'on fasse entre les trois quantités x, y, z; c'est-à-dire, qu'entre ces limites d'intégrations, on aura toujours

$$\iint f(x, y, z)\sin.u\,du\,dv=\iint f(x, z, y)\sin.u\,du\,dv$$
$$=\iint f(z, x, y)\sin.u\,du\,dv,\quad \text{etc.}$$

Cette proposition serait évidente, si la fonction F était symétrique par rapport aux trois variables; on peut aussi la vérifier, en supposant cette fonction développable suivant les puissances entières et positives de ces variables; mais, pour la démontrer d'une manière immédiate et générale, il faut

recourir à une construction géométrique, comme nous l'avons déja fait dans un cas semblable (n° 1).

Concevons donc une sphère décrite d'un rayon pris pour unité; par le centre de cette sphère, menons arbitrairement trois axes rectangulaires; nous pourrons supposer que x, y, z, sont les cosinus des angles qu'un rayon de cette sphère fait avec les trois axes : u et v seront les coordonnées polaires qui déterminent la direction de ce rayon; $\sin. u\, du\, dv$ sera l'élément de la surface sphérique qui répond à son extrémité; et enfin l'intégrale double $\int\int f(x, y, z) \sin. u\, du\, dv$ s'étendra à tous les points de cette surface. Or, nous pouvons changer les coordonnées u et v, en deux autres coordonnées u' et v', et prendre celles-ci de manière que les trois cosinus x, y, z, soient

$$z = \cos. u', \quad y = \sin. u' \sin. v', \quad x = \sin. u' \cos. v';$$

l'élément de la surface sera alors $\sin. u'\, du'\, dv'$; et, pour étendre l'intégrale à la surface entière, il faudra la prendre depuis $u' = 0$ et $v' = 0$, jusqu'à $u' = \pi$ et $v' = 2\pi$. Le résultat de ces intégrations relatives à u' et v', sera alors le même que celui qu'on obtient en intégrant par rapport à u et v; en sorte que l'on aura

$$\int\int f(\cos. u, \sin. u \sin. v, \cos. u \cos. v) \sin. u\, du\, dv$$
$$= \int\int f(\sin. u' \cos. v', \sin. u' \sin. v', \cos. u') \sin. u'\, du'\, dv';$$

ce qui revient à dire que l'on peut permuter entre elles les deux quantités x et z sous la fonction f, sans changer la valeur de l'intégrale $\int\int f(x, y, z) \sin. u\, du\, dv$, pourvu qu'elle

soit prise entre les limites données. Il en sera de même évidemment, par rapport aux autres permutations qu'on peut faire subir aux trois quantités x, y, z.

Remarques générales sur les équations linéaires à coëfficients constants.

(23) Les procédés d'intégration que nous venons d'employer, peuvent s'étendre à un grand nombre d'autres équations linéaires à coëfficients constants; mais nous pensons qu'il suffit d'avoir considéré celles de ces équations qui se rapportent aux différentes questions de mécanique ou de physique, dont les géomètres se sont occupés jusqu'ici; nous n'ajouterons donc pas d'autres exemples aux précédents, et nous terminerons ce Mémoire par quelques remarques sur la forme des intégrales de ce genre d'équations aux différences partielles.

Considérons une équation de cette espèce, d'un ordre quelconque et contenant aussi un nombre quelconque de variables indépendantes; désignons ces variables par t, x, y, etc., et par φ la variable principale. Supposons que cette équation ne renferme aucun terme indépendant de φ ou de ses différences partielles; on y pourra toujours satisfaire en prenant

$$\varphi = \mathrm{A}e^{tp+gx+hy+\text{etc.}}$$

A, p, g, h, etc., étant des constantes indéterminées, et e la base des logarithmes népériens. Si l'on substitue cette valeur dans l'équation proposée, la constante A restera arbitraire; une seule des autres constantes, p par exemple, sera déterminée

en fonction de g, h, etc.; en sorte que, y compris le coëfficient A, cette valeur de φ renfermera un nombre de constantes arbitraires égal à celui des variables indépendantes. L'équation qui déterminera p sera d'un degré égal à l'indice de la plus haute différence partielle, relative à t, qui soit contenue dans l'équation proposée; en désignant ses racines par p, p', p'', etc., on pourra les employer successivement dans la valeur de φ; on pourra aussi changer arbitrairement les quantités A, g, h, etc., et prendre pour φ la somme des valeurs particulières qui résulteront de ces changements; ce qui donnera

$$\varphi = \Sigma A e^{tp+gx+hy+\text{etc.}} + \Sigma A e^{tp'+gx+hy+\text{etc.}} + \text{etc.}; \qquad (a)$$

les caractéristiques Σ indiquant des sommes qui s'étendent à toutes les valeurs, réelles ou imaginaires, de A, g, h, etc. Non-seulement cette expression satisfera à l'équation proposée; mais elle en sera l'intégrale complète, développée en série d'exponentielles; et ce qu'il y a de particulier à cette forme d'intégrale en série, c'est qu'elle ne renferme explicitement aucune fonction arbitraire, et que chacun des termes de la série satisfait isolément à l'équation aux différences partielles.

Il est permis de supposer que les quantités g, h, etc., changent par degrés infiniment petits, d'un terme à l'autre de chaque série; si l'on prend en même temps, pour le coëfficient A, une fonction arbitraire de ces quantités, l'expression de φ deviendra

$$\left.\begin{aligned}\varphi = &\int e^{tp+gx+hy+\text{etc.}} f(g, h, \text{etc.})\, dg\, dh \text{ etc.} \\ &+ \int e^{tp'+gx+hy+\text{etc.}} f'(g, h, \text{etc.})\, dg\, dh \text{ etc.} + \text{etc.}\end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Nous allons faire voir qu'au moyen du théorême que nous avons démontré au commencement de ce Mémoire (nº 1), l'équation du mouvement des fluides, qui en est l'objet principal, peut aisément s'intégrer par ce procédé.

(25) Reprenons donc l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right). \qquad (c)$$

Son intégrale générale, développée en série d'exponentielles, sera

$$\varphi=\Sigma A e^{atp+gx+hy+kz}+\Sigma A' e^{-atp+gx+hy+kz}:$$

les quantités A, A', g, h, k, sont indépendantes des variables t, x, y, z; on a $p=\sqrt{g^2+h^2+k^2}$, et les caractéristiques Σ indiquent des sommes qui s'étendent à toutes les valeurs possibles de A, A', g, h, k, réelles ou imaginaires. En changeant les coëfficients A et A', en d'autres B et B', nous pourrons écrire cette valeur de φ, sous la forme:

$$\varphi=\Sigma B\left(e^{atp}-e^{-atp}\right)e^{gx+hy+kz}$$
$$+\Sigma B'\left(e^{atp}+e^{-atp}\right)e^{gx+hy+kz},$$

or, si nous faisons, pour abréger,

$$g\cos.u+h\sin.u\sin.v+k\sin.u\cos.v=\alpha,$$

et que nous prenions, dans l'équation (1) du nº 1[er], $f\alpha=e^{at\alpha}$, nous aurons

$$\iint e^{at\alpha}\sin.u\,du\,dv=\frac{2\pi}{atp}\left(e^{atp}-e^{-atp}\right);$$

d'où nous conclurons

$$e^{atp} - e^{-atp} = \frac{ap}{2\pi} \cdot \iint e^{at\alpha}\, t\, sin.u\, du\, dv,$$

$$e^{atp} + e^{-atp} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d.}{dt} \iint e^{at\alpha}\, t\, sin.u\, du\, dv;$$

et par conséquent

$$\varphi = \frac{a}{2\pi} \iint \left(\Sigma B p e^{at\alpha} e^{gx+hy+kz} \right) t\, sin.u\, du\, dv$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \frac{d.}{dt} \iint \left(\Sigma B' e^{at\alpha} e^{gx+hy+kz} \right) t\, sin.u\, du\, dv;$$

les intégrales étant prises depuis $u=0$, $v=0$, jusqu'à $u=\pi$, $v=2\pi$.

Posons maintenant

$$\frac{a}{2\pi} \Sigma B p e^{gx} e^{hy} e^{kz} = f(x, y, z),$$

$$\frac{1}{2\pi} \Sigma B' e^{gx} e^{hy} e^{kz} = F(x, y, z);$$

de sorte que f et F soient deux fonctions arbitraires et indépendantes l'une de l'autre; nous en conclurons

$$\frac{a}{2\pi} \cdot \Sigma B p e^{g(x+x')} e^{h(y+y')} e^{k(z+z')}$$
$$= f(x+x', y+y', z+z'),$$

$$\frac{2}{2\pi} \cdot \Sigma B' e^{g(x+x')} e^{h(y+y')} e^{k(z+z')}$$
$$= F(x+x', y+y', z+z'),$$

quelles que soient les quantités x', y' z' : en prenant donc

$$x' = at\, cos.u, \quad y' = at\, sin.u\, sin.v, \quad z' = at\, sin.u\, cos.v,$$

et remettant pour α ce que cette lettre représente, nous

aurons les deux sommes Σ qui entrent dans la valeur de φ, exprimées au moyen de ces fonctions f et F; et en substituant leurs expressions dans celle de φ, elle deviendra définitivement

$$\varphi=\iint f\left(x+at\cos.u,\ y+at\sin.u\sin.v,\ z+at\sin.u\cos.v\right)t\sin.u\,du\,dv$$

$$+\frac{d.}{dt}\iint \mathrm{F}\left(x+at\cos.u,\ y+at\sin.u\sin.v,\ z+at\sin.u\cos.v\right)t\sin.u\,du\,dv;$$

résultat identique avec celui que nous avons trouvé précédemment, en suivant une marche différente.

Si, au lieu de quatre variables indépendantes t, x, y, z, l'équation (c) en contenait un plus grand nombre, et qu'elle fût toujours de la même forme :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\text{etc.}\right),$$

on pourrait encore l'intégrer par la méthode précédente; mais la valeur de φ serait exprimée par des intégrales quadruples, dans le cas de cinq ou de six variables, sextuples, dans le cas de sept ou de huit, et ainsi de suite.

MÉMOIRE

Sur les lois générales de la double réfraction et de la polarisation, dans les corps régulièrement cristallisés;

Lu à l'Académie royale des Sciences, le 29 mars 1819.

PAR M. BIOT.

PREMIÈRE PARTIE.

DEPUIS l'époque mémorable pour les sciences, où Malus, en trouvant la polarisation de la lumière, ouvrit cette mine féconde de phénomènes que la mort ferma trop tôt sur lui, les physiciens de tous les pays de l'Europe ont rivalisé d'activité et de zèle pour mettre au jour les trésors que la nature y avait cachés. Par un heureux effet de ce concours, un petit nombre d'années a suffi pour faire reconnaître, dans la lumière, une multitude de propriétés nouvelles dépendantes les unes des autres, et dérivant de cette propriété primitive; pour fixer des lois expérimentales qui les expriment avec exactitude; enfin pour en tirer déja des applications, qui, à la vérité, ne manquent jamais d'être la conséquence définitive des découvertes des sciences, mais qui, cependant, pouvaient ne pas être sitôt attendues. Cette nombreuse série de nouveaux faits, ayant spécialement appelé l'intérêt et l'atten-

tion des physiciens sur les propriétés générales de la lumière, on s'est attaché à approfondir plusieurs d'entre elles qui n'avaient pas été jusqu'alors suffisamment examinées, soit que l'on n'en conçût pas aussi bien l'importance, soit que l'on ne possédât pas tous les moyens nécessaires pour mettre en évidence leurs particularités les plus minutieuses, et quelquefois les plus caractéristiques. De sorte que l'on peut dire, à la gloire de notre compatriote, que, si sa découverte a avancé la physique de la lumière par les phénomènes nouveaux qu'elle y a fait connaître, elle ne lui a pas été moins utile par l'espèce de révolution qu'elle y a généralement excitée.

L'esprit mathématique qui dirige aujourd'hui toutes les recherches des sciences physiques, n'a pas peu contribué à accélérer ces nouveaux progrès, en portant leurs auteurs à définir avec précision les phénomènes, à les lier les uns aux autres par des déductions numériques, enfin à les réduire autant que possible en lois expérimentales. Telle est en effet la marche la plus simple, la seule même qui puisse assurer nos pas dans l'étude de la nature. Toute la philosophie naturelle, dit Newton, consiste en trois choses : trouver et déterminer d'abord les phénomènes, puis leurs lois, puis enfin les forces qui les produisent, et qui, étant une fois connues, réduisent tous leurs détails à n'être que des conséquences déterminables par le calcul.

Relativement aux phénomènes de la double réfraction et de la polarisation de la lumière, nous paraissons n'en être encore qu'aux deux premières périodes, je veux dire à la découverte des faits et à la détermination expérimentale de leurs lois : à la vérité, des idées très-utiles, parce qu'elles sont très-fécondes, ont été mises en avant, pour rattacher,

au moins dans quelques parties, les nouveaux résultats à la constitution même de la lumière, considérée soit dans le système de l'émission, soit dans celui des ondulations, ce qui est un pas important vers la troisième période, c'est-à-dire vers la connaissance des forces mêmes; mais, d'un côté, n'ayant sur la matérialité du principe de la lumière que des inductions, à la vérité puissantes et nombreuses, nous devons nous résoudre difficilement à définir, sous ce point de vue, toutes les particularités compliquées de phénomènes qui semblent dépendre de mouvements imprimés aux particules lumineuses autour de leurs centres de gravité; et, d'un autre côté, l'impossibilité où l'on est encore de soumettre le système des ondulations à un calcul général dans l'état actuel de l'analyse, rend également difficile et précaire la détermination des lois de condensation et de vîtesse qu'il faudrait attribuer aux ondes lumineuses, pour produire, tant dans leur trajet à travers les corps, que dans leur action sur l'organe, les phénomènes que nous observons.

Dans cette succession rapide de travaux, on conçoit que chaque filon de la nouvelle mine n'a pas été d'abord complétement exploité. Dans la plupart on n'a commencé par apercevoir qu'une face des phénomènes qu'ils renfermaient, et l'on s'est trompé en fondant sur cet aperçu des conjectures trop générales. Souvent aussi l'importance de certains faits ou de certaines considérations théoriques n'a pas d'abord été saisie tout entière. Ces oscillations de nos jugements semblent presque inévitablement attachées à la nature de notre esprit et à la manière dont il s'approche de la vérité. Toujours borné à un point de vue très-resserré, quand il aperçoit de nouveaux phénomènes, il ne peut en

embrasser d'abord qu'un petit nombre, qu'il ne saisit encore que par quelques points. Mais le temps, en amenant devant ses yeux de nouveaux faits, qui sont le développement des premiers, l'éclaire sur leur importance véritable; lui fait connaître ce qu'ils ont de particulier ou de général; et c'est ainsi que l'édifice de la science s'élève sur les travaux successifs et sur les erreurs même des individus.

Cette marche inévitable, et qui s'observe encore, quoique d'une manière moins sensible, dans les derniers pas des sciences même les plus parfaites, exige, dans celles qui sont tout-à-fait nouvelles, que chacun examine avec indulgence les tentatives de ceux qui l'ont précédé. Au lieu de relever amèrement ce qui a pu se glisser d'incertain dans leurs résultats, ou de trop général dans leurs conséquences, il faut plutôt y chercher ce qui s'y trouve de bon, de durable, et en extraire avec fidélité ce qui reste dans la science plus perfectionnée, soit en faits, soit en lois, soit en aperçus même. Outre qu'il y aurait peu de gloire à prétendre affaiblir le mérite de ces premiers travaux, en montrant qu'il fut incomplet ou inexact en certaines parties, il y aurait aussi peu de prudence; car, dans le développement rapide d'une science aussi récemment créée, et sur laquelle le calcul a encore si peu de prise, les résultats qui semblent les plus complets ne sont bientôt que des particularités; et les vues que l'on suppose les plus générales, n'ont cet avantage que pour un moment.

Ces réflexions nous ont été suggérées par un mémoire du docteur Brewster, qui ne nous a pas paru rédigé dans ces principes d'indulgence réciproque (1). Quoique ce mémoire

(1) On the laws of polarisation, etc... Philosophical transactions, 1818, pag. 199.

soit intitulé *des Lois de la polarisation et de la double réfraction, dans les corps régulièrement cristallisés*, il ne contient rien de nouveau quant aux lois de la polarisation même; mais, quant à la double réfraction, et aux phénomènes de coloration qui en sont la conséquence dans certaines circonstances que M. Arago a le premier découvertes, le docteur Brewster en a suivi les effets avec un rare bonheur et une persévérance infatigable dans un très-grand nombre de corps cristallisés. Il est même parvenu à représenter ces phénomènes par une loi, ou plutôt par une construction géométrique, qui, bien qu'empyrique dans ses éléments, et enveloppée, dans la forme sous laquelle il la présente, d'une complication inutile qui empêche d'en apercevoir l'expression simple, donne cependant une approximation réelle, et suffisante pour décrire les phénomènes de couleurs dans le très-grand nombre des cas que l'auteur a considérés. Mais, au lieu de montrer franchement ce que ces recherches empruntaient aux recherches précédentes, et ce qu'elles y ajoutaient de réellement nouveau, à quoi sans doute tous les physiciens se seraient empressés d'applaudir, l'auteur semble être parti de ses résultats comme d'un type définitif pour juger trop défavorablement, à ce qu'il me semble, les travaux de ses prédécesseurs; soit qu'il trouve dans leurs imperfections, alors inévitables, des motifs suffisants à ses yeux pour les rejeter tout-à-fait de la science; soit qu'en les admettant pour exacts, il les présente comme des aperçus heureux qui avaient besoin de recevoir de ses expériences une nouvelle démonstration. Le mérite réel du docteur Brewster, mérite auquel je ne crois pas qu'on me reproche d'être resté insensible, m'a paru exiger que, pour l'histoire de la science, on remît les choses sous leur

véritable point de vue; et je me suis laissé aller d'autant plus aisément à discuter ici celles de ses assertions qui m'ont paru susceptibles de critique, qu'elles portent précisément sur des recherches que j'aurais été obligé de rappeler, pour préparer l'exposition du nouveau travail que je desire soumettre en ce moment à l'Académie.

Après avoir rendu justice aux vues ingénieuses d'après lesquelles le docteur Young signala le premier à l'attention des physiciens la loi d'Huyghens sur la double réfraction; après avoir cité honorablement les expériences si précises par lesquelles M. Wollaston, et ensuite Malus, prouvèrent l'exactitude de cette loi, le docteur Brewster rappelle les recherches théoriques de M. Laplace sur la même matière. Mais il est loin de les présenter d'une manière exacte. Il suppose (p. 200) que M. Laplace a expliqué l'aberration du rayon extraordinaire par une force répulsive émanée de l'axe du cristal, et que la différence du quarré des vîtesses des deux rayons, proportionelle au quarré du sinus de l'angle formé par l'axe avec le rayon extraordinaire, représente l'action du cristal sur chacun d'eux. Or la théorie de M. Laplace ne renferme aucune supposition pareille sur la nature des forces; elle les envisage seulement comme devant être attractives et répulsives, et comme n'ayant d'action sensible qu'à de très-petites distances. La première considération, fondée sur l'analogie des autres phénomènes déja calculés dans le système de l'émission de la lumière, permet de leur appliquer en général le principe de la moindre action ; la seconde permet de négliger dans l'intégrale totale donnée par ce principe, la portion infiniment petite de la route du rayon qui devient curviligne près de la surface du cristal; cette dernière

circonstance est même ce qui rend ici le principe de la moindre action applicable, indépendamment de la loi que les forces suivent; parce qu'elle borne le calcul de l'intégrale aux portions rectilignes de la route du rayon dans lesquelles les actions des forces deviennent constantes, quelle que soit leur loi. La seule chose que M. Laplace ait besoin d'emprunter à l'expérience, c'est la loi de la vîtesse de la lumière dans le cristal. Celle-ci étant donnée, le principe de la moindre action assigne aussitôt la loi de réfraction que chacun des rayons doit suivre; ou, réciproquement, si la loi de réfraction est donnée, il fait connaître les vîtesses. On voit donc que la rectification des idées émises sur ce point par le docteur Brewster, est d'une importance capitale; car leur effet, involontaire sans doute, serait de présenter comme une hypothèse ce qui est une simple application des lois de la mécanique, application qui a l'avantage précieux de donner au résultat expérimental d'Huyghens le caractère d'une loi rigoureuse; et qui, étant modifié dans ses détails selon les circonstances, peut, ainsi que je le montrerai dans la suite de ce Mémoire, être étendu à tous les cristaux jusqu'à présent étudiés.

Considérant, au reste, cette théorie comme une nouvelle preuve du génie de son auteur, le docteur Brewster se demande si la loi d'Huyghens sur laquelle elle repose, est générale ou particulière au spath d'Islande; et il n'a pas de peine à montrer que ce dernier cas est au moins le plus vraisemblable : « A cela, ajoute-t-il (p. 201), on pourra répondre que « Malus a examiné avec le plus grand soin les propriétés du « quartz, de l'aragonite et de la baryte sulfatée; qu'il a dé- « montré l'identité de leur action avec celle du spath d'Is- « lande; et qu'ainsi l'extension de la loi d'Huyghens à tous les

« autres cristaux ne peut plus être regardée comme douteuse : « cette réponse aurait un très-grand poids, si l'identité dont « il s'agit était établie d'une manière satisfaisante; mais les « expériences de Malus sont *décidément* erronées; car, des « trois cristaux dont il est supposé avoir établi l'identité « d'action avec le spath d'Islande, il n'y en a pas moins de « deux qui ont plus d'un axe de double réfraction.

« Ici (c'est toujours le docteur Brewster qui parle), il se « présente une difficulté d'une espèce inattendue. Car, si les « expériences de Malus sur ces cristaux sont rejetées comme « incorrectes, quelle confiance pouvons-nous avoir dans ses « observations sur le spath d'Islande, lesquelles cependant « forment la base sur laquelle on fonde la vérité de la loi « d'Huyghens? Si le nitre et l'aragonite, qui ont l'un et l'autre « une double réfraction énergique, avaient été mis dans les « mains d'Huyghens, de Wollaston, de Malus, ou de tout au- « tre physicien quelque adroit qu'il pût être, il est évident « que leurs mesures se seraient accordées avec la théorie des « ondulations sphéroïdales. Laplace aurait rattaché cette « théorie aux principes de la mécanique, et elle aurait été « universellement reçue comme une loi physique rigoureuse « Cependant, après tout ce développement de génie mathé- « matique et physique, le résultat final de toutes ces recher- « ches eût été une erreur. Car on peut montrer par des expé- « riences décisives, que le nitre et l'aragonite ont deux axes de « double réfraction, et que l'aberration du rayon extraordi- « naire ne peut pas y être expliquée par un seul ellipsoïde.

« Ainsi donc, d'après les réflexions précédentes, il paraît « prouvé, non-seulement que la loi d'Huyghens n'est pas « démontrée comme loi générale de la double réfraction,

« mais qu'elle n'est pas démontrée comme expression indi-
« viduelle des phénomènes du spath d'Islande. »

Le mode de raisonnement employé dans ce passage, et la conclusion qui le termine, sont si remarquables, que j'ai cru devoir le rapporter textuellement. On voit qu'il ne va pas à moins qu'à renverser cette partie des lois de la double réfraction qui semblait la première et la plus solidement établie. Heureusement le docteur Brewster arrive plus tard à reconnaître ces lois par lui-même; mais il est, je crois, facile de montrer qu'elles ne couraient aucun risque, et même que les secours dont il a voulu les appuyer sont beaucoup moins solides que les expériences qui les établissaient.

Remarquons d'abord qu'on n'a pas attendu jusques à ce moment pour concevoir la possibilité de lois de réfraction différentes de celle d'Huyghens. Cette possibilité avait été signalée dès les premières recherches, et l'on en avait même donné des exemples. M. Laplace, dans son Mémoire, considère spécialement le cas d'un seul axe; mais il indique *expressément* celui où il en existerait plusieurs, de sorte que la vîtesse extraordinaire devînt une fonction des angles formés par ces axes avec le rayon réfracté extraordinairement. M. Ampère a déduit de ces principes la construction géométrique qu'il faudrait substituer à celle d'Huyghens quand on connaîtrait la loi des vîtesses. Enfin j'ai moi-même, il y a déja six ans, reconnu l'influence de deux axes dans les bizarreries apparentes que les lames minces de certains micas avaient offertes à M. Arago, et j'avais donné une expression analytique qui les représentait : et, quoique cette expression ne fût pas rapportée aux lignes que je sais maintenant être les véritables axes, cependant, comme elle différait des formules

que m'avaient données les cristaux soumis à la loi d'Huyghens, il devenait bien évident que cette loi n'était pas applicable à tous les cristaux. A la vérité, lorsque Malus chercha à vérifier la loi d'Huyghens, l'exactitude surprenante qu'il lui trouva l'avait naturellement porté à la considérer comme générale; il se borna donc à déterminer, pour quelques cristaux, les deux constantes dont elle dépendait; et le hasard ayant dirigé ses épreuves, soit sur le cristal de roche, qui n'a qu'un axe, soit sur l'aragonite et la baryte sulfatée, qui ont deux axes, mais peu inclinés l'un à l'autre, ou peu énergiques, la différence de leur double réfraction se trouva insensible dans les coupes particulières qu'il avait besoin d'y pratiquer, et ainsi cette différence lui échappa. Mais elle lui échappa parce qu'il n'y appliqua point généralement sa méthode, et non par une imperfection de la méthode même. Il est si vrai que ses épreuves furent limitées, que ce fut cette limitation seule qui l'empêcha de découvrir la distinction que j'ai depuis reconnue entre les deux espèces de double réfraction, l'attractive et la répulsive; car, après avoir observé la répulsive dans le spath d'Islande, il observa réellement l'attractive dans le cristal de roche; mais, ne soupçonnant pas que la loi pût y être différente, il prit l'image ordinaire pour l'image extraordinaire, méprise qui n'était possible que dans le sens unique où il observait pour déterminer la constante de chaque réfraction, et qu'il aurait certainement reconnue s'il eût répété l'observation dans tout autre sens. Quant à l'aragonite, il l'étudia davantage, mais toujours suivant des coupes parallèles ou perpendiculaires aux arêtes des aiguilles suivant lesquelles cette substance se présente ordinairement : or, les deux axes de double réfraction dans l'ara-

gonite, n'étant inclinés que de 9° 9′ sur l'axe des aiguilles, d'après les déterminations mêmes du docteur Brewster, il en résulte que lorsqu'on observe la double réfraction suivant la direction de cette ligne, comme Malus commençait par le faire, on doit l'y trouver très-faible ou même insensible, de même que si les deux axes étaient réunis en un seul, sur cette direction; et, lorsqu'on l'observe dans le sens perpendiculaire, en calculant la marche des rayons d'après la loi rigoureuse qui les régit dans cette circonstance, loi que je ferai connaître dans la suite de ce Mémoire, je trouve que, pour toutes les directions que le rayon réfracté peut prendre autour de l'axe des aiguilles d'aragonite, la séparation des axes de cette substance ne peut produire, au plus, qu'une variation de $\frac{1}{40}$ dans la valeur du petit terme qui exprime la diminution du quarré de la vîtesse; et je trouve encore qu'en observant, comme Malus essaya aussi de le faire, le doublement des images sous l'incidence perpendiculaire, à travers une plaque dont les faces étaient parallèles à l'axe des aiguilles d'aragonite, il n'aurait pu observer qu'une séparation de $\frac{14}{100}$ de millimètre en supposant à la plaque 50 millimètres d'épaisseur. Or il a certainement employé des plaques d'une épaisseur beaucoup moindre, puisqu'on est loin d'en pouvoir obtenir de pures de cette dimension : ainsi il a dû supposer l'écart des images nul dans cette expérience, ce qui était encore un résultat conforme à la loi d'Huyghens. La même limitation et le même sens d'essais appliqués à la baryte sulfatée, lui dissimula de même l'influence des deux axes de cette substance, quoiqu'ils y soient plus inclinés l'un à l'autre, parce que l'intensité beaucoup moindre de la double réfraction y masquait plus aisément

l'influence de leur écart; mais ces résultats, quoique imparfaits, ne fournissent aucune induction contre sa méthode même, puisque leur imperfection vient de ne l'avoir pas complètement appliquée : par conséquent on n'en peut tirer aucun motif légitime pour jeter le moindre doute sur les expériences de Malus relativement au spath d'Islande, bien loin d'y trouver contre elles une preuve décisive, comme l'a avancé le docteur Brewster. Ces expériences, si précises, et variées dans tant de sens divers, resteront donc, avec celles de M. Wollaston et d'Huyghens lui-même, comme la vérification la plus sûre et la plus complète de la loi de la double réfraction que Huyghens a établie.

Voyons maintenant quels moyens le docteur Brewster propose pour suppléer aux imperfections qu'il imagine dans ces expériences : il n'en est, suivant lui, que deux de possibles : « L'un, dit-il (p. 202), serait de découvrir des méthodes « pour amplifier et mesurer avec une grande exactitude la « déviation du rayon extraordinaire, quand la lumière tra- « verse le cristal suivant une direction peu inclinée à son « axe; l'autre moyen, qui est plus praticable et plus exact, « consiste à examiner les apparences que présente la lumière « polarisée, lorsqu'elle est transmise suivant les axes appa- « rents ou réels de double réfraction. »

Malgré l'alternative établie dans le passage, j'aurai bientôt occasion de montrer que l'on peut imaginer encore d'autres méthodes très-différentes de ces indications, et même très-dissemblables entre elles, pour mesurer avec la plus grande exactitude la déviation du rayon extraordinaire, non-seulement près de l'axe, mais dans toutes les directions possibles à travers la substance des cristaux.

En ce moment, je me bornerai à examiner le degré de précision que l'on peut atteindre par le mode d'observation des couleurs que le docteur Brewster propose; mais, pour se former à cet égard une idée précise, il faut rappeler ici l'origine et la nature même du phénomène sur lequel cette méthode est fondée.

M. Arago, le premier, découvrit en 1811, qu'un rayon blanc primitivement polarisé, se résout en deux faisceaux colorés de teintes complémentaires, lorsqu'on lui fait traverser des lames minces de mica, de chaux sulfatée, de cristal de roche, et qu'on le divise ensuite par un prisme doué de la double réfraction. Un an après, en étudiant la nature de ces couleurs et mesurant les épaisseurs auxquelles chacune d'elles est produite, sous une même incidence et pour une même direction des lames, je reconnus qu'elles étaient identiques avec celles des anneaux colorés, qui s'observent, soit par réflexion, soit par transmission, dans les lames très-minces, de toutes les substances, et dont Newton a fait une analyse si détaillée et si profonde. Les mêmes couleurs, dans les deux classes de phénomènes, se trouvèrent répondre à des épaisseurs proportionnelles, quoique d'une dimension absolue très-différente. Le docteur Young, en appliquant à ces résultats son ingénieuse idée des interférences, parvint à lier ensemble les deux séries par un rapport théorique. Jusqu'alors mes recherches avaient été bornées à l'incidence perpendiculaire, qui, dans tous les phénomènes de lumière, présente toujours les lois les plus simples. En les étendant aux incidences obliques, je trouvai que, dans chaque cristal à un seul axe, l'apparition de chaque couleur était généralement déterminée par deux éléments, dont l'un était la longueur du trajet de

la lumière dans le cristal, et l'autre le quarré du sinus de l'angle formé par l'axe du cristal avec le rayon réfracté extraordinairement. Le produit de ces deux éléments, comparé à la table d'épaisseur de Newton, exprimait toujours l'ordre et les valeurs relatives des teintes pour un même cristal, avec une approximation presque parfaite; et, pour différents cristaux, les valeurs absolues variaient proportionnellement au coëfficient constant qui multiplie le quarré du sinus, dans l'expression du quarré de la vîtesse du rayon extraordinaire. Le docteur Young a rattaché pareillement ces résultats à sa théorie des interférences, d'une manière qui en rend la raison sensible; la longueur du trajet et l'accroissement de la vîtesse sont, dans cette théorie, les deux éléments qui déterminent la teinte, parce que c'est leur produit qui mesure le nombre d'ondulations gagnées ou perdues par un des rayons comparativement à l'autre. Au reste, en considérant cette loi comme simplement expérimentale, j'en constatai l'exactitude sur des plaques de cristal de roche et de spath d'Islande taillées dans des sens très-divers, et sur certaines espèces de micas qui n'ont qu'un axe perpendiculaire à leurs lames. Elle me parut convenir aussi aux lames de chaux sulfatée quand on n'y fait pas entrer les rayons sous des incidences très-obliques; mais, en plaçant ces lames dans des circonstances où l'obliquité des rayons par rapport à leurs surfaces devenait très-grande, je reconnus qu'il s'y développait alors de nouvelles séries de teintes, d'une progression différente, dont je donnai des tables fondées sur l'expérience même, et que, par conjecture, je supposais pouvoir tenir à quelque particularité dépendante de la constitution lamelleuse de cette substance. On doit à M. Brewster d'avoir découvert que cette marche singulière

des teintes est due à l'influence de deux axes qui existent dans le plan des lames de chaux sulfatée; et il en a donné dans son mémoire une table fondée sur ce principe, laquelle est remarquablement d'accord avec celle que j'avais construite sur l'observation. Mais, parce que je n'ai pas songé, dans cette circonstance, à la possibilité de deux axes, et parce qu'en essayant quelques autres cristaux, seulement dans deux sens rectangulaires, je suis tombé dans la même erreur, le docteur Brewster emploie contre moi (p. 203, 204, 235, 236) la même forme de raisonnement dont il a fait usage plus haut contre Malus; c'est-à-dire, qu'il accuse la méthode dont je me suis servi, au lieu d'accuser l'application incomplète que j'en avais faite : de plus, d'après un passage de mon Traité de physique, où je n'ai voulu évidemment parler que des cristaux à un axe, le docteur Brewster infère que j'ai considéré la loi relative à ces cristaux comme générale et applicable à toutes les substances (1). Or, je puis aisément prouver le contraire; car les premières formules que l'on ait eues

---

(1) Cette assertion du docteur Brewster se trouve au commencement de la pag. 204 de son mémoire. Il cite en note mon Traité de physique, tom. IV, pag. 377. Or, dans cette page je ne vois que la ligne 10, et dans cette ligne les trois mots *tout autre cristal* qui puissent offrir une ombre d'apparence à sa conclusion. Mais, comme, dans toute cette discussion, le cas d'un seul axe est celui que j'examine, puisque le titre même du chapitre porte : *des Teintes que produisent les plaques parallèles à l'axe*, il est évident que ce sont les cristaux à un seul axe que j'ai en vue; et la preuve, c'est qu'à la fin du chapitre, pag. 387, ligne 28, j'exclus le mica de ces lois, *par la raison qu'il a deux axes*. (*Voyez* aussi mon mémoire sur les cristaux attractifs et répulsifs, *Mémoires de l'Institut*, 1813-1814-1815, où je dis formellement la même chose.)

pour représenter, dans quelques cas, la bizarre succession des teintes produites par un cristal à deux axes, le mica de Sibérie, ont été données par moi, dans mon Traité de physique; et ces formules sont très-différentes de la loi de Huyghens. Elles prouvent donc matériellement, que je ne regardais pas cette loi comme applicable à tous les corps, quoique j'aie pu me tromper en supposant, d'après un examen trop peu attentif, qu'elle s'appliquait à plusieurs d'entre eux auxquels elle ne convient réellement pas.

Les phénomènes de couleur que présentent les cristaux à un seul axe, étant ramenés par les lois précédentes à dépendre des mêmes éléments qui déterminent leur double réfraction, on conçoit que ceux-ci peuvent, à l'aide de cette liaison, se conclure de l'observation des teintes. Une seule plaque d'un cristal qui n'a qu'un axe, suffit ainsi pour déterminer complètement, l'intensité de la double réfraction qu'il exerce, sa nature attractive ou répulsive, et l'inclinaison de l'axe sur le plan de la plaque. On peut voir dans mon Traité de physique des exemples de pareilles déterminations. D'après cela on peut être surpris que M. Brewster dise dans son mémoire (p. 218), qu'il a coupé plus de quinze plaques dans un grand morceau de zircone, sans pouvoir découvrir son axe. Chacune de ces lames suffisait pour le déterminer.

Un des éléments des cristaux à un seul axe, c'est, comme je viens de le dire, la nature de la double réfraction qu'ils exercent. Si l'on prend une plaque de spath d'Islande taillée perpendiculairement à l'axe, et qu'on la fasse traverser par un rayon lumineux dirigé suivant cet axe même, on observe que ce rayon ne se double pas; mais, pour peu qu'on sorte de l'incidence perpendiculaire, il se double, et le fais-

ceau qui subit la réfraction extraordinaire se trouve rejeté plus loin de l'axe que le faisceau qui éprouve l'autre réfraction. Le même effet s'observe également dans toutes les directions d'incidence autour de l'axe; l'écart des deux rayons a toujours lieu dans le même sens, et sa quantité angulaire, qui augmente avec l'incidence, est uniquement déterminée par l'inclinaison des rayons sur l'axe du cristal. Maintenant, substituez à la plaque de spath d'Islande une plaque de cristal de roche taillée de même, la symétrie des phénomènes autour de l'axe subsistera encore, mais le sens de l'écart des rayons sera opposé; c'est-à-dire que le rayon extraordinaire sera amené plus près de l'axe du cristal que le rayon ordinaire. La même opposition se soutient pour toutes les directions que l'on peut donner aux rayons à travers ces deux cristaux, de même que pour tous les sens des coupes que l'on peut y pratiquer; et tous les cristaux à un seul axe, jusqu'à-présent observés, offrent l'un ou l'autre de ces modes d'actions : en conséquence, lorsque je présentai, il y a quatre ans, ce phénomène à l'académie, j'appelai *double réfraction attractive* celle qui rapproche de l'axe le rayon extraordinaire, et *double réfraction répulsive* celle qui l'en éloigne. Il me sembla que ces dénominations exprimaient seulement le fait, et l'exprimaient de la manière la plus immédiate. Le docteur Brewster n'est pas de cet avis, et il y substitue la distinction de cristaux positifs et cristaux négatifs. Je doute que ce changement soit adopté par les physiciens. L'indication du sens suivant lequel l'écart des rayons doit s'opérer, est extrêmement utile dans les applications, pour prévoir la direction relative de ces rayons, et diriger ainsi l'emploi des formules; or cette direction est naturellement rappelée à l'esprit par la dénomi-

nation que j'ai adoptée, et on peut l'en déduire effectivement pour chaque cas, d'après la seule inspection de la position de l'axe dans le point où la réfraction s'opère. On peut même, et cette considération est souvent utile, peindre à la pensée la séparation progressive et croissante des rayons, à mesure que leur direction s'écarte de l'axe dans chacune de ces classes de cristaux, en disant que les phénomènes se passent, *comme s'il émanait* de l'axe une force attractive dans les uns et répulsive dans les autres; ce qui ne signifie pas toutefois qu'une pareille force existe et s'exerce immédiatement.

Le docteur Brewster dit, dans son mémoire, que cette distinction des cristaux à double réfraction attractive et à double réfraction répulsive, est entièrement hypothétique (p. 204 et 218); la raison qu'il en donne, c'est que les phénomènes de la double réfraction, que j'ai appelée attractive, peuvent être représentés par les actions répulsives émanées de deux axes, et que la double réfraction répulsive peut être représentée de même par des actions émanées de deux axes attractifs (p. 218) : il est vrai qu'en imaginant de pareilles droites, qu'il appelle des axes; en imaginant qu'il en émane de certaines forces, dont l'influence sur les teintes est proportionnelle au quarré du sinus de l'angle que les rayons forment avec elles; en imaginant un mode de composition de ces forces tout-à-fait particulier et arbitraire, le docteur Brewster parvient à retrouver, par cette combinaison d'hypothèses, les phénomènes que la loi de Huyghens donne immédiatement pour les cristaux à un axe (1). Mais, précisément parce qu'il

(1) *Voy.* l'énoncé du principe du docteur Brewster, p. 237 de son mémoire, et son application aux cristaux à un axe, p. 247 et 248, où l'auteur retrouve ainsi, pour la variation des teintes, la même formule qui résulte de la loi de Huyghens.

retrouve ces mêmes phénomènes, toute la composition d'actions qu'il a imaginée est inutile. Car, en la réduisant en calcul, elle ne fait que reproduire identiquement la loi de Huyghens sans y rien ajouter. C'est un mode d'expression compliqué substitué à un résultat simple, et non une généralisation réelle; de même qu'on ne généralise pas l'équation d'une parabole ou d'une ellipse, quand on rapporte ces courbes à un système de coordonnées quelconques, au lieu de les rapporter à leurs axes, qui en présentent l'expression la plus abrégée; et enfin, de ce que l'énoncé simple et précis d'un fait physique, tel que les deux modes de double réfraction, dont j'ai découvert l'existence, ne convient pas avec les nouvelles dénominations arbitraires d'axes introduites par le docteur Brewster dans sa construction compliquée, on n'est pas, je crois, pour cela en droit d'en conclure, logiquement, que c'est l'énoncé simple qui est hypothétique, et le compliqué qui est le véritable.

Tous les phénomènes de double réfraction et de polarisation que les cristaux à un seul axe produisent, sont symétriques autour d'une ligne droite unique. C'est cette ligne que j'ai nommée leur axe, selon l'usage adopté par Malus et suivi par tous les autres physiciens. Les effets de cette symétrie sur la lumière polarisée, peuvent être aperçus d'un seul coup-d'œil dans l'expérience suivante: on taille une plaque dont les faces soient perpendiculaires à l'axe du cristal. On la fait traverser perpendiculairement par un large faisceau de lumière polarisée en un seul sens, et l'on analyse la lumière transmise en plaçant devant l'œil une lame de tourmaline, ou un prisme doué de la double réfraction. Alors les rayons qui viennent se réunir dans votre œil, ayant traversé la

plaque suivant des directions inégalement inclinées à l'axe, mais symétriques autour de lui, les courbes d'égale teinte se trouvent être des cercles concentriques séparés par une croix noire en quatre segments égaux. Les premiers anneaux de ce genre ont été vus par M. Arago dans le cristal de roche. Le docteur Brewster en a observé d'analogues dans la topaze, et M. Wollaston dans le spath d'Islande. Le hasard me les ayant aussi présentés après eux, j'ai cherché à déduire leurs diamètres de la loi générale que j'avais précédemment trouvée pour les teintes à toute distance de l'axe; et les mesures effectives se sont parfaitement accordées avec le calcul, comme on peut le voir dans mon Traité de physique, où j'ai rapporté ces expériences. J'y ai montré également la cause de la croix noire, et des autres particularités du phénomène, d'après les règles ordinaires de la polarisation mobile.

Dans les cristaux qui ont deux axes de double réfraction, il se forme de pareils anneaux suivant deux directions différentes, qui sont les directions mêmes des axes; et ils y sont produits par une loi tout-à-fait semblable, comme je le prouverai dans la suite de ce mémoire. Ces anneaux peuvent devenir circulaires sous certaines conditions déterminées, mais ils offrent le plus souvent des configurations très-bizarres : le docteur Brewster les a étudiés dans un fort grand nombre de substances; et il a donné dans son mémoire une règle empyrique, à la vérité, mais très-fidèle pour prévoir toutes les variétés de leurs figures (1). Alors, en les

(1) Cette règle détermine seulement la configuration des anneaux : elle n'indique rien et ne peut rien indiquer relativement au nombre et à la direction des lignes noires qui les traversent, puisque l'existence et la forme

supposant déterminés par les mêmes éléments que dans les cristaux à un seul axe, c'est-à-dire par la longueur du trajet, et l'accroissement du quarré de la vîtesse extraordinaire, il a conclu de leur expression empirique celle de la vîtesse elle-même. Tel est le fondement de la méthode qu'il propose pour déterminer la loi de la double réfraction dans toutes les substances.

Cette méthode est, en effet, excellente pour reconnaître si un cristal donné, possède un ou plusieurs axes pourvu toutefois que le hasard vous fasse tomber sur les directions dans lesquelles les anneaux se montrent. Alors vous apercevez d'un seul coup-d'œil l'ensemble des phénomènes que le cristal produit. Mais cette indication ne suffit pas pour déterminer, encore moins pour mesurer avec quelque rigueur, la loi que la réfraction extraordinaire suit à toute distance de l'axe. En effet, comme ce n'est jamais que très-près des axes que l'on peut observer les anneaux, la double réfraction qui les produit est alors nécessairement d'une faiblesse extrême; de sorte que c'est seulement dans cet état de faiblesse qu'on se réduit à la juger et à la conclure de leurs dimensions. Or cette nécessité peut donner lieu à de très-grandes erreurs; car les plus petites irrégularités dans la constitution intérieure du cristal, ou dans l'épaisseur des plaques employées, que dis-je? la seule influence d'une pression mécanique, ou de toute autre cause aussi faible, suffisent pour déformer totalement les anneaux et en changer

---

de ces lignes dépendent de la loi de la polarisation dans les cristaux à deux axes; loi que je donnerai dans la suite de ce Mémoire, et dont il n'est point question dans celui de M. Brewster.

complètement la nature. Dans le cristal de roche, par exemple, on découvre, dans le sens de l'axe, des phénomènes particuliers de polarisation qui, s'ils sont produits par une force de double réfraction, en supposent une au moins mille ou douze cents fois plus faible que celle du cristal de roche même. Cependant, par les directions que cette cause si faible donne à la polarisation, elle empêche totalement les premiers anneaux de se former; et, pour exprimer ceci, en général, d'une manière mathématique, si l'expression du quarré de la vitesse extraordinaire contenait diverses fonctions des angles formés par les axes avec le rayon réfracté, ou si quelque cause étrangère à la double réfraction se trouvait combinée accidentellement avec elle, de manière à modifier ainsi l'expression de la vitesse, il se pourrait que les termes de cette expression les plus sensibles dans les grands angles, ne se trouvassent plus l'être dans les petits, et qu'ils s'y trouvassent masqués par les autres, de manière à devenir tout-à-fait inappréciables. Ce seraient donc alors ces autres termes seuls, ou presque seuls, qui détermineraient la forme des anneaux que l'on observerait autour des axes du cristal, quoique la cause qui les produit pût être si faible qu'elle ne fût pas capable d'altérer sensiblement les déviations des rayons observées à quelque distance de l'axe (1). Enfin l'observation des anneaux ne peut pas mettre en évidence les deux sens de déviation que le rayon extraordinaire éprouve, non-seulement par rapport aux axes, mais par rapport à son plan d'incidence primitif, dont on sait qu'en

(1) Le beril offre un exemple frappant à l'appui de ces considerations, comme on le verra plus loin.

général la double réfraction l'écarte ; ce qui est même un des effets les plus caractéristiques de ce genre d'action, et par conséquent, un des plus propres à en vérifier les lois. D'après ces motifs, il me semble que l'observation des anneaux, peut bien offrir en général une confirmation utile et satisfaisante de ces lois lorsqu'elles sont déja connues, mais qu'elle est incapable d'en donner une mesure précise et une démonstration rigoureuse.

J'ai imaginé un procédé, qui me paraît réunir ces avantages; et, après en avoir fait des applications nombreuses qui m'ont convaincu de sa justesse, j'ai l'honneur de le soumettre à l'Académie.

La pièce principale de mon appareil consiste en deux règles d'ivoire AX, AZ (*fig.* 1), divisées en parties égales et disposées à angles droits. La première AX, se pose sur une table à-peu-près horizontale, alors l'autre AZ devient verticale. Une colonne H*h*, dont les bases supérieures et inférieures sont parallèles et formées par deux glaces planes, se promène sur la division AX, et peut être ainsi amenée à diverses distances connues de la division AZ.

Cette disposition suffit lorsque la réfraction extraordinaire que l'on veut observer, s'opère dans le même plan que la réfraction ordinaire, ce qui a lieu, comme on sait, dans certaines circonstances. Comme ce cas est le plus simple, et suffit pour faire comprendre la méthode, je l'expliquerai d'abord.

Si la substance que l'on veut observer avait une réfraction très-énergique, on pourrait, comme l'a fait Malus, se borner à en former des plaques parallèles, sur lesquelles on opérerait comme nous allons le dire. Mais ce cas étant infi-

niment rare, je supposerai en général que l'on taille le cristal en prisme, et même, pour rendre la réfraction plus sensible, je donne ordinairement à ce prisme un grand angle BCD, un angle droit, par exemple, ce qui a l'avantage particulier de simplifier les calculs. A la vérité, la lumière ne peut pas traverser immédiatement les deux faces d'un pareil prisme quand il est placé dans un milieu aussi peu réfringent que l'air, parce que les rayons entrés par la première face BC se réfléchissent intérieurement quand ils arrivent à la seconde; c'est pourquoi je fixe à cette seconde face, représentée par CD dans la figure, un prisme ou un parallélipipède de verre CDGF dont l'angle réfringent D est à-peu-près égal à l'angle C du prisme de cristal, de sorte que la face antérieure CB du cristal, et la face postérieure DG du verre sont à-peu-près parallèles. La jonction des deux prismes s'opère en les chauffant, et faisant fondre entre leurs surfaces quelques petits grains bien purs de mastic en larmes, qui s'étendent par la pression en une couche très-mince, et fort transparente. Cette couche, après le refroidissement, suffit pour faire adhérer fortement les deux surfaces, et pour déterminer le passage de la lumière de l'une à l'autre, de sorte que la vision devient possible à travers le double prisme. Alors on pose celui-ci sur la base supérieure de la colonne H*h*, en l'y appliquant par sa face BC; ce qui exige que la face CF du verre soit dans le prolongement de BC, ou s'élève un peu au-dessus; et, pour que le cristal reste fixé au devant de la division AZ dans la section qu'on juge convenable, on met d'avance sur le bord de la glace quelques petites gouttes d'huile de térébenthine épaissie, qui suffisent pour l'y faire adhérer : cela fait, on place l'œil en V, derrière la face postérieure du verre,

et l'on regarde à travers le double prisme la division verticale AZ. Elle paraît double, en vertu des deux réfractions que le cristal fait éprouver à chacun des rayons qui en émanent: de sorte qu'à proprement parler, on voit une division ordinaire, et une extraordinaire, qui se superposent sur une direction commune, du moins quand la déviation latérale est nulle, comme nous le supposons d'abord. Mais, en outre, l'inégalité des deux réfractions, jointe à celle de la distance, fait que les traits homologues des deux réfractions ne s'écartent pas par-tout également les uns des autres. Si, en certaines parties, l'écart est d'un demi-intervalle des traits, un peu plus loin il est d'un intervalle entier, et en ce point-là les deux divisions coïncident, les traits coïncidents toutefois n'étant pas homologues. Plus loin, la coïncidence cesse, les traits des deux divisions s'écartent de nouveau; mais à quelque distance de là, leur écart ayant augmenté d'un intervalle entier, ils se rejoignent, et, de nouveau, les deux divisions coïncident. Si, par exemple, le nº 451 de la division extraordinaire que je désignerai par 451ᵉ, coïncidait, dans le premier cas, avec 450 de la division ordinaire, que j'appellerai 452ᵒ, de sorte que l'écart des deux divisions fût d'une partie, ce sera, je suppose, 502ᵉ qui coïncidera avec 500ᵒ à la seconde coïncidence; et ainsi l'écart, sous cette incidence, sera de deux parties : il deviendra de trois, si les numéros des divisions coïncidentes diffèrent de trois unités, et ainsi du reste. Maintenant, pour en suivre les conséquences, reprenons un de ces cas, le second, par exemple : puisque les traits 502ᵉ et 500ᵒ coïncident, étant vus à travers le double prisme, cela prouve que le rayon extraordinaire émané du trait 502ᵉ, arrive à l'œil en V, suivant la même direction que le rayon ordi-

naire émané de la division 500°; et, comme l'écart de ces deux rayons n'a pas pu être produit ou modifié par le prisme de verre, puisque ce prisme exerce sur eux une seule et même espèce de réfraction à cause qu'il n'est pas cristallisé, il s'ensuit que si les deux rayons 502e et 500° coïncident en arrivant à l'œil, ils ont aussi coïncidé en traversant le verre, et par conséquent ils coïncidaient déja à leur émergence du cristal: c'est cette condition qui fournit un moyen très-précis pour vérifier la loi que suit, dans le cristal, le rayon extraordinaire. En effet, on peut d'abord déterminer la direction d'incidence de chacun de ces deux rayons. Car si l'on considère OI, par exemple, on sait qu'il part du point O, dont la position est connue sur la division verticale, et que, de là, il arrive au point d'incidence I dont la position est pareillement déterminée sur la colonne, par sa hauteur et sa distance à la division verticale; on a des données analogues pour le rayon incident E*i*, qui subit la réfraction extraordinaire, soit que l'on suppose son point d'incidence le même que pour OI, soit qu'on évalue la petite différence de ces points par le calcul, en ayant égard à l'épaisseur du prisme de cristal, comme je le dirai plus tard. Maintenant, si l'on suit, à travers le cristal, le rayon OI qui subit la réfraction ordinaire, ce que l'on peut faire d'après la loi de Descartes, on peut le conduire ainsi jusqu'à son émergence à la seconde surface en I'. Alors il n'y a qu'à calculer le rayon extraordinaire qui rentrerait dans le cristal par cette surface en dérivant du même rayon extérieur I' I"; et, reconduisant ce rayon à travers le prisme jusqu'à la première surface, par la loi de réfraction extraordinaire que l'on suppose, il devra, en ressortant par cette surface, aller coïncider dans son émergence avec le

rayon incident E*i*. Il n'est pas inutile de remarquer que cette condition, et l'observation même, sont tout-à-fait indépendantes de la force réfringente plus ou moins grande du prisme de verre. Ce prisme ne sert absolument qu'à recevoir les rayons réfractés dans le cristal, et à rendre leur émergence possible.

Dans cet exemple j'ai supposé la coupe du prisme telle que la réfraction extraordinaire s'opérât dans le plan d'incidence comme la réfraction ordinaire. C'est là le cas le plus simple, et de beaucoup le plus commode, pour déterminer les éléments de la double réfraction dans chaque cristal, lorsque la loi de cette réfraction est supposée connue. Mais, pour vérifier la loi elle-même, ou pour mettre en évidence quelqu'une de ses conséquences particulières, on peut vouloir observer aussi dans des plans obliques à la coupe du prisme : alors j'adapte à la division verticale l'appareil additionnel représenté *fig.* 2. A′ C′ est une lame métallique divisée en millimètres et terminée en C′ par un plan circulaire P′ P″ P‴, divisé en demi-degrés : RR est une autre lame divisée aussi en millimètres, et mobile autour du centre C′, de la division circulaire : sur cette lame, et dans le sens de sa longueur, est tracée une ligne droite fixe RR qui passe par le centre C′. Quand on veut observer des déviations latérales, on applique horizontalement la branche A′ C′ sur la division verticale AZ du grand appareil, et on l'y fixe par une pince qui la maintient dans une direction perpendiculaire à cette division, comme le représente la *fig.* 2; puis, regardant obliquement la règle RR à travers le prisme cristallisé, et par un point d'incidence déterminé sur ce prisme, au moyen d'un trait ou de quelque autre petit signal, on tourne lentement la règle autour de son centre, jusqu'à ce que son axe RR se trouve

précisément suivre la direction de la double réfraction à l'endroit que l'on considère; ce qui arrive lorsque cet axe, vu à travers le prisme, ne paraît plus doublé, son image extraordinaire en ce point-là se projetant sur son image ordinaire. Quand on a atteint cette position, on y laisse la règle, et l'on remarque celles de ses divisions dont l'écartement est tel qu'elles coïncident les unes sur les autres. Je suppose que cela ait lieu le plus parfaitement possible en E′O′. Alors les numéros des traits E′O′ donneront leur distance au centre C′ du cercle; la division circulaire mesurera l'inclinaison de leur axe RR sur l'axe horizontal C′A′; et la division tracée sur cet axe donnera la distance du centre C′ à la division verticale AZ. D'après cela, la position des deux points E′O′ sera connue par rapport à la division verticale; et leur écart le sera par la coïncidence observée sur RR. On aura donc tous les éléments de la double réfraction qui se produit, dans la position du prisme, et dans la direction des rayons que l'on a choisie pour l'expérience; et l'on pourra comparer ces résultats à la théorie.

En décrivant cette opération, il ne faut pas oublier de fixer avec soin la position du point d'incidence sur la surface antérieure du cristal : car cette position est un des éléments indispensables du calcul, puisqu'elle détermine la direction d'incidence du rayon. On peut, comme je l'ai dit, se servir d'un trait tracé sur le prisme même, ou d'un fil de soie tendu sur sa surface, ou y coller une petite bande de papier qui limite les rayons dont on observe l'incidence simultanée. On emploie des moyens analogues pour fixer les hauteurs des points d'incidence, quand on observe les coïncidences sur la division verticale même, sans déviation latérale; mais

alors la bande de papier qui sert de limite, doit être dirigée horizontalement.

On peut aussi observer des coïncidences sur la division horizontale AX, qui sert de base à la colonne H*h*. Alors les points d'incidence sur la première surface du prisme de cristal se limitent par les mêmes procédés.

Enfin il faut autant qu'il est possible rendre les bords de ce prisme tranchants ou peu épais, afin que les corrections relatives à son épaisseur soient extrêmement petites, ou même insensibles. En effet, elles seraient tout-à-fait nulles si l'on observait par le bord même, puisque alors les deux rayons réfractés n'auraient qu'un trajet infiniment petit à faire dans le cristal, pour arriver à la seconde surface où ils se réunissent et émergent simultanément. Par le même motif, il ne faut pas, dans les expériences, placer la colonne H*h* très-près de la division verticale sur laquelle les coïncidences s'observent, ou employer de trop petites colonnes, si l'on observe sur la division horizontale, parce que les corrections d'épaisseur, très-peu sensibles à une médiocre distance, le deviennent davantage lorsque la distance est très-petite.

A ces précautions il faut joindre celle de faire les faces des prismes bien planes, ce qui influe beaucoup sur la netteté de la vision. Il faut aussi mesurer les angles de leurs faces par la réflexion de la lumière, au moyen du goniomètre de M. Wollaston, de Malus, ou de tout autre instrument pareil. Il faut enfin connaître avec précision le sens de ces faces, relativement aux plans qui contiennent l'axe ou les axes du cristal. C'est à quoi l'on parvient sans aucune difficulté en clivant quelques lames de la substance cristallisée, et déterminant d'abord, par observation, les sens suivant lesquels

leur interposition ne trouble point la polarisation imprimée à des rayons lumineux. On croise ensuite ces lames avec d'autres plaques cristallisées, et le développement des couleurs fait connaître la direction et le sens des actions que le cristal exerce.

Les avantages de la méthode que je viens d'exposer tiennent à deux choses : d'abord à ce que la précision de la mesure porte sur l'écart même des deux rayons, et non pas sur l'incidence absolue dans laquelle, en effet, une petite erreur n'est presque jamais d'aucune importance; en second lieu, à ce que les alternatives de superposition et de séparation des traits remplissent, pour ainsi dire, l'office de verniers qui font juger avec une extrême exactitude le point où chaque coïncidence est la plus parfaite. La précision augmente encore par la facilité que l'on a d'éloigner plus ou moins la colonne H*h* de la division verticale; ce qui permet de varier l'étendue des coïncidences par la distance, et de fixer ainsi la distance précise où chacune d'elles a lieu le plus exactement.

D'après ce que nous avons dit plus haut, la marche du rayon qui subit la réfraction ordinaire est l'élément duquel on part pour calculer la marche de l'autre rayon. Il faut donc déterminer d'abord la constante de cette réfraction. On le peut sur l'appareil même : il suffit, pour cela, de tailler dans le prisme de cristal une face assez peu inclinée aux autres pour pouvoir observer directement la réfraction à travers l'angle qu'elles forment (*fig.* 3). Alors, posant cet angle sur la colonne H*h* par une de ses faces, et plaçant l'œil derrière l'autre, en V, par exemple, on observe par réfraction l'image ordinaire d'un trait O d'une des divisions, et l'on regarde à quel trait R répond le prolongement du rayon

émergent I'V qui arrive à l'œil. Les positions des traits O, R, étant ainsi connues avec la hauteur du point d'incidence et l'angle réfringent du prisme, on peut calculer le rapport de réfraction par les formules que j'ai données dans mon Traité de physique, tom. III, pag. 209. Il faut seulement bien s'assurer que la réfraction que l'on observe est l'ordinaire. C'est à quoi l'on peut parvenir, soit en constatant la constance du rapport qu'elle suit sous diverses incidences, et pour des sens de coupes quelconques, ou d'après la position que le rayon ainsi réfracté affecte par rapport à l'autre, en vertu de la loi de la réfraction extraordinaire supposée connue; ou enfin d'après la loi de la polarisation à laquelle le rayon ordinaire est soumis, et que l'on peut vérifier en regardant, à travers une plaque de tourmaline, la division réfractée. L'observation précédente de la réfraction laisse subsister la dispersion; mais si le prisme n'est pas très-ouvert, et si l'on ne se place pas très-loin de la division que l'on observe, cela n'empêchera pas que les traits réfractés ne puissent encore se distinguer avec une netteté suffisante. Au reste, on évite ces inconvénients en plaçant au devant de l'œil un verre coloré qui ne laisse passer qu'une seule espèce de lumière simple, par exemple une seule espèce de rouge. Seulement il faut alors ramener les résultats par le calcul à ce qu'ils auraient été, si l'on eût observé la réfraction des rayons moyens.

J'ai appliqué cette méthode à des cristaux à un axe et à plusieurs axes; je commencerai par les premiers, parce qu'ils sont les plus simples.

Parmi eux j'ai d'abord choisi pour sujet d'observation le cristal de roche, parce que sa double réfraction est attractive; car la double réfraction répulsive me paraît suffisam-

ment vérifiée par les expériences de Malus sur le spath d'Islande : on sait qu'il l'a trouvée parfaitement concordante avec la loi d'Huyghens, et par conséquent avec la loi des vîtesses donnée par M. Laplace. Mais j'ai fait voir plus haut que ses observations sur le cristal de roche, qui exerce la double réfraction attractive, avaient été infiniment plus limitées. La seule preuve que l'on eût de la conformité de cette réfraction avec la loi d'Huyghens, en modifiant toutefois l'ellipsoïde qui la représente, c'étaient les phénomènes de couleurs que j'ai donné le moyen de développer, à toute distance de l'axe, par le croisement des plaques cristallisées. Or, quoique cette méthode offre en elle-même plusieurs vérifications qui attestent sa certitude; quoique le principe des interférences, qui paraît de jour en jour se confirmer davantage, en montre la liaison avec la variation des vîtesses, cependant on pouvait dire que ces procédés étaient encore trop récents pour servir à vérifier autre chose que leurs propres résultats; et l'on pouvait desirer d'éprouver la double réfraction attractive par une épreuve aussi directe et aussi évidente que l'autre, c'est-à-dire par la déviation même des rayons. Il était donc naturel d'appliquer au cristal de roche mes nouveaux procédés : cela avait même l'avantage de les soumettre eux-mêmes à une épreuve qui pouvait paraître assez délicate, à cause du peu de force de la double réfraction dans cette substance, et par conséquent du peu d'écart que l'on est habitué à lui voir produire. Mais cette difficulté n'existe plus quand on parvient à faire passer les rayons à travers des prismes rectangulaires : car alors leur écart augmente assez pour que j'aie pu l'observer de 25 millimètres à des distances de six décimètres, et cela dans des sens de coupe qui

n'offraient pas le *maximum* de la double réfraction, et dans des circonstances où, par le mode d'observation, un dixième de millimètre était une quantité très-appréciable.

On sait que, dans la loi de Huyghens, chacune des deux réfractions dépend d'une seule constante, qui se détermine par des observations de réfraction faites dans un plan perpendiculaire à l'axe du cristal. Alors les deux réfractions suivent la loi de Descartes; c'est-à-dire que le sinus d'incidence est au sinus de réfraction en raison constante. Il n'y a de différence que dans le coëfficient de cette proportionnalité. Pour réaliser cette épreuve, j'ai fait tailler un prisme rectangulaire de cristal de roche, dont l'arête était parallèle à l'axe des aiguilles, qui est aussi celui de la double réfraction; et j'ai observé les déviations des rayons dans un sens perpendiculaire à l'arête de ce prisme. Par une singulière conséquence de la théorie, il arrive que, dans ce sens de coupe, et lorsque l'angle réfringent est droit, l'observation des coïncidences donne immédiatement, et presque sans calcul, la valeur du coëfficient qui exprime l'accroissement du quarré de la vîtesse; ce qui est un avantage singulièrement précieux, puisque ce coëfficient est la seule indéterminée dont la connaissance soit nécessaire pour calculer la marche des rayons dans tous les autres sens quelconques, et qu'on l'obtient ainsi immédiatement.

En faisant cette expérience, et la répétant sous des incidences diverses avec le même prisme, on trouve que toutes s'accordent à donner au coëfficient la même valeur. On trouve une égale constance en employant des prismes non rectangulaires, pourvu que leur arête soit toujours bien parallèle à l'axe des aiguilles: le sens dans lequel on taille leurs faces au-

tour de cet axe, n'apporte aucun changement aux résultats. Ainsi les deux réfractions suivent l'une et l'autre, dans ce sens de coupe, le rapport constant des sinus, et celle qui est extraordinaire a la même énergie tout autour de l'axe. Ce mode et cette symétrie d'action sont les deux premiers caractères de la loi de Huyghens : seulement ici l'observation montre que la vîtesse extraordinaire, considérée dans le système de l'émission, surpasse la vîtesse ordinaire; le contraire a lieu dans le spath d'Islande et dans tous les cristaux que j'ai appelés répulsifs.

Connaissant par ces observations la différence du quarré des deux vîtesses perpendiculairement à l'axe, j'ai ajouté cette différence au quarré de la vîtesse ordinaire conclue du rapport constant de son sinus que j'avais préalablement déterminé ; j'ai obtenu ainsi l'expression du quarré de la vîtesse extraordinaire perpendiculairement à l'axe, et j'en ai conclu cette vîtesse même, qui est l'élément général de la double réfraction dans tous les autres sens.

Alors, pour achever de vérifier si la loi de Huyghens était exactement observée, j'ai taillé des prismes dans d'autres sens et dans des sens fort divers, de manière que le plan d'incidence se trouvât dans la section principale, ou hors de cette section; j'ai aussi observé les séparations des rayons produites par la réflexion intérieure, lorsque l'inclinaison devient assez grande pour que les rayons se réfléchissent totalement. Toutes ces expériences se trouveront rapportées textuellement dans la suite de ce Mémoire. On verra que toutes s'accordent de la manière la plus minutieuse avec les résultats calculés d'après la loi de Huyghens : d'où l'on peut conclure avec assurance que cette loi, déja si exactement réa-

lisée dans le spath d'Islande, ne l'est pas avec moins d'exactitude dans le cristal de roche; avec cette seule différence, que, dans la première de ces substances, l'ellipsoïde, dans la construction de Huyghens, est aplati à ses pôles; au lieu que, dans la seconde, il est alongé.

J'ai dit plus haut que, lorsque les rayons polarisés traversent le cristal de roche dans le sens de son axe, ou très-près de cet axe, ils éprouvent des changements de polarisation pareils à ceux que j'ai reconnus depuis dans plusieurs liquides et dans les vapeurs même. Et, ce qui est bien singulier, le sens dans lequel ces changements s'opèrent, n'est pas le même pour toutes les aiguilles de cristal de roche; de sorte que l'on retrouve entre elles, sous ce rapport, la même opposition qui existe entre des liquides différents, par exemple, entre l'huile essentielle de citron et celle de térébenthine. D'après une expérience ingénieuse de M. Fresnel, si ces phénomènes sont produits par une double réfraction, elle doit être excessivement faible. Aussi n'ai-je pu en reconnaître aucune trace sensible dans mes expériences; et les aiguilles qui agissaient dans un sens, comme celles qui agissaient dans l'autre, m'ont paru également soumises à la loi de Huyghens. Il est vrai qu'à quelque distance de l'axe, l'action principale due à la double réfraction masque ces petits accidents, qui ne peuvent être aperçus que lorsqu'elle devient excessivement faible; mais j'ai à dessein mesuré, aussi exactement que je l'ai pu, les anneaux formés autour de l'axe dans des plaques de cristal de roche dont les rotations étaient opposées; et, quoique les diamètres des anneaux fussent considérables, puisque celui du sixième ordre était d'un demi-mètre, et que j'aie mis un grand soin à les mesurer, ils se sont trouvés de dimensions

exactement égales avec des plaques d'épaisseurs égales, quel que fût le sens de leur rotation. Cependant le déplacement des plans de polarisation était tel que, dans une des expériences, le premier anneau avait complètement disparu, et, dans une autre, cette disparition s'étendait jusqu'aux trois premiers; mais tous ceux qui se montraient plus loin ne paraissaient avoir subi aucune modification dans leur grandeur. Au reste, je compte reprendre ces observations par un procédé beaucoup plus exact, et qui peut-être rendra sensibles ces influences, si toutefois elles peuvent le devenir.

On sait que MM. Arago et Fresnel ont découvert, pour la mesure des réfractions, un procédé d'une extrême exactitude, fondé sur les phénomènes de la diffraction de la lumière. Ce procédé, appliqué à des lames cristallisées douées de la double réfraction, rend sensibles les plus petites différences de vîtesse des rayons qui les ont traversées dans des sens connus; ou, lorsque la marche des rayons est supposée connue théoriquement ainsi que les vîtesses, elle détermine le sens et la quantité du déplacement qui doit en résulter dans les bandes diffractées que l'on observe; deux choses qui peuvent se constater et se mesurer avec la plus parfaite précision. Ce procédé est donc extrêmement propre à vérifier les lois de la double réfraction dans toutes les substances, soit à un axe, soit à deux axes, et MM. Arago et Fresnel avaient depuis long-temps le dessein d'en faire cette application; mais quelques dispositions particulières à introduire dans les détails d'expériences, les ont empêchés jusqu'ici de se livrer à ce travail. Cependant ils ont bien voulu, à ma sollicitation, faire, avec leurs appareils, un simple essai sur une lame de cristal de roche parallèle à l'axe, que je leur ai re-

mise; ils ont mesuré le déplacement des bandes diffractées produit par cette lame, d'abord sous l'incidence perpendiculaire, et ensuite sous une incidence extérieure de 20°, ce qui produisait un angle de réfraction de 12° 46′ par rapport à l'axe du cristal : or le rapport des déplacements, produit par ces deux incidences différentes, s'est trouvé à $\frac{1}{40}$ près le même qu'indiquait la loi de Huyghens; et, en outre, la vîtess eextraordinaire, perpendiculairement à l'axe, étant conclue de la même réfraction ordinaire que j'avais employée dans mes calculs, s'est trouvée seulement différente de $\frac{1}{4000}$ de celle que j'avais trouvée. D'où l'on voit d'abord que l'application de la loi de Huyghens au cristal de roche n'est pas douteuse; et ensuite que la diffraction, ainsi employée par MM. Arago et Fresnel, fournit, pour déterminer la loi de la double réfraction dans toutes les substances, une seconde méthode très-exacte, quoique également différente de celles que le docteur Brewster supposait les seules possibles.

Avant d'entreprendre l'observation de la double réfraction dans les cristaux à deux axes, où elle est naturellement plus compliquée, j'ai voulu éprouver la méthode des coïncidences sur cristal à un axe dont la double réfraction fût la plus faible possible, et j'ai choisi le beril pour exemple; mais il m'a présenté des phénomènes auxquels je ne m'étais pas attendu.

Le beril se trouve communément en aiguilles hexaèdres de diverses couleurs; les plus ordinaires sont de couleur verdâtre, mais on en a aussi de jaunes et même de tout-à-fait blanches. L'axe de double réfraction est, comme dans le cristal de roche, parallèle à l'axe des aiguilles; aussi, lorsqu'on taille une plaque de beril perpendiculaire à cet axe, et qu'on la place entre deux plaques de tourmaline croisées à angles

droits, si l'on regarde la lumière des nuées à travers ce système, on découvre, tout autour de l'axe, des anneaux colorés, concentriques, produits par l'accroissement progressif de la double réfraction qui en émane; mais, soit qu'il existe toujours dans les berils de petites irrégularités de structure, soit que leur axe ne soit pas rigoureusement unique, ce que je n'ai pas encore eu la possibilité de décider définitivement, on observe, sur-tout dans les premiers anneaux, des altérations de forme sensibles; et, de plus, la croix noire, qui caractérise les cristaux à un seul axe, semble communément éprouver quelques modifications à son centre, quand on tourne l'aiguille autour de son axe; ce qui pourrait également dépendre de quelques petites irrégularités dans la structure, ou même d'une simple compression extérieure qui aurait agi sur les aiguilles pendant leur formation (1).

Quoi qu'il en soit, ces anomalies paraissent n'avoir d'influence prédominante que dans l'extrême faiblesse de la force principale, c'est-à-dire tout près de l'axe; et leur effet s'affaiblit bientôt jusqu'à devenir insensible, quand les angles des rayons réfractés avec l'axe sont devenus assez grands pour développer un peu davantage l'énergie de la double ré-

---

(1) D'après ces phénomènes, j'ai été surpris de voir que le beril est précisément le cristal que le docteur Brewster a choisi comme exemple pour énoncer les caractères de la configuration des anneaux dans les cristaux à un seul axe (pag. 210). Aurait-il été assez heureux pour trouver des berils dont les anneaux fussent exempts des particularités que je viens d'indiquer; ou les aurait-il négligées comme étant sans importance? En tout cas, pour les échantillons qui les offrent, la question reste entière; et il est évident que l'on ne peut pas décider qu'ils suivent la loi de Huyghens, d'après la seule observation des anneaux.

fraction. Alors la loi de Huyghens m'a paru s'observer exactement, soit que l'on fît réfracter les rayons perpendiculairement à l'axe pour déterminer les plus grandes et les moindres valeurs des deux vitesses, soit qu'on les fît entrer par une face parallèle à l'axe et sortir par une face perpendiculaire. Je n'ai point encore eu le temps de compléter ces épreuves par l'observation des déviations latérales; mais elles suffisaient pour mon but actuel, qui était de montrer que, dans les cristaux même dont la double réfraction est la plus faible, la méthode des coïncidences suffit pour la mesurer.

Or, en répétant ces observations d'abord sur un beril de couleur jaune et ensuite sur un beril de couleur verdâtre, j'ai été très-surpris de voir que les intensités de la double réfraction y étaient fort différentes. Le coëfficient qui exprime l'accroissement du quarré de la vitesse étant exprimé par 173 dans le beril jaune, il l'était par 153 dans le beril vert, et il ne peut pas y avoir sur chacun de ces nombres plus de 3 ou 4 unités d'erreur. La même différence se soutient dans tous les autres sens, quoique chacun des deux berils en particulier paraisse suivre la loi de Huyghens. Voilà donc deux cristaux dont l'espèce minéralogique est réputée la même, et dont cependant la structure intérieure est différente; car les phénomènes de la double réfraction se rapportant à des lignes fixes menées dans le cristal, suivant des sens déterminés et relatifs aux formes primitives, il paraît évident qu'elle est liée à la structure. Ces berils auraient-ils des compositions chimiques différentes avec des angles pareils, ou des angles un peu différents; ou encore auraient-ils été comprimés pendant leur formation, ou enfin auraient-ils deux axes très-voisins l'un de l'autre? c'est ce que je n'ai pas encore

eu le temps de décider, et ce qui est assez difficile, à cause du poli imparfait et des irrégularités qu'offrent toujours les faces naturelles qui les terminent. Mais ces difficultés ne se présenteront pas au même degré dans d'autres substances : il serait bien curieux, par exemple, d'étudier ainsi comparativement les cristaux de chaux carbonatée magnésienne et de chaux carbonatée ferrifère dans lesquels M. Wollaston a dit avoir reconnu des angles sensiblement différents de ceux de la chaux carbonatée pure ; peut-être trouverait-on des différences correspondantes dans les intensités de leur double réfraction. J'aurais vivement souhaité de pouvoir tenter cette épreuve ; mais je n'ai pas pu jusqu'ici me procurer des cristaux transparents de ces substances, quoique je sache qu'il en existe : je sollicite à cet égard les secours des minéralogistes, s'ils veulent bien accorder quelque intérêt à ces déterminations.

Je me propose d'effectuer les mêmes épreuves sur tous les cristaux à un seul axe que je pourrai obtenir : dès-à-présent celles que j'ai rappelées suffisent pour montrer que la loi de Huyghens s'applique à ces cristaux avec toute l'exactitude que comportent les méthodes d'observation actuelles. Il en résulte que cette loi simple représente tous les phénomènes qu'ils produisent sans qu'il soit besoin de recourir à la considération de plusieurs axes que le docteur Brewster a essayé de lui substituer ; et l'on peut faire sentir tout l'avantage qu'elle conserve par une seule remarque : c'est que, si la construction compliquée du docteur Brewster eût été seule connue, il eût été très-utile d'en déduire la loi de Huyghens, et de montrer que toutes les indéterminations d'axes que le docteur Brewster suppose, se réduisent en

définitif, par le calcul, à un seul axe unique, dirigé d'une manière invariable dans chaque cristal.

C'est là précisément ce que je ferai dans la suite de ce Mémoire, pour les cristaux à deux axes auxquels le docteur Brewster a aussi étendu sa construction. Je prouverai par la théorie et par l'expérience, que toutes les directions arbitraires d'axes qu'il y a imaginées, peuvent se réduire à deux uniques, de directions invariablement déterminées dans chaque cristal; et que toute la différence entre eux et les cristaux à un seul axe, c'est que dans ceux-ci, l'accroissement du quarré de la vîtesse, est proportionnel au quarré du sinus de l'angle formé par l'axe avec le rayon réfracté extraordinairement, tandis que, dans les cristaux à deux axes, ce quarré se change, dans le produit des deux sinus, que le rayon forme avec les deux axes; et cette analogie si simple, qui rassemble les deux systêmes de structure sous un même point de vue, nous donnera en même temps toutes les lois de la polarisation dans les cristaux à deux axes, lois que le docteur Brewster n'a pas considérées dans son mémoire. Mais, avant d'exposer les principes mathématiques qui m'ont fait découvrir directement ces rapports, il faut donner une idée précise des considérations que le docteur Brewster a appliquées aux cristaux à deux axes, et rappeler les résultats qu'il en a déduits. Ce résumé, en satisfaisant aux règles de la justice, aura en outre l'avantage de faire sentir la différence des deux méthodes.

Nous avons vu que, dans les cristaux à un seul axe, les teintes produites par la polarisation, dépendent de deux éléments, dont l'un est la longueur du trajet de la lumière dans le cristal, et l'autre est l'angle formé par l'axe avec le

rayon réfracté. De quelque manière qu'on envisage ce phénomène des teintes, l'influence du chemin parcouru doit se faire sentir dans les cristaux à deux axes, comme dans les autres; on peut donc se débarrasser de cet élément, en supposant tous les résultats observés, ou ramenés, à une épaisseur commune. C'est ce qu'a fait d'abord le docteur Brewster. Pour comprendre ensuite comment il a égard à l'influence de l'autre élément, l'inclinaison du rayon sur les axes, il faut savoir que le docteur Brewster n'attache pas au mot axe la même idée que nous. Il n'entend pas par-là seulement la ligne droite ou les lignes droites suivant lesquelles la double réfraction du cristal est nulle. Ce qu'il appelle généralement axes, ce sont des lignes droites arbitraires, menées à volonté dans un cristal, et auxquelles il entreprend de rapporter les phénomènes. Ce sont de vrais axes de coordonnées angulaires qui peuvent être simples ou multiples, et inclinés entre eux à angle droit ou sous tout autre angle quelconque. Pour plus de simplicité, supposons d'abord qu'il se borne à établir deux axes de ce genre rectangulaires entre eux, et qu'il cherche leur influence sur un rayon réfracté dont la direction est donnée; alors (pag. 237), par un point quelconque de ce rayon, il mène une ligne parallèle à chacun des deux axes; si chacun d'eux existait seul, les valeurs numériques des teintes seraient, comme dans les cristaux à un seul axe, proportionnelles au quarré du sinus de l'angle formé par la direction de cet axe avec le rayon réfracté; ce quarré sera donc encore, selon lui, l'expression de la force individuelle exercée par chacun des deux axes. Il faut maintenant savoir composer ces forces. Or, d'après l'application qu'on en avait déja faite au mica de Sibérie, on savait qu'elles s'ajou-

tent, ou semblent s'ajouter, lorsqu'elles s'exercent dans un même plan, et qu'elles se retranchent, ou semblent se retrancher les unes des autres, lorsqu'elles agissent dans des plans rectangulaires. Le docteur Brewster a cherché, j'imagine d'une manière empyrique, un mode de composition général qui satisfît à ces deux conditions extrêmes, et qui se pliât à quelqu'une des conditions intermédiaires déduites de la configuration des anneaux dans les cristaux à deux axes; ce qui l'a enfin conduit à la règle suivante (p. 239) : *la teinte produite par l'action combinée de deux axes, est égale à la diagonale d'un parallélogramme, dont les côtés représentent les valeurs numériques des teintes qui seraient produites par chaque axe en particulier, et dans lequel l'angle compris entre ces côtés est double de celui que forment les deux plans menés par le rayon réfracté et par les deux axes.* Cette règle une fois connue, le docteur Brewster s'en sert pour composer les influences d'un nombre quelconque d'axes, et trouver leur action totale; ou, réciproquement, pour décomposer l'effet d'un seul axe en un nombre donné d'effets partiels.

L'objet d'une loi expérimentale étant de rassembler et de concentrer les phénomènes, elle doit être admise dès qu'elle atteint ce but, quelle que soit la nature des idées spéculatives qui ont servi à l'établir : mais le succès qu'elle peut avoir, ne doit pas aveugler sur son origine. Or, après avoir donné l'exposition de sa règle pour composer les influences des axes, et avoir indiqué, sinon montré, la route qui l'y a conduit; le docteur Brewster ajoute (pag. 240), *qu'elle n'est évidemment point déduite de données empiriques, mais qu'elle est rigoureusement naturelle, comme étant fondée sur le même principe qui règle la composition de toutes les forces mécaniques.*

Nous croyons que les géomètres seront d'un autre avis. L'idée de forces *réellement* émanées d'axes rectilignes, avec une intensité proportionnelle au quarré du sinus, est une hypothèse. Le mode de composition de ces forces, adopté par le docteur Brewster, est aussi une hypothèse, puisque, dans les règles de la mécanique, on construit le parallélogramme des forces sur leur direction même, et non pas sur un angle double de leur inclinaison; enfin toutes ces suppositions de forces, déja hypothétiques dans leur essence, deviennent moins vraisemblables encore, quand on les fait émaner d'axes arbitraires, comme le permet la règle que nous examinons. Il est donc prouvé par ces divers motifs, qu'elle est simplement empirique; et qu'ainsi, sans chercher à lui attribuer un autre mérite, il faut la juger en la comparant aux faits.

Or, ici on lui trouvera des avantages très-réels, et que personne, avant le docteur Brewster, n'avait obtenus. « Si, dit-il, on calcule d'après cette loi les teintes pour un « cristal quelconque, dans lequel on puisse saisir leur en- « semble d'un seul coup-d'œil, d'après l'inspection des an- « neaux qui se forment autour des axes résultants, il n'y aura « qu'à dessiner ces anneaux sur un papier, en réduisant les « résultats conformément aux diverses épaisseurs que traver- « versent les rayons qui arrivent à l'œil sous des directions « diverses, et l'on aura une représentation fidèle des an- « neaux, laquelle exprimera de la manière la plus exacte, « toutes les inversions de leurs teintes, montrera leurs points « d'inflexions, et se pliera à l'innombrable variété de formes « qu'ils prennent, selon les diverses circonstances où ils sont « formés. »

Il est à regretter que le docteur Brewster n'ait pas rap-

porté dans son mémoire, quelques mesures effectives d'anneaux, d'après lesquelles on aurait pu encore mieux apprécier l'extrême justesse qu'il attribue à sa construction. La seule vérification numérique qu'on y trouve, et elle est réellement très-remarquable, c'est l'application qu'il en a faite aux expériences publiées dans mon Traité de physique, sur les lames de chaux sulfatée, et à d'autres analogues, faites par lui-même. Ne connaissant pas alors la cause de la bizarrerie des phénomènes que ces lames présentent, quand les rayons y pénètrent d'une manière très-oblique, j'avais simplement observé leurs teintes avec fidélité, et je les avais réduites en tables pour différents sens d'inclinaison. Le docteur Brewster ayant depuis découvert que la chaux sulfatée a deux axes d'anneaux contenus dans le plan de ses lames, et inclinés l'un à l'autre de 60°, il a appliqué sa règle à ces lames en prenant, pour axes arbitraires de forces, la normale au plan des lames et la ligne intermédiaire entre les deux directions suivant lesquelles se forment les anneaux. Il a ainsi formé, par le calcul, une table qui s'accorde très-bien avec l'expérience. Je remarquerai, toutefois, qu'en réduisant les résultats des observations au cas d'une épaisseur constante, comme l'a fait le docteur Brewster, on est obligé de les diviser par la sécante des angles de réfraction : or cette division, en les affaiblissant, réduit jusqu'à le rendre insensible, l'écart qui paraît exister entre la simple loi des épaisseurs, et les teintes réellement observées; de même qu'on jugerait mal les lois des anneaux colorés ordinaires, sous les diverses incidences, si on les ramenait par une réduction pareille à la perpendicularité. Ceci fait encore plus regretter que le docteur Brewster n'ait pas également rapporté, pour quelque

autre cristal, et pour d'autres sens de coupe, des résultats immédiats de mesures, que l'on aurait pu ensuite calculer avec toutes les modifications quelconques, sans altérer leur type primitif.

J'ai dit plus haut que, dans les cristaux à un seul axe, le terme proportionnel au quarré du sinus dans l'expression des teintes est précisément le même qui mesure l'accroissement du quarré de la vîtesse du rayon extraordinaire. En appliquant cette analogie aux cristaux à deux axes, le docteur Brewster a conclu l'expression de la vîtesse extraordinaire, d'après la loi empirique qui lui a servi à représenter les anneaux ; il est arrivé ainsi à une formule qui contient comme indéterminées les forces individuelles émanées des deux axes, et qui, renfermant de plus comme élément essentiel l'angle double, introduit empiriquement dans la composition de ces forces, se trouve, par cela même, embarrassée de manière qu'on n'en saurait éliminer cet angle, pour la réduire à ses éléments propres, sans tomber dans une excessive complication de calcul.

Cette difficulté est vraisemblablement la cause qui a empêché le docteur Brewster de soumettre la loi de vîtesse donnée par sa formule, à des vérifications rigoureuses et multipliées, en étudiant par des mesures précises la loi de réfraction qui en résultait. A la vérité, il a tenté cette épreuve, mais d'une manière, qui, à notre avis, était loin de la précision qui pouvait la rendre décisive. « Cette recherche, dit le « docteur Brewster à la fin de son Mémoire, présente des « difficultés peu ordinaires. Le manque d'un minéral à deux « axes qui pût, ainsi que le spath d'Islande, être taillé en « grands morceaux et coupé avec facilité dans tous les sens.

« la nécessité qu'il eût deux axes résultants considérablement « inclinés l'un à l'autre pour obtenir une séparation mesu- « rable des images en différents points entre les axes, rendi- « rent pendant long-temps mes recherches infructueuses. « Enfin la découverte de cristaux qui possédaient à quelques « degrés les plus importantes de ces propriétés, m'a mis « en état de reprendre et de compléter ces recherches. » On conçoit que les conditions assignées ici par le docteur Brewster pour la possibilité des expériences, ont dû se rapporter aux moyens qu'il avait pour observer la double réfraction; et l'on a vu précédemment qu'elles ne sont point nécessaires en elles-mêmes, puisque, à l'aide de la méthode des coïncidences que j'ai plus haut décrite, on peut mesurer très-exactement la double réfraction dans toutes sortes de cristaux, quelque faible qu'elle y puisse être, et quelle que soit l'inclinaison de leurs axes. Ainsi l'énoncé même de ces conditions donne une indication précise des procédés d'observation que le docteur Brewster possédait alors, et montre qu'ils n'ont pu avoir aucun rapport avec ceux qui ont été imaginés par MM. Arago et Fresnel, ou par moi-même.

Au reste, le docteur Brewster a décrit lui-même son mode d'expérience. « Après avoir, dit-il, reconnu les directions « suivant lesquelles la polarisation devient nulle dans un « cristal à deux axes (l'espèce du cristal n'est pas indiquée), « j'ai formé avec ce cristal un prisme d'un angle réfringent « considérable, dont une des faces fût, autant que possible, « perpendiculaire à l'une de ces directions. J'ai ensuite placé « ce prisme sur un goniomètre; et, ayant marqué la position « dans laquelle le point où la polarisation était nulle, autre- « ment le centre des anneaux, se trouvait coïncider avec

« l'image polarisée d'une chandelle, j'ai substitué l'image di-
« recte de la chandelle, et j'ai observé que cette image était « simple, de sorte que la force de double réfraction, aussi-« bien que la force polarisante, s'était complètement éva-« nouie. En tournant le goniomètre de part et d'autre de « cette position, la déviation du rayon extraordinaire deve-« nait sensible et augmentait graduellement; et, en conti-« nuant d'observer cette déviation dans le plan qui passait « par les axes résultants, je trouvai qu'elle augmentait jus-« qu'au point intermédiaire entre ces axes où elle devenait « stationnaire, après quoi elle diminuait progressivement « vers l'autre axe où elle devenait de nouveau simple. Je « mesurai ensuite la déviation du rayon extraordinaire pour « divers points compris dans ce plan, dans la section qui « lui était perpendiculaire, et aussi hors de ces deux direc-« tions; et j'ai trouvé que la force de double réfraction va-« riait dans la même raison que la force polarisante, et que « tous les phénomènes, quel que fût le nombre des axes qui « les produisît, pouvaient se calculer par la même loi géné-« rale, déja établie plus haut pour les phénomènes de la po-« larisation. »

J'ai rapporté textuellement ce passage pour n'affaiblir en rien les résultats qui appartiennent au docteur Brewster. Du reste, il ne donne aucune détermination numérique quelconque : il n'indique pas même sur quel cristal il a opéré; ni comment il a *mesuré* la déviation du rayon extraordinaire; ni si c'est de la déviation absolue ou relative qu'il entend parler. La manière même dont il s'exprime ne présente pas un sens d'une interprétation facile. J'ignore, par exemple, comment le docteur Brewster a pu s'assurer *numé-*

riquement que la force de double réfraction suivait la même loi que la force de polarisation; car jusqu'ici personne n'a pu mettre à nu ces forces, ni en introduire la considération autrement que comme un moyen abrégé d'exprimer la marche générale des phénomènes, et alors on ne saurait se faire une idée nette de ce que peut être leur mesure. Si, par-là, le docteur Brewster a voulu désigner simplement l'écart des deux rayons réfractés, on doit regretter qu'il n'ait donné aucune indication sur la valeur absolue de cet écart, ni sur sa direction par rapport aux axes; au reste, dans l'absence de ces indications, il est évident, par la nature même de son procédé, qu'il n'a pas observé suivant des coupes variées, puisqu'il ne parle que d'un seul prisme taillé dans une direction très-particulière; et en outre, dans ce prisme, il n'a pu observer les déviations des rayons que d'une manière très-imparfaite, puisque le point, ou plutôt l'objet lumineux qui lui servait de mire, était la flamme d'une chandelle, laquelle a nécessairement un diamètre si considérable, qu'il exclut toute idée d'une grande exactitude, d'autant plus que la dispersion des couleurs, occasionnée par le passage des rayons à travers le prisme, devait altérer encore les deux images, et rendre plus difficile, sinon impossible, la mesure précise de leur écart. Le docteur Brewster, qui rejette si décidément, comme incorrectes, les expériences de Malus sur le spath d'Islande, quoiqu'elles aient été faites avec tant de soins, sur des divisions finement tracées, ne doit pas nous trouver injustes, si nous ne pouvons regarder comme définitives des observations faites par des procédés incomparablement moins exacts, décrites en termes généraux, et dont on ne rapporte aucun détail précis, aucun résultat numérique qui puisse les faire apprécier.

Mais laissons cette sorte de récrimination qui n'avance point la science. Après avoir rétabli, dans la série des découvertes successives, l'ordre qui nous a paru le plus conforme à la vérité, ne voyons plus dans le nouveau travail du docteur Brewster que ce qu'il ajoute à ces richesses. Félicitons-le d'avoir trouvé une loi expérimentale qui embrasse un grand nombre de phénomènes dont jusqu'ici personne n'avait su exprimer les rapports; et, si nous croyons que ses résultats laissent encore à desirer, efforçons-nous, en reconnaissant leur mérite, de les soumettre à d'autres lois plus parfaites, ou d'en présenter des expressions plus simples, et plus rigoureuses : tel est le but que j'espère avoir atteint.

Je considère d'abord, qu'en appliquant à la marche de la lumière dans un cristal quelconque le principe de la moindre action comme l'a fait M. Laplace, il ne reste qu'à découvrir la loi de la vîtesse; car, lorsqu'elle sera donnée, l'application seule du principe déterminera la marche des rayons.

Maintenant, pour découvrir cette loi des vîtesses, je remarque qu'en général, dans les cristaux réguliers, jusqu'à présent connus, il existe deux directions, et non davantage, suivant lesquelles l'écart des deux rayons réfractés est nul. Cela est conforme aux expériences mêmes du docteur Brewster, et j'avais aussi constaté ce fait sans les connaître. La chose est d'ailleurs évidente par cela seul que les phénomènes de couleurs, qui accompagnent par-tout ailleurs la réfraction double, sont nuls dans les directions dont il s'agit. Ces deux directions sont ce que j'appelle *les axes* du cristal; et ce point de vue embrasse aussi les cristaux à un seul axe, en les considérant comme ayant deux axes réunis en un seul, c'est-à-dire séparés par un angle nul.

La double réfraction étant nulle dans le sens des axes, il s'ensuit que, si l'on introduit dans le cristal un rayon, soit naturel, soit polarisé, sous une inclinaison telle que la réfraction ordinaire lui fasse suivre un des axes, la réfraction extraordinaire, si elle existe encore dans cette circonstance, imprimera aussi la même direction à la portion du rayon qu'elle sollicite; de sorte que sa vîtesse, si elle est réelle, devra être alors égale à celle que produit la réfraction ordinaire: or, ce qui prouve qu'elle est réelle, même dans cette circonstance, c'est qu'elle se montre tout entière dans une circonstance physique où les causes qui la produisent, quelles qu'elles puissent être, sont infiniment peu différentes. En effet, si l'on écarte le moins du monde le rayon incident de la direction qui le fait se réfracter suivant un des axes, il se forme en général deux rayons réfractés, l'un ordinaire, l'autre extraordinaire, qui s'écartent infiniment peu l'un de l'autre; et même, si l'on emploie un rayon polarisé, on trouve des directions d'incidence telles que le rayon extraordinaire est le seul qui se forme. La vîtesse extraordinaire est donc alors bien réelle, et elle diffère infiniment peu de la vîtesse ordinaire, puisque l'écart des deux rayons réfractés est infiniment petit. Ainsi, d'après la loi de continuité, elle doit exister encore quand toute la réfraction s'opère suivant un des axes: d'où il suit qu'alors les deux vîtesses, ordinaire et extraordinaire, sont égales entre elles.

Maintenant, pour les cristaux à un seul axe, M. Laplace a trouvé que le quarré de la vîtesse extraordinaire est égal au quarré de la vîtesse ordinaire, plus un terme proportionnel au quarré du sinus de l'angle, formé par l'axe unique avec le rayon réfracté extraordinairement. L'analogie porte

donc à penser que, dans le cas général de deux axes, la différence des quarrés des vîtesses sera encore exprimée par une fonction du même genre, c'est-à-dire du second degré par rapport aux deux axes du cristal : or la fonction la plus générale de cet ordre est composée de trois termes, dont deux sont les quarrés des sinus des angles formés par le rayon réfracté avec chacun des deux axes, et le troisième est le produit de ces mêmes sinus; mais les termes qui contiennent les sinus isolés doivent disparaître d'eux-mêmes, en vertu des coëfficients qui les affectent, puisque la double réfraction devient nulle suivant chacun des axes, ce qui rend alors les vîtesses égales; il ne peut donc rester que le troisième terme, qui contient le produit des sinus; c'est-à-dire que, *dans les cristaux à deux axes, le quarré de la vitesse extraordinaire sera égal au quarré de la vîtesse ordinaire, plus un terme proportionnel au produit des sinus des angles formés par chacun des deux axes avec le rayon réfracté extraordinairement.* Si l'angle des deux axes est supposé nul, ces deux axes se réunissent, les deux angles qu'ils forment avec le rayon réfracté deviennent égaux, et le terme additif au quarré de la vîtesse ordinaire devient le quarré de leur sinus; c'est précisément la loi de Huyghens. Dans cette manière de voir, les cristaux à un seul axe ne sont qu'un cas de racines égales.

Pour déterminer complètement la marche des rayons résultante de cette nouvelle loi de vîtesse, concevons trois axes de coordonnées rectangulaires IX, IY, IZ (*fig.* 4), ayant pour origine commune le point d'incidence I. Supposons que les deux premières de ces coordonnées, désignées par x, y, soient prises dans la face même du cristal par laquelle les rayons lumineux pénètrent, de sorte que la troi-

sième, z, soit normale à cette face. Menons, à partir du point d'incidence, quatre droites, SI, IR, IA, IB, diversement inclinées sur ces coordonnées, et dont les directions représentent le rayon incident, le rayon réfracté extraordinaire, et les deux axes du cristal. Fixons les positions des rayons au moyen de deux coordonnées angulaires θ, π, θ'_1, π'_1, dont l'une, θ, θ'_1, exprime l'angle qu'ils forment avec la normale extérieure IZ, ou leur distance zénithale; et l'autre, π, π'_1, exprime l'angle que leur projection sur le plan des xy forme avec la ligne des x, ou leur azimuth. Rapportons les deux axes du cristal à des coordonnées analogues, qui soient, pour le premier, λ' et a', et pour le second, λ'' et a''. Alors si nous désignons, pour abréger, par u' u'' les angles formés par le rayon réfracté avec chacun de ces deux axes, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \cos. u' &= \sin.\lambda' \sin.\theta'_1 \cos.(\pi'_1 - a') + \cos.\lambda' \cos.\theta'_1 \\ \cos. u'' &= \sin.\lambda'' \sin.\theta'_1 \cos.(\pi'_1 - a'') + \cos.\lambda'' \cos.\theta'_1 \end{aligned}\right\}. \quad (1)$$

Ces données étant établies, soit v_1 la vîtesse extraordinaire du rayon réfracté; $_1v$ la vîtesse ordinaire, laquelle est la même dans toutes les directions possibles; enfin k une constante positive ou négative, qui caractérisera l'espèce et l'intensité de la double réfraction que le cristal exerce, on aura généralement

$$v_1^2 = {}_1v^2 + k \sin. u' \sin. u''. \quad (2)$$

Il ne reste plus qu'à combiner cette loi avec les conditions résultantes du principe de la moindre action. Ces conditions, telles que M. Laplace les a établies dans les Mémoires de l'Institut pour 1809, sont exprimées par les deux équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} -\sin.\theta \cos.(\pi'_{,}-\pi) = v_{,} \sin.\theta'_{,} + \left(\frac{dv_{,}}{d\theta'_{,}}\right) \cos.\theta'_{,} \\ \sin.\theta \sin.\theta'_{,} \sin.(\pi'_{,}-\pi) = \left(\frac{dv_{,}}{d\pi'_{,}}\right) \end{array}\right\}, \quad (3)$$

auxquelles on peut substituer ces deux autres qui s'en déduisent, et où les inconnues sont séparées,

$$\left.\begin{array}{l} -\sin.\theta \sin.\pi = v_{,} \sin.\theta'_{,} \sin.\pi'_{,} + \left(\frac{dv_{,}}{d\theta'_{,}}\right) \cos.\theta'_{,} \sin.\pi'_{,} + \left(\frac{dv_{,}}{d\pi'_{,}}\right) \frac{\cos.\pi'_{,}}{\sin.\theta'_{,}} \\ -\sin.\theta \cos.\pi = v_{,} \sin.\theta'_{,} \cos.\pi'_{,} + \left(\frac{dv_{,}}{d\theta'_{,}}\right) \cos.\theta'_{,} \cos.\pi'_{,} - \left(\frac{dv_{,}}{d\pi'_{,}}\right) \frac{\sin.\pi'_{,}}{\sin.\theta'_{,}} \end{array}\right\}; (3)$$

or, d'après les expressions de $v_{,}$, u' et u'', données tout-à-l'heure, on a

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\sin.\theta'_{,}}\left(\frac{dv_{,}}{d\pi'_{,}}\right) = \frac{k}{2v_{,} \sin.u' \sin.u''} \left\{\begin{array}{l} \sin.\lambda' \cos.u' \sin.^2 u'' \sin.(\pi'_{,}-a') \\ \quad + \sin.\lambda'' \cos.u'' \sin.^2 u' \sin.(\pi'_{,}-a'') \end{array}\right\} \\ \left(\frac{dv_{,}}{d\theta'_{,}}\right) = \frac{k}{2v_{,} \sin.u' \sin.u''} \left\{\begin{array}{l} -\sin.\lambda' \cos.\theta'_{,} \cos.u' \sin.^2 u'' \cos.(\pi'_{,}-a') \\ \quad - \sin.\lambda'' \cos.\theta'_{,} \cos.u'' \sin.^2 u' \cos.(\pi'_{,}-a'') \\ + \cos.\lambda' \sin.\theta'_{,} \cos.u' \sin.^2 u'' \\ \quad + \cos.\lambda'' \sin.\theta'_{,} \cos.u'' \sin.^2 u' \end{array}\right\} \end{array}\right\}. \quad (4)$$

On pourra donc substituer ces valeurs dans les équations (3), afin d'en éliminer les coëfficients différentiels de $\theta'_{,}$ et de $\pi'_{,}$. On pourra également en chasser u', u'' et $v'_{,}$, au moyen des équations (1) et (2). Alors il ne restera plus que deux relations entre θ, π, $\theta'_{,}$, $\pi'_{,}$, c'est-à-dire entre les coordonnées angulaires du rayon incident, et celles du rayon réfracté extraordinaire qui en dérive. On connaîtra donc ainsi la marche de ce dernier rayon, en fonction de sa direction primitive d'incidence, et on pourra la comparer aux observations.

Au lieu d'effectuer cette élimination en général, ce qui conduirait à des résultats fort compliqués, il vaut mieux laisser les équations précédentes dans l'état de séparation où nous venons de les obtenir, et ne commencer à éliminer entre elles qu'après y avoir introduit les simplifications dont elles peuvent être susceptibles dans chaque cas particulier.

L'expression générale de $v_{,}^{2}$ marque que la vîtesse extraordinaire sera comprise entre deux limites, ${}_{,}v$ et $\sqrt{{}_{,}v^2 + k}$. La première aura lieu quand l'un des angles u' u'' sera nul ou égal à 180°; c'est-à-dire lorsque le rayon réfracté suivra l'un des deux axes. La seconde limite aura lieu quand les angles u' u'' seront tous deux droits; c'est-à-dire quand le rayon réfracté sera perpendiculaire aux deux axes. Cette dernière vîtesse sera la plus grande de toutes celles que le rayon peut prendre si k est positif Elle sera la plus petite si k est négatif. Cette propriété établit entre les cristaux à deux axes la même division que j'ai reconnue entre les cristaux à un seul axe, et je la désignerai par les mêmes dénominations.

Une autre conséquence importante de ces formules, c'est que la marche des rayons réfractés extraordinairement reste la même, soit que l'on considère les axes du cristal comme dirigés suivant les deux lignes IA, IB, par exemple; ou suivant la direction de l'une d'elles et le prolongement de l'autre, par exemple suivant IA et IB″ (*fig.* 5). En effet, cette nouvelle supposition ne fait que changer la distance zénithale λ'', comptée de la normale extérieure, en $180 - \lambda''$; l'azimuth a'' en $180° + a''$; enfin l'angle u'' dans son supplément $180 - u''$: or ces nouvelles valeurs introduites dans les expressions de $\left(\frac{dv_{,}}{d\pi'_{,}}\right)$, $\left(\frac{dv_{,}}{d\theta'_{,}}\right)$, n'y apportent aucune altération; et, par

conséquent, elles ne changent rien non plus à la marche des rayons réfractés déterminés par les équations (3). Ainsi la direction absolue des deux axes du cristal est le seul élément essentiel des résultats.

Si les deux axes du cristal se réunissent en un seul, a'' devient égal à a', λ'' à λ', u'' à u'; et l'accroissement du quarré de la vîtesse devient proportionnel au quarré du sinus de l'angle formé par l'axe unique du cristal avec le rayon réfracté extraordinaire. Alors les formules se réduisent identiquement à celles que M. Laplace a obtenues pour les cristaux à un seul axe, lesquelles sont, comme on sait, conformes à la loi de Huyghens.

Lorsque je fus conduit à cette nouvelle loi des vîtesses, remarquable par son analogie et sa simplicité, je m'empressai de la comparer aux formules que j'avais données dans mon Traité de physique, pour représenter les alternatives des couleurs dans le mica de Sibérie qui a deux axes : elle se trouva coïncider avec elles identiquement, dans les plans particuliers d'incidences où mes expériences avaient été faites; mais, de plus, étant développée, elle me donna ce que les expériences n'avaient pas pu m'apprendre, je veux dire la forme elliptique des anneaux ainsi produits, sous des incidences obliques, les rapports de leurs axes, les lois de leurs teintes, et généralement tous les phénomènes de couleurs qui m'avaient embarrassé jusques alors, et que le docteur Brewster était parvenu le premier à représenter.

Cet accord me montrant que la loi si simple où j'avais été conduit était la loi de la nature, je cherchai à déduire des mêmes analogies le mode de polarisation pour le cas de deux axes. Cette considération me l'indiqua aussitôt avec évi-

dence. Dans les cristaux à un seul axe, d'après les observations de Malus, le rayon ordinaire est polarisé dans le sens de l'axe même, c'est-à-dire suivant le plan qui passe par ce rayon et par l'axe. Le rayon extraordinaire, au contraire, est polarisé à angle droit sur le plan mené de même par l'axe et par sa direction. Maintenant, lorsqu'il y a deux axes, menez par chacun d'eux un plan qui contienne le rayon ordinaire; ce rayon est polarisé dans un sens exactement intermédiaire entre ces deux plans, et le rayon extraordinaire l'est dans un sens perpendiculaire, en répétant pour lui une construction analogue. Dans toutes les observations que j'ai faites sur la double réfraction de la topaze, le sens de polarisation des faisceaux tant ordinaires qu'extraordinaires s'est toujours trouvé parfaitement conforme à cette loi. Lorsque les deux axes se réunissent en un seul, elle redonne évidemment la construction de Malus.

Ce sont là les lois de la polarisation que j'ai appelée fixe : quand le trajet des rayons est assez court, ou assez peu incliné sur les axes, pour qu'il se produise des couleurs, l'expérience fait voir que la polarisation apparente a lieu dans un azimuth double de celui que déterminent ces constructions. La même chose a lieu dans les cristaux à un seul axe, comme je l'ai depuis long-temps montré. Si la lumière est une matière émise, ce phénomène indique des oscillations exécutées par les molécules lumineuses autour de leur centre de gravité, et qui durent jusqu'à ce que la force de polarisation ait acquis une énergie suffisante. Si la lumière est produite par les ondulations d'un éther très-élastique, il indique des modifications propres à ces ondulations.

Quoi qu'il en puisse être, au moyen des lois précédentes

de la polarisation et de la double réfraction, on peut prévoir avec autant de facilité que d'exactitude toutes les particularités d'intensités et de teintes que présentent les plaques des cristaux à deux axes; on peut prédire les directions suivant lesquelles ces couleurs doivent s'affaiblir ou même disparaître entièrement, soit qu'il se forme une croix noire complète comme dans le spath d'Islande et les autres cristaux à un seul axe, soit que les anneaux doivent être traversés par une seule ligne noire comme dans le mica, la topaze, le sucre et les autres cristaux à deux axes. La formation de ces lignes, leur constance ou leur variation, leur immobilité ou leur mouvement à mesure que l'on tourne la plaque cristallisée sur elle-même, l'angle même des axes et leur position, tous ces éléments sont des conséquences nécessaires et calculables de la loi de polarisation intérieure que l'analogie nous a indiquée. L'étendue de ces applications m'oblige à les réserver pour un autre mémoire; mais je les indique d'avance comme devant offrir autant de confirmations frappantes des lois de polarisation et de double réfraction énoncées plus haut.

Quelque satisfaisantes que fussent déja les vérifications de ce genre qui se présentaient, pour ainsi dire, d'elles-mêmes dans les expériences antérieures, la plus décisive sans doute aurait manqué, si je n'avais pas éprouvé directement, par l'observation, la marche même des deux réfractions, telle que le calcul la conclut de la loi de la vîtesse; c'est ce que j'ai fait au moyen de l'appareil que j'ai décrit plus haut.

J'ai pris un prisme de topaze blanche; et, en le clivant parallèlement à ses bases, j'en ai tiré une plaque dont les deux faces ont été polies avec soin, de manière à conserver le plus exactement possible leur direction et leur parallélisme natu-

rel. La topaze, comme le mica de Sibérie, de Zinwald, et plusieurs autres, a deux axes de double réfraction, situés dans un plan perpendiculaire à ses lames, et également inclinés sur leur surface, comme on peut s'en apercevoir aisément par les phénomènes de couleurs qui sont la conséquence de cet arrangement. Ayant reconnu la position du plan qui contenait ces axes, au moyen des caractères que j'ai expliqués dans mes recherches précédentes, et particulièrement dans mon Mémoire sur le mica, j'ai taillé dans la plaque de topaze deux faces latérales perpendiculaires à ses lames, l'une suivant le plan qui contenait les axes, l'autre dans une direction rectangulaire; alors, en mesurant la double réfraction à travers les différents angles droits par lesquels la plaque s'est trouvée terminée, j'ai pu suivre la marche du rayon par rapport aux axes dans des sens très-divers, et par conséquent mettre complètement en évidence l'influence des angles qu'il formait avec eux. En comparant ces résultats aux formules que j'avais disposées d'après la théorie, j'ai pu en conclure, sans autre secours, l'angle des deux axes, que j'ai trouvé conforme à ce que les expériences de polarisation indiquent; et j'ai aussi déterminé les coëfficients des deux réfractions tant ordinaire qu'extraordinaire. Avec ces valeurs, j'ai calculé les écarts des deux rayons pour toutes les directions et toutes les incidences que j'avais observées : ils se sont trouvés parfaitement conformes à la théorie; et quelques-uns d'entre eux n'étaient pas moindres de 25 millimètres.

Désirant m'assurer que les éléments auxquels j'avais été conduit n'étaient pas particuliers à cette plaque, mais étaient généralement applicables au système cristallin de la topaze blanche, j'en ai taillé de même un autre prisme d'une beauté

et d'une pureté remarquables, que j'ai dû à la complaisance inépuisable de M. le comte de Bournon. J'ai taillé dans ce cristal les mêmes sections que dans l'autre, et aussi des sections différentes, par conséquent obliques aux axes; puis j'ai observé les doubles réfractions dans tous ces sens divers. Toujours les résultats observés se sont accordés parfaitement avec le calcul. Il en a été de même pour une autre topaze également limpide, qui m'avait été donnée par M. Wollaston. Enfin j'ai appliqué les mêmes épreuves à la topaze jaune du Brésil, à la chaux sulfatée anhydre et à l'euclase. Les phénomènes produits par ces substances si diverses se sont parfaitement accordés avec la théorie.

Une confirmation non moins satisfaisante, quoique d'une autre espèce, peut se tirer de l'accord qui existe entre les variations théoriques des vîtesses et les phénomènes de couleurs que la polarisation développe. En prenant, par exemple, dans mon Traité de physique, la table des couleurs produites par les lames de chaux sulfatée, sous des obliquités diverses, table uniquement construite sur l'expérience, on peut, en la comparant aux formules que donne la théorie, découvrir, par les nombres mêmes, que ces lames ont deux axes situés dans leur plan, suivant telle et telle direction, que ces axes sont inclinés entre eux d'un tel angle, qu'ils exercent l'espèce de polarisation que j'ai appelée attractive, et qu'ils l'exercent avec telle intensité; toutes choses qui, étant ensuite éprouvées par des expériences directes, s'y trouvent rigoureusement conformes dans leurs plus petits détails. On peut faire la même chose pour les nombreuses espèces de mica à deux axes que j'ai décrites, et pour tous les cristaux sur lesquels on a publié jusqu'à-présent des expériences de polarisation.

On ne peut guère douter, d'après cela, que les lois si simples de la polarisation et de la double réfraction que j'ai plus haut expliquées, et qui ont servi de base à ces formules, ne soient réellement celles que la nature suit dans les cristaux à deux axes, et en général dans tous les cristaux jusqu'à présent étudiés, puisque les mêmes lois s'appliquent aussi aux cristaux à un axe, en considérant leurs deux axes comme réunis en un seul, ou séparés par un angle nul.

L'accord que le docteur Brewster dit avoir trouvé entre les configurations des anneaux polarisés et la loi empirique qu'il a donnée dans son mémoire, m'a fait chercher si cette loi ne pourrait pas être dégagée de la complication sous laquelle elle s'était présentée à lui, pour être ramenée à la forme simple que je viens d'assigner. J'ai borné cette épreuve au cas où l'on emploierait seulement la supposition de deux axes arbitraires, parce que le docteur Brewster y ramène tous les autres. Alors, en suivant pas à pas sa construction, et en développant les expressions analytiques avec quelque adresse, on voit, après des transformations assez longues, toute leur complication s'évanouir et se réduire enfin au simple produit des sinus des angles formés par les deux axes réels du cristal avec le rayon réfracté extraordinaire, comme la considération théorique des vitesses nous l'avait donné directement. Ainsi tout le développement que le docteur Brewster a donné à sa construction, par l'emploi indéfini des divers systêmes d'axes arbitraires qu'il substitue à son gré les uns aux autres, n'est réellement qu'une transformation de coordonnées; et les influences idéales qu'il attribue à chacun de ces axes, aussi-bien que le mode empirique par lequel il les compose, ne font en définitif que reproduire, par une combinaison d'hy-

pothèses, la loi unique du produit des sinus qui s'observe dans chaque cristal autour des deux axes réels, par rapport auxquels les expressions de tous les phénomènes de polarisation et de double réfraction deviennent symétriques et simples.

Il y a toutefois, relativement au choix des axes arbitraires employés par le docteur Brewster, certaines limitations prescrites par l'analyse, et qu'il n'a point indiquées : ce sont des relations de position qu'ils doivent avoir avec les véritables axes, sans quoi ils ne pourraient pas satisfaire aux phénomènes, même avec les propriétés qu'on leur attribue. Par exemple, par une exception assurément singulière, les deux axes réels d'un cristal ne peuvent jamais être employés comme axes dans la construction du docteur Brewster.

On sait que Huyghens a représenté la double réfraction du spath d'Islande, au moyen d'un ellipsoïde de révolution dont les rayons sont inverses des vîtesses de la lumière, et dont l'axe de révolution coïncide avec l'axe du cristal. La même construction peut être étendue à tous les cristaux à un seul axe, comme je l'ai fait voir il y a long-temps, en ayant soin de faire l'ellipsoïde allongé à ses pôles pour les cristaux attractifs, et aplati pour les cristaux répulsifs. Dans le cas général où l'on considère deux axes, le sphéroïde n'est plus du second ordre et devient du quatrième; mais, de même que pour les cristaux à un seul axe, il s'aplatit ou se renfle en certaines parties, selon que le cristal est répulsif ou attractif, c'est-à-dire selon que la vîtesse du rayon extraordinaire est retardée ou accélérée par son action. Cette distinction, que j'avais reconnue d'abord dans les cristaux à un seul axe, se trouve ainsi généralisée.

Les lois auxquelles nous venons de parvenir me paraissent compléter la théorie de la double réfraction pour les cristaux réguliers jusqu'à-présent connus, car aucun d'eux jusqu'ici n'a présenté plus de deux axes. Ayant reconnu la nature et la constance de ces lois, ayant vérifié leur liaison avec les phénomènes apparents de la polarisation, nous avons dans l'application de ces résultats un moyen nouveau pour examiner la structure intime des corps naturels, et pour ajouter à la mesure déja si instructive de leurs formes extérieures, une sorte de clivage mathématique, qui peut nous donner des notions précises sur la régularité et la nature de leur systême cristallin intérieur. Déja la seule considération des effets produits par les cristaux sur la lumière polarisée, fournissait des procédés empiriques, mais sûrs, pour caractériser leur structure, comme on peut le voir par le travail que j'ai publié dans les Mémoires de l'Institut pour 1814, sur les nombreuses substances réunies jusques alors par les minéralogistes sous le nom générique de *mica;* mais ces caractères acquièrent plus d'importance lorsque l'observation, en les liant aux déviations mêmes que les rayons éprouvent, assure leur universalité, leur constance, en même temps qu'elle confirme les résultats qu'on en a déja déduits.

SECONDE PARTIE.

Comparaison de la théorie précédente avec les observations.

Je vais maintenant entrer dans le détail des observations et des mesures qui prouvent la réalité des lois que j'ai plus

haut énoncées. Mais je me bornerai, dans ce premier exposé, à des expériences sur les déviations des rayons, et je réserverai pour un autre mémoire celles qui concernent les anneaux colorés, produits par la double réfraction combinée avec le mode de polarisation que les rayons éprouvent.

Ire CLASSE.

Cristaux à un seul axe.

Commençons par les cristaux à un seul axe, qui offrent le cas le plus simple. Alors la loi des déviations est celle que Huyghens a découverte pour le spath d'Islande; traduite en analyse, elle donne les formules suivantes, qui déterminent complètement la marche des rayons extraordinaires, pour toutes les circonstances possibles :

$$(1)\quad \begin{cases} \text{tang.}\,\theta'_1\,\text{sin.}\,\pi'_1 = \dfrac{a^2\,\text{sin.}\,\theta\,\text{sin.}\,\pi}{\sqrt{\text{A} - a^2\,\text{sin.}^2\theta\,(\text{A}\,\text{sin.}^2\pi + b^2\,\text{cos.}^2\pi)}} \\[2ex] \text{tang.}\,\theta'_1\,\text{cos.}\,\pi'_1 = \dfrac{a^2\,b^2\,\text{sin.}\,\theta\,\text{cos.}\,\pi}{\text{A}\sqrt{\text{A} - a^2\,\text{sin.}^2\theta\,(\text{A}\,\text{sin.}^2\pi + b^2\,\text{cos.}^2\pi)}} + \dfrac{\text{B}}{\text{A}}, \end{cases}$$

A et B étant des quantités données par les équations

$$\text{A} = a^2\,\text{sin.}^2\lambda + b^2\,\text{cos.}^2\lambda$$
$$\text{B} = (b^2 - a^2)\,\text{sin.}\,\lambda\,\text{cos.}\,\lambda.$$

Ces formules ont été déduites par Malus de la construction géométrique indiquée par Huyghens (*). M. Laplace a ensuite montré qu'elles résultent théoriquement du principe

(*) J'ai rapporté cette déduction dans mon Traité de physique, tom. III, pag. 338 et suiv.

de la moindre action combinée avec la loi de vîtesse suivante :

$$v^2 = \frac{1}{b^2} - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) \sin.^2 u,$$

dans laquelle u représente l'angle que l'axe du cristal forme avec le rayon réfracté extraordinairement; c'est en effet ce que donnent nos équations générales de la pag. 230, quand on y suppose $a' = a'' = 0$, et $\lambda' = \lambda'' = \lambda$, ce qui réunit les deux axes en un seul; a et b sont deux constantes propres à chaque cristal, et la seconde, b, est précisément l'inverse du rapport de réfraction du rayon ordinaire.

Quant aux autres détails de ces formules, les angles θ, π, θ'_1, π'_1 sont les coordonnées angulaires des rayons, tant incidents que réfractés. Les angles θ, θ'_1 se comptent autour de la normale à la surface d'incidence, à partir de la portion de cette normale, qui est extérieure au cristal, et depuis 0° jusqu'à 180°. Les angles π, π'_1 se comptent à partir d'une ligne droite prise dans la face d'incidence, et qui est la projection de l'axe du cristal sur cette face; pour l'obtenir, il faut mener par l'axe du cristal, un plan perpendiculaire à la face; ce plan se nomme la section principale du cristal, et sa trace sur la face d'incidence est l'origine des angles π, π'_1, que l'on compte ensuite à partir d'une des extrémités de cette ligne, toujours dans un même sens, depuis 0° jusqu'à 360°. λ est l'angle formé par l'axe du cristal avec la normale extérieure, et il doit être compté en allant de cette normale vers le côté où commencent les angles π : pour fixer les idées, supposons que la face d'incidence XX′ YY′ (*fig.* 6) soit placée horizontalement, alors sa normale IZ, à partir de laquelle les angles θ θ'_1 se comptent, sera verticale. Tournons maintenant

cette surface sur son propre plan, jusqu'à ce que la trace XX' de la section principale soit dirigée du nord au sud, et comptons les angles $\pi \pi'$, à partir de l'extrémité nord de cette trace en allant du nord vers l'est : alors ces angles seront des azimuths : maintenant, si nous considérons les lignes IX, IY, IZ, comme trois axes de coordonnées rectangulaires, menés autour du point d'incidence I, nous pourrons définir les rayons, soit par les angles θ et π, soit par les valeurs simultanées des coordonnées x, y, z, appartenantes à un de leurs points. Car si le rayon est, par exemple, IM, et que l'on prenne arbitrairement sur sa direction un point M, placé à une distance IM ou r de l'origine, on aura généralement

$$x = r \sin.\theta \cos.\pi ; \quad y = r \sin.\theta \sin.\pi ; \quad z = r \cos.\theta.$$

Nous avons supposé ici le rayon IM venant du dehors, et, par conséquent, incident sur la surface du cristal. La même notation s'appliquera également aux rayons réfractés, soit ordinaires, soit extraordinaires, en accentuant seulement les lettres qui désignent leurs angles. Mais, afin de distinguer par la notation même l'espèce de réfraction qu'ils subissent, nous emploierons communément, pour les rayons extraordinaires, les lettres θ'_n, π'_n, affectées d'un indice inférieur, placé à droite et indiquant le nombre n de pareilles réfractions que le rayon a subies; et, pour un rayon ordinaire, nous emploierons les lettres ${}_n\theta'$, ${}_n\pi'$, affectées d'un indice inférieur placé à gauche, pour indiquer le nombre des réfractions ordinaires qu'il a éprouvées. Enfin, pour les rayons incidents ou émergents, nous emploierons une notation analogue, avec la seule différence que nous supprimerons l'accent supérieur.

Comme les rayons réfractés existent en dedans du cristal, leurs coordonnées θ'_n, $_n\theta'$, toujours comptées de la normale extérieure, deviendront nécessairement plus grandes qu'un angle droit, et devront se compter du côté de la normale, où l'on a placé les azimuths π'_n, $_n\pi'$. Lorsque les valeurs de θ'_n et $_n\theta'$ ainsi évaluées, se trouveront moindres que 180°, les rayons réfractés qu'elles déterminent tomberont aussi de ce même côté de la normale; alors leurs tangentes seront négatives; mais quand θ'_n et $_n\theta'$ surpasseront 180°, les rayons dépasseront la normale inférieure et iront tomber du côté opposé. Alors leurs tangentes seront positives.

l'angle λ formé par l'axe du cristal avec la normale extérieure, doit être aussi compté du côté de cette normale, où l'azimuth π est nul, parce qu'en établissant les formules, on a supposé l'axe placé dans l'azimuth $\pi = 0$; alors, s'il est réellement situé de ce même côté de la normale (comme la *fig.* 6 le représente), la valeur de λ, qui est réellement le θ' de l'axe, sera comprise entre 90° et 180°; mais si l'axe se dirige du côté opposé de la normale (comme dans la *fig.* 7), λ deviendra plus grand que 180°, et moindre que 270°. Dans tous les cas, il faut le compter suivant le même sens, en passant par l'azimuth $\pi = 0$.

Avec ces seules précautions, les formules générales (1) s'appliqueront d'elles-mêmes à toutes les coupes du cristal, à toutes les positions de l'axe, et à toutes les directions possibles d'incidence et de réfraction. Le seul jeu des signes algébriques indiquera toujours la marche des rayons avec une parfaite fidélité; les formules renferment même, comme cas particulier, les effets de la réfraction ordinaire; car, en y supposant $b = a$, elles donnent $\pi'_1 = \pi$ et $\sin.\ \theta'_1 = b \sin.\ \theta$; ce

qui est précisément la loi de Descartes. En effet, quand on rend *a* égal à *b*, on fait disparaître le terme variable de l'expression de la vîtesse, qui devient alors constante, comme dans la réfraction ordinaire, et égale à $\frac{1}{b}$.

Venons maintenant à l'application de ces formules, et à leur comparaison avec l'expérience : on peut d'abord la considérer comme faite sur le spath d'Islande, par les nombreuses et exactes recherches de Huyghens, de Wollaston et de Malus. Mais ce cristal est jusqu'ici le seul sur lequel on en ait fait l'épreuve complète. Or, il est de ceux qui exercent la double réfraction répulsive : essayons donc d'abord si la même loi s'applique aussi aux cristaux dont la double réfraction est attractive; le cristal de roche nous servira d'exemple.

Observations sur le cristal de roche.

DÉTERMINATION DE L'AXE.

Si l'on taille une aiguille hexaèdre de cristal de roche, par un plan perpendiculaire à ses arêtes, tout rayon introduit perpendiculairement à cette face traverse le cristal, parallèlement aux arêtes de l'aiguille, sans se diviser, et il sort simple, par quelque face qu'il sorte. L'axe du cristal est donc parallèle à ces arêtes.

RÉFRACTION DES RAYONS PAR DES PRISMES DONT LES ARÊTES SONT PARALLÈLES A L'AXE.

L'observation la plus facile après la précédente, consiste à tailler un prisme dont le tranchant soit parallèle à l'axe du cristal, et à rendre le plan d'incidence perpendiculaire à cet axe. En effet, dans cette disposition, le rayon réfracté extraordinaire reste dans le même plan que l'ordinaire, par

conséquent dans le prolongement du plan d'incidence; et les mêmes conditions se retrouvent encore à la surface de sortie. En outre, dans ce cas, la marche du rayon extraordinaire est, comme celle de l'ordinaire, soumise à la loi de Descartes sur la proportionnalité des sinus.

En effet, lorsque la face d'incidence contient l'axe du cristal, l'angle λ formé par cet axe, avec la normale à la face, est droit : ainsi $\lambda=90°$. Si, de plus, le plan d'incidence est perpendiculaire à l'axe, $\pi=90°$. Ces valeurs, introduites dans les formules générales, (1) donnent d'abord $B=o$, $A=a^2$ et ensuite

$$tang.\,\theta'_1\,sin.\,\pi'_1=\frac{a\,sin.\,\theta}{\sqrt{1-a^2\,sin.^2\theta}}\,;\qquad tang.\,\theta'_1\,cos.\,\pi'_1=o.$$

La seconde équation donne $cos.\,\pi'_1=o$, ou $tang.\,\theta'_1=o$. Cette dernière supposition ne saurait avoir lieu en général, et ne saurait sur-tout s'accorder avec la première équation. Il faut donc prendre l'autre racine $cos.\,\pi'_1=o$, qui donne $\pi'_1=90°$, ou $\pi'_1=270°$; c'est à-dire que l'azimuth du rayon réfracté extraordinaire est le même que celui du rayon incident, ou est situé sur son prolongement. Par conséquent, ce rayon reste dans le plan d'incidence. En prenant la seconde racine, nous aurons $sin.\,\pi'_1=-1$; et, par suite,

$$tang.\,\theta'_1=-\frac{a\,sin.\,\theta}{\sqrt{1-a^2\,sin.^2\theta}},$$

qui peut se mettre sous la forme $sin.\,\theta'_1=a\,sin.\,\theta$: c'est-à-dire que le sinus d'incidence est au sinus de réfraction en raison constante, comme pour le rayon ordinaire : seulement la raison de ce rapport est différente, et égale à $\frac{1}{a}$, au lieu de $\frac{1}{b}$.

Le mode d'observation que j'ai employé consiste, comme je l'ai dit, à aggrandir la double réfraction, en l'observant à travers des prismes d'un grand angle dont on compense, en grande partie, la dispersion, en leur opposant un prisme de verre d'un angle à-peu-près égal (*fig.* 8). Après avoir collé ensemble ces deux prismes avec du mastic en larmes, on présente le prisme de cristal directement aux objets lumineux, et l'on place l'œil en V, de l'autre côté du double prisme, au-delà du verre : puis on mesure l'écartement des deux traits dont les images réfractées, étant vues de cette manière, coincident; c'est-à-dire que l'on compare l'un à l'autre deux rayons incidents OI, E*i*, dont l'un est réfracté ordinairement, l'autre extraordinairement dans le prisme de cristal, et dont la différence d'incidence compense la différence de réfraction; de sorte qu'ils sortent ensemble suivant la même droite I_1V, et arrivent ensemble en V à l'œil de l'observateur.

Or, du moment où ces deux rayons ont pénétré sensiblement dans le prisme de verre postérieur, ils y suivent un même rapport de réfraction; donc, puisqu'ils sortent ensemble du verre en I_1, il faut qu'ils coïncident dans leur direction à travers sa substance, c'est-à-dire que leur entrée dans le verre se fait sous le même angle, et au même point.

Cela posé, appelons n le rapport constant des sinus pour la réfraction ordinaire, rapport que nous avons dit plus haut être égal à $\frac{1}{b}$; désignons par φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5, les angles que le rayon, qui subit cette réfraction, forme successivement avec les diverses surfaces des deux prismes.

Appelons de même n', le rapport constant des sinus, qui

convient à la réfraction extraordinaire; rapport que nous avons dit, plus haut, être égal à $\frac{1}{a}$; soient ψ, ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, ψ_5, les angles qui s'y rapportent.

Enfin, appelons c, c_1 les angles réfringents des deux prismes, et désignons par m le rapport constant de réfraction, pour le prisme de verre postérieur, lorsque les rayons y pénètrent en sortant de l'air.

Céla posé, la marche du rayon ordinaire sera assujettie aux conditions suivantes :

$$cos.\,\varphi = n\,cos.\,\varphi_1 \quad \varphi_2 = c + \varphi_1 \quad cos.\,\varphi_3 = \frac{n}{m}cos.\,\varphi_2$$
$$\varphi_3 = c_1 + \varphi_4 \quad cos.\,\varphi_5 = m\,cos.\,\varphi_4.$$

De même, pour le rayon extraordinaire, on aura

$$cos.\,\psi = n'\,cos.\,\psi_1 \quad \psi_2 = c + \psi_1 \quad cos.\,\psi_3 = \frac{n'}{m}cos.\,\psi_2$$
$$\psi_3 = c_1 + \psi_4 \quad cos.\,\psi_5 = m\,cos.\,\psi_4;$$

et, par le mode d'observation dont nous faisons usage, on doit ávoir

$$\varphi_3 = \psi_3 \quad \varphi_4 = \psi_4 \quad \varphi_5 = \psi_5.$$

Si on élimine φ_1 et φ_2 entre les trois premières équations, relatives à la réfraction ordinaire, on en tire, entre φ et φ_3, la relation suivante

$$n^2\,sin.^2 c = cos.^2\varphi - 2m\,cos.\,c\,cos.\,\varphi\,oos.\,\varphi_3 + m^2\,cos.^2\varphi_3.$$

On a de même, pour la réfraction extraordinaire,

$$n'^2\,sin.^2 c = cos.^2\psi - 2m\,cos.\,c\,cos.\,\psi\,cos.\,\psi_3 + m^2\,cos.^2\psi_3.$$

Puisque le mode d'observation mis en usage, donne toujours $\psi_3 = \varphi_3$, si l'on retranche ces deux équations l'une de l'autre,

le dernier terme disparaît, et il reste

$$(n'^2-n^2)\,sin.^2 c = cos.^2\psi - cos.^2\varphi - 2m\,cos.c\,cos.\varphi_1\,(cos.\psi - cos.\varphi);$$

ou, en remplaçant $m\,cos.\,\varphi^1$ par sa valeur $n\,cos.\,\varphi^1$, et transformant les différences en produits,

$$(n'^2-n^2)\,sin.^2 c = sin.(\varphi-\psi)\,sin.(\varphi+\psi) - 4n\,cos.c\,cos.\varphi_1\,sin.\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)\,sin.\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi).$$

Lorsque l'angle c du prisme de cristal est droit, le dernier terme du second membre disparaît de lui-même, et il reste;

$$n'^2-n^2 = sin.\,(\varphi-\psi)\,sin.\,(\varphi+\psi).$$

Ainsi l'on en peut tirer la valeur du coëfficient n'^2-n^2, presque sans calcul, lorsque l'on connaît les angles φ et ψ que les deux rayons forment avec la première surface du prisme à leur incidence. Et l'on peut remarquer ici, comme un grand avantage de notre méthode d'observation, quelle donne immédiatement $\varphi-\psi$ par l'écartement observé des deux images, sans le faire dépendre de l'exactitude absolue des angles φ et ψ.

Je vais maintenant appliquer ces formules à des observations de coïncidences, faites avec différents prismes de cristal de roche taillés comme elles le supposent, c'est-à-dire, parallèlement à l'axe des aiguilles.

Première expérience. L'angle c du prisme de cristal était 90°. 1'. 0"; l'angle c_1 du prisme de verre, 90°. 10'. 30", l'un et l'autre mesurés par la réflexion de la lumière. Ces deux prismes étant assemblés, on pose le premier par une de ses faces sur le sommet du support H_1 (*fig.* 9), et, plaçant

l'œil en V derrière le prisme de verre, on observe les coïncidences des traits de la division horizontale AX, comme il a été expliqué pag. 205. Voici les éléments des résultats : toutes les longueurs sont exprimées en millimètres.

HAUTEUR du support IH.	VALEUR de HO observée.	VALEUR de HE observée.	ÉCART des traits dont les images coïncident, OE observée.	VALEUR de l'angle φ conclue.	VALEUR de l'angle ψ conclue.	VALEUR de $n'^2 - n^2$ conclue.
50mm	50mm	53mm	3mm	45° 00′ 00″	43° 19′ 54″	0,0291014
	63	67	4	38.26.14	36.43.58″	0,0287530
	72	77	5	34.46.40	32.59.50	0,0287631
100	82	87	5	50.38.54	48.58.36	0,0287613
	102	108	6	44.25.58	42.47 50	0,0285086
	116	113	7	40.45.50	39. 6.40	0,0283932
	126	134	8	38.26.14	36.43.58	0,0287530
Moyenne en rejetant la première.............						0,0286553

La valeur de $n'^2 - n^2$ étant positive, n' surpasse n, ce qui montre que le cristal employé exerce la double réfraction attractive. Dans ces observations, les deux rayons OI, Ei, qui coïncident en I, dans leur émergence, entrent dans le cristal par des points différents I, i, comme le représente la figure. Il faut donc, à la rigueur, avoir égard à cette différence, lorsque l'on calcule les angles d'incidence φ et ψ relatifs à chacun de ces rayons. Par exemple, si l'on a observé les coïncidences des traits, lors de leur disparition près du support

opaque, c'est-à-dire par des rayons OI, E*i*, qui rasent le bord supérieur *h* de ce support, on pourra admettre que le rayon ordinaire OI pénètre le cristal au point I même, de sorte que, pour ce rayon, la tangente de l'angle d'incidence OIB ou φ, comptée de la surface BC du cristal, est égale à $\frac{Hh}{HO}$; mais alors la tangente de l'angle analogue ψ, pour le rayon extraordinaire, sera $\frac{Hh}{HE-Ii}$, de sorte qu'à la rigueur, il faudrait connaître la distance I*i* des deux points d'incidence, pour la calculer.

Or, cette distance est d'autant moindre que l'on emploie de plus petits prismes, et que l'on observe les coïncidences plus près du bord tranchant C de leur angle réfringent. On peut même, à l'aide de cette dernière précaution, rendre l'écart des deux points d'incidence tout-à-fait insensible; car il n'est occasionné que par la longueur du trajet que les deux rayons font dans le cristal avant de se réunir au point d'émergence I_1. Conséquemment, si ce trajet est très-petit, l'écart des points I et *i* sera incomparablement plus petit encore, et pourra être tout-à-fait négligé dans les calculs : de sorte que la tangente de l'angle ψ pourra aussi être supposée égale à $\frac{Hh}{HE}$, et immédiatement calculée par les éléments, que l'on observe sur la division même. J'ai toujours opéré de cette manière dans les précédentes observations. Néanmoins, comme la correction relative à l'intervalle I*i* pourrait devenir nécessaire à employer, ou au moins à apprécier dans certaines circonstances, il est bon d'en indiquer ici le calcul. Seulement nous le limiterons au cas où le prisme de cristal a peu d'épaisseur dans les parties que les rayons traversent,

de sorte que l'écart des points d'incidence Ii soit très-petit, comparativement à la distance des traits dont on observe la coïncidence : cette disposition, convenable pour rendre les corrections très-petites, est toujours facile à adopter.

Nommons donc x la distance CI du bord du prisme au point d'incidence I, par lequel entre le rayon ordinaire; et soit x' la distance analogue Ci pour l'autre rayon, en sorte que $x'-x$ soit la valeur de l'intervalle Ii qu'il s'agit de déterminer. Cela posé, en conservant pour les angles d'incidence et de réfraction OIB, CII′ DI′ I, les dénominations adoptées pag. 246, nous aurons d'abord

$$\cos.\varphi_1 = \frac{1}{n}\cos.\varphi\,; \quad \varphi_2 = c + \varphi_1.$$

Supposons maintenant que le rayon ordinaire II$_1$, sorte du cristal en I$_1$, et y rentre avec la réfraction extraordinaire: il engendrera le rayon extraordinaire I$_1 i$; or, puisqu'ici les deux réfractions suivent également la loi de Descartes, si l'on nomme ψ_1 l'angle DI$_1 i$ analogue à φ_2, on aura

$$\cos.\psi_1 = \frac{n}{n'}\cos.\varphi_2\,; \quad \psi_2 = c + \psi_1.$$

Si l'on nomme ensuite h la distance CI$_1$ du bord du prisme au point commun d'émergence des deux rayons, on aura par l'un et par l'autre :

$$h = \frac{x\sin.\varphi_1}{\sin.\varphi_2} \qquad h = \frac{x'\sin.\psi_1}{\sin.\psi_2},$$

De-là on tirera la différence $x'-x$, ou l'intervalle qui existe sur la première surface du cristal, entre les points d'incidence I et i des deux rayons.

En effet, on a d'abord, en éliminant h,

$$x' = \frac{x \sin. \varphi_1}{\sin. \varphi_2} \cdot \frac{\sin. \psi_2}{\sin. \psi_1},$$

d'où l'on tire,

$$x' - x = x \cdot \frac{(\sin. \varphi_1 \sin. \psi_2 - \sin. \varphi_2 \sin. \psi_1)}{\sin. \psi_1 \sin. \varphi_2};$$

en mettant dans cette dernière expression, au lieu de ψ_2 et φ_2, leurs valeurs $c + \psi_1$, et $c + \varphi_1$, elle se réduit à

$$x' - x = \frac{x . \sin. c \sin. (\varphi_1 - \psi_1)}{\sin. \psi_1 \sin. (c + \varphi_1)}.$$

Dans toutes les expériences que l'on peut le plus ordinairement faire, les angles φ et ψ sont très-peu différents l'un de l'autre, ainsi que les angles φ_1 et ψ_1, de sorte que leur différence $\varphi_1 - \psi_1$ est extrêmement petite. Cela a toujours été ainsi dans mes expériences, et l'on peut en voir la preuve dans celles que j'ai déja rapportées. Alors, si l'on a soin de prendre x également très-petit, c'est-à-dire d'observer extrêmement près du bord tranchant du prisme, la différence $x' - x$ sera excessivement petite, par rapport à x même. On pourra donc, ou la négliger, ou la calculer avec les valeurs des angles φ_1, ψ_1, résultant de la première approximation, dans laquelle on supposait $x' - x$ nul. En effet, cette supposition permettant de calculer immédiatemant φ et ψ avec les éléments que l'observation donne, on en peut déduire une première valeur de $n'^2 - n^2$; et, comme n est connu préalablement, par des observations sur la réfraction ordinaire, on en peut conclure n' : or, dans les dispositions que nous avons supposées à l'expérience, cette valeur sera suffisamment exacte pour calculer l'intervalle Ii des deux points d'incidence, d'où l'on

conclura ensuite la vraie valeur de l'angle ψ, et par suite celle de n'^2-n^2, comme précédemment.

Supposons, par exemple, que, dans la dernière des expériences rapportées pag. 249, le point d'incidence I ait été pris à 5 millimètres du bord tranchant du prisme de cristal, dont l'angle était droit. Alors on aura $x=5$; et l'on trouve que $x'-x$ serait égale à $0^{mm},115$. Par conséquent, la distance HE du point de départ du rayon extraordinaire au pied du support, devrait être diminuée de cette quantité; ce qui la réduirait de 134^{mm} à $133^{mm},885$. Par suite, la valeur de *tang.* ψ serait $\frac{100}{133,885}$, ce qui donne $\psi=36°.45'.23''$; et cette valeur ainsi corrigée, étant combinée avec la valeur de φ, qui reste la même, donnerait n'^2-n^2 égal à 0,028358, au lieu de 0,028753; ce qui fait à-peu-près quatre unités de différence sur la quatrième décimale. Mais la supposition de $x=5$ est extrêmement exagérée, car j'ai eu grand soin d'observer par le tout petit bord du prisme : de sorte que la correction réelle doit être aussi beaucoup plus petite que le calcul précédent ne la donne. Pour la diminuer encore davantage, et la rendre presque insensible, j'ai fini par joindre à cette précaution celle d'observer sur des supports beaucoup plus hauts, et à des distances beaucoup plus grandes des divisions; ce qui me donnait en outre l'avantage d'observer des écarts beaucoup plus grands. Toutefois ces changements n'ont eu lieu qu'après une seconde expérience que je vais rapporter.

Seconde expérience. Angle du prisme de cristal de roche, 58°. 5′ (*fig.* 10). C'est le même morceau que précédemment; mais on observe par d'autres faces différemment inclinées.

HAUTEUR du support IH.	VALEUR de HO observée.	VALEUR de HE observée.	ÉCART des traits dont les images coïncident, OE observée.	VALEUR de l'angle φ conclue.	VALEUR de l'angle ψ conclue.	VALEUR de $n'^2 - n^2$ conclue.
50mm	40mm	41mm	1mm	51°20′25″	50°38′54″	0,0283933
	64	66	2	37.59.54	37. 8.48	0,0294584
	79	82	3	32.19.50	31.22.23	0,0292667
100	79	81	2	51.41.30	50.59.32	0,0287955
	109	112	3	42.32. 3	41.45.37	0,0288476
	130	134	4	37.34. 7	36.43.58	0,0286714

Ici l'on peut remarquer que les trois premières observations faites avec un support de 50mm, s'accordent moins bien entre elles que les autres qui sont faites avec une hauteur double. En effet, tous les genres d'erreurs, que l'observation ou les corrections d'épaisseur peuvent introduire, doivent devenir d'autant plus sensibles, que la distance des traits observés est moindre. Ce motif, autant que l'accord même des dernières observations, doit leur faire donner la préférence. Aussi leur moyenne donne-t-elle pour $n'^2 - n^2$, la valeur 0,0287715, c'est-à-dire presque exactement la même que l'observation par d'autres faces nous avait donnée. Toutefois, malgré le peu de différence de ces résultats, le premier semble encore plus probable, parce que la valeur

de l'angle réfringent *c* y était plus grande; et, qu'étant presque droit, la précision de sa mesure avait beaucoup moins d'influence sur le résultat, comme on le sentira aisément à l'inspection seule de la formule par laquelle nous calculons n'^2-n^2. Au reste, il faut considérer que c'étaient là mes premiers essais dans ce genre d'observations, et l'on en verra plus loin de beaucoup plus exactes; mais j'ai voulu rapporter aussi les précédentes, non-seulement parce que je crois que le résultat en est juste, mais encore pour montrer les plus grandes limites d'erreurs que la méthode des coïncidences puisse donner.

Tel qu'il est, l'accord de ces résultats donne lieu à une conséquence théorique importante. Les deux systêmes d'observations, ayant été faits dans des sens divers autour de l'axe de la même aiguille, la constance de n'^2-n^2 prouve la constance de n' autour de cet axe : c'est-à-dire que la réfraction extraordinaire y est assujettie à un rapport constant de sinus, et toujours au même rapport, de quelque côté que les rayons y soient introduits. Cette constance et cette symétrie d'action sont un des caractères distinctifs des cristaux à un seul axe, dans la loi de Huyghens : ainsi, en cela, le cristal de roche y satisfait parfaitement.

Voici une autre épreuve fondée sur le même principe : soit BCD (*fig.* 11) un prisme de cristal de roche équilatéral, dont les arêtes soient parallèles à l'axe des aiguilles. Collez à l'une des surfaces de ce prisme, un prisme de crown D'B'C' aussi équilatéral, dont la dispersion corrigera en grande partie la sienne; puis, plaçant l'œil en V, et regardant les traits d'une division très-fine, par des rayons réfléchis deux fois en I_1 et I_3, comme le représente la figure, vous verrez

placé le prisme sur mon support au devant de la division verticale de mon appareil, comme le représente la *fig.* 12; j'ai observé les numéros des traits qui, vus par réfraction, coïncidaient avec d'autres traits vus directement; et j'en ai déduit les déviations éprouvées par ces rayons, pour une incidence donnée, ce qui détermine le rapport de réfraction par la formule que j'ai donnée, pag. 209 du tome III de mon Traité de physique : voici les éléments de ces résultats.

DISTANCE du prisme à la division verticale AH ou NI.	HAUTEUR du point d'incidence HI ou AN.	HAUTEUR du trait observé par réfraction ordinaire AO.	HAUTEUR du trait correspondant par vision directe AR.	INCIDENCE du rayon OI compté de la surface OIA ou φ, conclue.	DÉVIATION produite par la réfraction OIR ou Δ, conclue.	RAPPORT de réfraction ordinaire *n*, conclu.
265mm	366mm	359	238	91° 30′ 49″	24° 16′ 4″	1, 55696
265	366	449	358	72.36.33	19. 7.12	1, 53719
407	369	500	362	72. 9.30	18.49.37	1, 54954
Moyenne...............................						1,547897

L'angle d'incidence φ se conclut des distances IN, NO; la première s'observe immédiatement, et est égale à AH; la seconde est l'excès de AO sur AN : ces éléments étant connus, on a $tang.\ \varphi = \frac{\mathrm{NI}}{\mathrm{NO}}$; et l'angle OIN, inclinaison du rayon sur l'horizontale IN, sera $90° - \varphi$; on aura de même l'inclinaison R*rn* du rayon direct R*r* sur l'horizontale menée par son point d'incidence, au moyen de NI, NR, et de l'intervalle I*i* compris, sur la surface d'incidence, entre les points d'incidence des deux rayons. Mais si le prisme est très-mince, ou s'il est suffisamment éloigné de la division verticale, les points

I et *i* peuvent être confondus ensemble; alors l'inclinaison du rayon R*i* sur l'horizontale, aura pour tangente trigonométrique $\frac{NR}{NI}$. Cette inclinaison, ajoutée à $90° - \varphi$, si elle tombe du côté opposé de l'horizontale, comme dans la *fig.* 12, ou retranchée dans le cas contraire, donne la déviation OKR ou Δ, au moyen de laquelle on obtient n.

Malus, par une expérience réellement faite sur la réfraction ordinaire du cristal de roche, quoiqu'il la supposât faite sur l'extraordinaire, a trouvé n égal à 1,548435, ce qui diffère extrêmement peu de notre moyenne. Si l'on voulait adopter la combinaison de cette expérience avec les miennes, en faisant valoir celles-ci proportionnellement à leur nombre, on aurait $n = 1,54803$. L'accord de ces résultats entre eux, quoiqu'ils soient déduits d'observations si diverses, démontre évidemment la constance du rapport de réfraction ordinaire dans le cristal de roche parfaitement pur.

Ces éléments étant déterminés, j'ai observé la duplication des images par la méthode des coïncidences, en faisant passer les rayons à travers deux autres faces du même prisme qui faisaient entre elles un angle de 90°. 1'. 0 d'après le goniomètre à réflexion. Cet angle étant compensé par un prisme de crown rectangulaire, comme je l'ai expliqué plus haut, j'ai fixé le prisme sur la colonne de mon appareil, de manière que la face d'incidence antérieure fût exactement parallèle à la division verticale, ce que j'obtenais en approchant la colonne, jusqu'à ce que la surface du prisme vînt s'appliquer contre la division : cette disposition est représentée *fig.* 13. J'avais d'ailleurs soin d'observer tout près du bord tranchant du prisme, afin que la correction d'épaisseur

devînt absolument insensible. Enfin la hauteur du point d'incidence I au-dessus de la division horizontale, c'est-à-dire HI ou AN, était limitée, comme je l'ai expliqué pag. 204; et sa valeur était de 371^{mm} : voici le tableau des autres éléments observés, avec les résultats qui s'en déduisent.

DISTANCE de la surface d'incidence à la division verticale AH ou NI.	VALEUR de AO observée.	VALEUR de AE observée.	ÉCART des traits dont les images coincident, OE observée.	VALEUR de l'angle φ conclue.	VALEUR de l'angle ψ conclue.	VALEUR de $n'^2 - n^2$ conclue.
134^{mm}	285^{mm}	299^{mm}	6^{mm}	57° 18′ 30″	55° 31′ 40″	0,0286361
	255	248.	7	49. 7. 6	47.27. 3	0,0289181
	235	227	8	44.32.32	42.56.24	0,0285151
	220	211	9	41.35.11	39.56.46	0,0285743
	210	200	10	39.46.14	38. 5. 0	0,0287842
	198	187	11	37.45.37	36. 3.51	0,0284268
216	220	210	10	55. 2.37	53.18. 1	0,0288763
	187	176	11	49.34.26	47.55.30	0,0285284
	165	153	12	46.21.27	44.44.10	0,0282896
	122	107	15	40.56.26	39.17.22	0,0283955
239	206	195	11	55.22.47	53.37.54	0,0288406
	174	162	12	50.30. 8	48.49.52	0,0287762
	115	100	15	43. 1.59	41.24.32	0,0282100
294	183	170	13	57.24.10	55.38.26	0,0282987
	149	135	14	52.56.36	51.14.43	0,0287283
	120	105	15	49.30.40	47.51.45	0,0285320
	65	45	20	54.59.57	53.16.38	0,0284681
	Moyenne.					0,0285764

En réunissant ces expériences à celles que nous avons rapportées plus haut, on voit que la valeur de l'incidence extérieure ψ, comptée de la surface réfringente, a varié, pour le rayon extraordinaire, depuis $31°.22'.33''$, jusqu'à $55°.38'.26$; et, à cause de la diversité des angles des prismes employés, l'incidence intérieure ψ_1 du même rayon sur la seconde surface, a pris aussi différentes valeurs. Néanmoins la différence n'^2-n^2 des quarrés des vîtesses s'est toujours trouvée sensiblement la même. Donc, puisque la vîtesse ordinaire n est constante, ainsi que toutes les observations l'indiquent, l'extraordinaire n' est aussi constante dans le sens de réfraction que nous considérons; ce qui est la première condition de la loi de Huyghens.

Nous avons eu plus haut, par six expériences,

$$n'^2-n^2=0{,}0286554.$$

En faisant voter chacune de ces déterminations proportionnellement aux nombres d'expériences dont elle résulte, nous aurons, pour moyenne définitive, $n'^2-n^2=0{,}0285962$

Or, la valeur 1,547897, trouvée plus haut pour n, étant élevée au quarré, donne..........................	$n^2=2{,}3959844$
Par conséquent..................	$n'^2=2{,}4245806$
Et, par suite....................	$n'=1{,}557106.$

Comme ces résultats sont le fondement de tous les calculs que l'on peut faire sur la double réfraction du cristal de roche, je les réunirai avec leurs logarithmes dans le tableau suivant :

Éléments des deux réfractions dans le cristal de roche, pour la partie moyenne du spectre.

Rapport de réfraction ordinaire........	$n = 1,547897$;	$\log. n = 0,1897420$
Rapport de réfraction extraordinaire. ...	$n' = 1,557106$;	$\log. n' = 0,1923183$
Rapport des vitesses..........	$\frac{n'}{n} = 1,005950$;	$\log. \left(\frac{n'}{n}\right) = 0,0025763$
Différce des quarrés des vîtesses.	$n'^2 - n^2 = 0,028596$;	$\log. (n'^2 - n^2) = \bar{2},4563076$
Demi-somme des quarrés des vîtesses........	$\frac{1}{2}(n'^2 + n^2) = 2,410283$;	$\log. \frac{1}{2}(n'^2 + n^2) = 0,3820680$

Malus, dans son mémoire sur la double réfraction, couronné par la classe des sciences, donne aussi les valeurs de n et n' pour le cristal de roche, d'après des observations qu'il avait faites avec un prisme de cette substance, taillé parallèlement à l'axe. Comme on ignorait alors la distinction que j'ai depuis découverte entre les deux sortes de double réfraction, l'attractive et la répulsive, il supposa que, dans le cristal de roche, comme dans le spath d'Islande, l'image extraordinaire devait être la moins déviée des deux, au lieu qu'elle y est réellement la plus déviée; par une conséquence nécessaire, cette erreur lui a fait attribuer à n' la valeur qui convenait à n, et réciproquement. Mais, même en rétablissant l'ordre véritable de ces éléments, le résultat de ses observations donne encore pour $n'^2 - n^2$ une valeur trop forte environ de $\frac{1}{18}$, car elle se trouve égale à 0,030261, au lieu de

0,028596 que nous venons d'obtenir. Toutes les expériences que l'on peut faire sur la double réfraction et la polarisation du cristal de roche limpide, confirment cette remarque. L'erreur tient vraisemblablement à ce que Malus ne mesurait pas d'une manière immédiate la différence $n'^2 - n^2$ des quarrés des vîtesses, qui nous est directement donnée par la méthode des coïncidences, mais la déduisait des valeurs absolues de n et n', données par la mesure directe des deux réfractions. Or, il est facile de voir que, dans cette méthode, la dispersion inévitable des deux images offre un grand obstacle à ce que les déterminations ainsi obtenues soient exactement comparables, ce qui peut occasionner de grandes erreurs dans la petite différence $n'^2 - n^2$.

Les coëfficients des deux réfractions étant maintenant déterminés, il faut les introduire dans les formules données par la loi de Huyghens, et éprouver ces formules sur des déviations observées dans d'autres sens. Tel est l'objet des expériences suivantes.

Réfraction des rayons par des prismes dont la première face est parallèle à l'axe et la seconde lui est oblique.

Quatrième expérience. J'ai pris une aiguille de roche HCDH' (*fig.* 14), dans laquelle HC représente la direction de l'axe. C'était la même qui constituait le prisme dont j'ai rapporté tout-à-l'heure les réfractions latérales. Vers une des extrémités de cette aiguille, on a taillé une face CD, dont l'inclinaison sur l'axe HC ou DH', étant mesurée par le goniomètre à réflexion, s'est trouvée de 37°. 15'. C'était une des

faces naturelles de la pyramide terminale; et ainsi son intersection avec la face CH était perpendiculaire à l'axe. J'ai compensé ce prisme par un prisme de crown CDF, d'un angle à-peu-près égal, et j'ai fixé le tout sur la colonne de mon appareil, de manière que la face antérieure HC fût parallèle à la division verticale; puis, plaçant l'œil en V, j'ai observé les divisions O, E, dont les rayons amenés par des réfractions diverses, coïncidaient suivant une même direction dans leur émergence. Le seul cas que je considérerai, parce que le calcul en est le plus simple, est celui dans lequel le rayon extraordinaire EiI' pénétrait le prisme perpendiculairement à la face HC, et par conséquent aussi perpendiculairement à l'axe du cristal. Pour que cette condition fût remplie, il suffisait de prendre les points E et i à égale hauteur, au-dessus de la division horizontale de l'appareil. Alors la direction du rayon étant symétrique par rapport aux deux côtés iC, iH de l'axe, la réfraction extraordinaire ne fait qu'accélérer sa vîtesse sans le dévier. Il continue ainsi sa route en ligne droite jusqu'à la seconde surface CD du prisme, où son incidence intérieure se fait dans la section principale même de cette face. D'après cela, conformément au mode de notation que nous avons adopté, cette incidence, comptée de la normale extérieure $I'N''$, devra être représentée par θ'_2; et, si nous voulons compter les azimuths sur cette face, à partir de la ligne $I'D$, l'azimuth du rayon incident intérieur π'_2 sera égal à 180°; ce qui donne $\sin. \pi'_2 = 0$; $\cos. \pi'_2 = -1$. Alors les coordonnées analogues pour le rayon émergent devront être représentées par θ_2 et π_2, lesquelles devront dériver des précédentes. Or, leur relation avec celles-ci se découvre tout de suite en remontant aux

équations différentielles auxquelles le mouvement du rayon réfracté extraordinaire est assujetti : car la perpendicularité de ce rayon sur l'axe pendant son trajet dans le cristal, fait que les angles u', u'' deviennent droits dans les formules générales de la pag. 230; ce qui rend $\left(\frac{dv'_2}{d\pi'_2}\right)$ nul, ainsi que $\left(\frac{dv'_2}{d\theta'_2}\right)$, et alors les équations (2) et (3) se réduisent à cette forme simple

$$v^2_1 = {}_1v^2 + k = n'^2;$$

$$-\sin.\theta_2\,\sin.\pi_2 = v_1\,\sin.\theta'_2\,\sin.\pi'_2;$$

$$-\sin.\theta_2\,\cos.\pi_2 = v_1\,\sin.\theta'_2\,\cos.\pi'_2:$$

la première indique que la vîtesse du rayon réfracté est égale à la constante n'. Si l'on fait cette substitution dans les deux dernières, et qu'on y mette aussi, pour l'azimuth intérieur π'_2, les valeurs que nous sommes convenus de lui assigner, elles donnent

$$\sin.\pi_2 = 0; \qquad \cos.\pi_2 = 1; \qquad \sin.\theta_2 = n'\,\sin.\theta'_2:$$

c'est-à-dire que le rayon émergent reste dans le prolongement du plan d'incidence intérieur; qu'il se dirige du côté de la normale opposée au rayon incident, et qu'enfin l'émergence s'opère suivant la loi de Descartes, en prenant n' pour le rapport de réfraction. La démonstration précédente étant uniquement déduite de la perpendicularité du rayon réfracté sur l'axe, est indépendante de la direction donnée à la face d'émergence par rapport à la face d'incidence. Ainsi, pourvu que le rayon ait été perpendiculaire à l'axe dans l'intérieur du cristal, son émergence se fera suivant la loi de Descartes, par quelque face qu'il sorte. La remarque faite par Huyghens

sur les réfractions dans des plans perpendiculaires à l'axe, n'offre qu'un cas particulier de cette propriété.

Pour appliquer ceci à notre expérience, appelons c l'angle réfringent de notre prisme, qui est désigné par HCD dans la *fig.* 14. Alors l'angle d'incidence intérieur $\theta'_{,}$, qui doit être compté à partir de la normale extérieure I′ N″, sera EI′N″, et aura pour valeur $90° + 90° - c$, ou $180° - c$; de sorte que, si l'émergence se faisait dans l'air, comme l'incidence intérieure, on aurait $sin.\,\theta_{,} = n'\,sin.\,c$. Mais l'émergence ayant lieu dans le prisme de crown postérieur, dont nous désignerons le rapport de réfraction par m, on aura réellement $sin.\,\theta_{,} = \frac{n'}{m}\,sin.\,c$. Or si, conformément à nos notations, on désigne par $_{,}\theta'$ l'angle intérieur d'incidence II′N″, formé par le rayon ordinaire OII′ qui coïncide avec EiI′ dans son émergence, l'angle d'émergence $\theta_{,}$ sera commun à ces deux rayons; de sorte qu'on aura également $sin.\,\theta_{,} = \frac{n}{m}\,sin.\,_{,}\theta'$; et, par conséquent, en éliminant m,

$$sin.\,_{,}\theta' = \frac{n'}{n}\,sin.\,c.$$

Maintenant, si à l'angle II′N″ ou $_{,}\theta'$, on ajoute ICI′ ou c, la somme $c + _{,}\theta'$ sera l'angle NII′, formé par le rayon réfracté ordinaire II′ avec la normale extérieure IN à la première face du prisme : de-là, avec la loi de Descartes, vous tirerez l'angle extérieur d'incidence OIN ou $_{,}\theta$ par la formule

$$sin.\,_{,}\theta = n\,sin.\,(c + _{,}\theta').$$

L'observation ne donne pas immédiatement cet angle, mais l'écart OE des deux traits d'où les rayons partent; or, cet écart se compose, 1° de ON ou $z\,tang.\,_{,}\theta$, en nommant z

la distance de la face antérieure CH à la division verticale; 2° de Ii ou e *tang.* $II'i$ en nommant e l'épaisseur iI' du prisme. Or, l'angle $II'i$ est supplément de NII', par conséquent égal à $180° - (c + {}_{,}\theta')$: ainsi $-e\, tang.\, (c + {}_{,}\theta')$ sera la seconde partie de l'écart observé; et la valeur totale de celui-ci sera

$$-e\; tang.\; (c + {}_{,}\theta') + z\; tang.\, {}_{,}\theta.$$

Il ne reste plus qu'à introduire dans cette formule les données numériques relatives à notre observation.

J'ai dit plus haut que l'angle c était égal à 37° 15'. Avec cette valeur et celles de n et n' précédemment déterminées, on trouve

$${}_{,}\theta' = 142°.29.25; \quad c + {}_{,}\theta' = 179°.44'.25; \quad {}_{,}\theta = 0°,24',7''\tfrac{1}{4};$$

et enfin, pour l'écart OE,

$$e.0{,}0045330 + z.0{,}00701676.$$

Dans notre expérience l'épaisseur du prisme était exactement de 5 millimètres à l'endroit où passait le rayon EI; mettant donc pour e, 5^{mm}, l'écart calculé devient

$$0^{mm},0226650 + z.0{,}00701676.$$

Il ne reste plus qu'à substituer dans cette formule les valeurs successives de la distance z où l'on a observé les diverses coïncidences. Le résultat de ce calcul se trouve dans l'avant-dernière colonne du tableau suivant, qui offre la comparaison du calcul avec l'observation.

NUMÉROS des coïncidences.	DISTANCES à la division verticale, observées, HA ou z.	VALEUR de AO observée.	VALEUR de AE observée.	ÉCART DES TRAITS dont les images coïncident : observé.	calculé.	EXCÈS du calcul.
1	127^{mm}, n'existe pas encore 140, exacte......... 155, passée.	53^{mm}	52^{mm}	1^{mm}	1^{mm},005	+ 0^{mm},005
2	270, n'existe pas. 287, exacte.......... 298, passée.	54	52	2	2, 036	+ 0, 036
3	405, n'existe pas. 430, exacte.......... 450, passée.	55	52	3	3, 040	+ 0, 036
4	551, n'existe pas. 572, exacte.......... 583, passée.	56	52	4	4, 036	+ 0, 036
5	693, n'existe pas. 716, exacte.......... 730, passée.	57	52	5	5, 047	+ 0, 047
6	830, n'existe pas. 860, exacte.......... 878, passée.	58	52	6	6, 057	+ 0, 057

Par la manière dont j'ai rapporté les observations, on voit que, pour obtenir des limites certaines d'erreur, j'avais soin de marquer, avant et après chaque coïncidence, deux positions de la colonne, dans lesquelles les traits étaient évidemment séparés. Chaque position indiquée comme répondant exactement à une coïncidence est conclue d'une moyenne entre plusieurs essais. Les résultats calculés diffèrent, comme on voit, excessivement peu de ce que donne l'observation : cependant ils sont tous un peu plus forts, ce qui vient probablement de ce que la face antérieure HC du prisme ne se sera pas trouvée rigoureusement parallèle à l'axe du cristal, condition en effet presque impossible à obtenir rigoureu-

sement. Or, toute déviation de cette direction rendant l'incidence oblique à l'axe du cristal, doit diminuer l'écart des images réfractées. Les valeurs assignées par Malus aux coëfficients des deux réfractions donneraient des erreurs décuples des précédentes ; et qui, sur la dernière coïncidence, iraient jusqu'à près d'un demi-millimètre.

Réfraction des rayons par des prismes dont la première face est perpendiculaire à l'axe, et dont la seconde lui est parallèle.

Cinquième expérience. Voici maintenant une expérience dans laquelle les rayons sont entrés par une face perpendiculaire à l'axe, et sont sortis par une face qui lui était parallèle, en restant toujours dans un même plan.

Le prisme était rectangulaire et placé sur le support, comme le représente la *fig.* 15 : la face BC, perpendiculaire à l'axe, était horizontale ; et conséquemment l'autre face CD, parallèle à l'axe, était verticale. OI, E*i* sont les deux rayons qui, après avoir traversé le prisme en vertu d'une réfraction différente, se réunissent dans leur émergence en I′, et traversant ensemble le prisme de verre postérieur, arrivent ensemble à l'œil en V. Conséquemment ces deux rayons sont séparés dans l'intérieur du cristal, et leurs points d'incidence I, *i*, sont différents ; mais, en observant tout près du bord tranchant C du prisme cristallisé, cette séparation devient insensible et son effet négligeable. C'est ce que je supposerai d'abord dans le calcul que nous allons faire. Je montrerai ensuite comment on pourrait tenir compte de la séparation des points d'incidence.

Maintenant, pour découvrir la condition qui lie ensemble les deux rayons incidents Ei, OI, dans la loi de Huyghens, considérons d'abord le premier, et nommons θ_1 son angle d'incidence EiH compté de la normale extérieure. La face d'incidence étant perpendiculaire à l'axe du cristal, on a $\lambda = 180$, dans les équations générales de la page 240. Cette valeur de λ donne $\sin.\lambda = 0$, $\cos.\lambda = -1$; par conséquent, $B = 0$ et $A = b^2$. Alors, en marquant d'un indice inférieur les coordonnées d'incidence du rayon qui subit la réfraction extraordinaire, les deux équations citées deviennent

$$\tang.\theta'_1 \sin.\pi'_1 = \frac{a^2 \sin.\theta_1 \sin.\pi_1}{b\sqrt{1 - a^2 \sin.^2\theta_1}}$$

$$\tang.\theta'_1 \cos.\pi'_1 = \frac{a^2 \sin.\theta_1 \cos.\pi_1}{b\sqrt{1 - a^2 \sin.\theta_1}},$$

d'où l'on tire

$$\tang.\pi'_1 = \tang.\pi_1 ;$$

par conséquent,

$$\pi'_1 = \pi, \quad \text{ou } \pi'_1 = 180 + \pi_1 .$$

Ces deux valeurs de π'_1 mettent le rayon réfracté dans le prolongement du plan d'incidence, comme le rayon ordinaire. Nous adopterons la seconde qui le fait passer de l'autre côté de la normale, comme il faut que cela soit pour qu'il aille rencontrer l'autre face du prisme. Nous aurons alors

$$\sin.\pi'_1 = -\sin.\pi_1 ; \quad \cos.\pi'_1 = -\cos.\pi_1 ;$$

et les deux équations précédentes s'accorderont en une seule, qui sera

$$(1) \qquad \tang.\theta'_1 = -\frac{a^2 \sin.\theta_1}{b\sqrt{1 - a^2 \sin.\theta_1}}.$$

Conduisons maintenant ce rayon à la seconde face du prisme, en I'. Ici l'axe du cristal est dans le plan de la face d'émergence. On a donc $\lambda = 90^\circ$, par conséquent $sin.\,\lambda = 1$, $cos.\,\lambda = 0$, et par suite $B = 0$, $A = a^2$; alors les deux équations générales, étant convenablement accentuées, deviennent

$$tang.\,\theta'_2\, sin.\,\pi'_2 = \frac{a\, sin.\,\theta_2\, sin.\,\pi_2}{\sqrt{1 - (a^2\, sin.^2\,\pi_2 + b^2\, cos.^2\,\pi_2)\, sin.^2\,\theta_2}}$$

$$tang.\,\theta'_2\, cos.\,\pi'_2 = \frac{b^2\, sin.\,\theta_2\, cos.\,\pi_2}{a\sqrt{1 - (a^2\, sin.^2\,\pi_2 + b^2\, cos.^2\,\pi_2)\, sin.^2\,\theta_2}},$$

d'où l'on tire

$$tang.\,\pi'_2 = \frac{a^2}{b^2}\, tang.\,\pi_2.$$

Dans mes expériences l'émergence du rayon $I'I''$ s'observait suivant le plan même de la section principale; ainsi, en comptant les azimuths à partir du côté de la normale où l'émergence s'opère, on avait pour ce rayon $\pi_2 = 0$, ce qui donne $tang.\,\pi'_2 = 0$, par conséquent $\pi'_2 = 0$ ou $\pi'_2 = 180^\circ$: cette dernière valeur est évidemment celle qu'il faut admettre; alors la première des équations ci-dessus est identiquement satisfaite; et la seconde donne

$$(2) \qquad tang.\,\theta'_2 = -\frac{b^2\, sin.\,\theta_2}{a\sqrt{1 - b^2\, sin.^2\,\theta_2}}.$$

Mais il est facile de voir qu'en vertu de la rectangularité du prisme en C, on a entre les angles θ'_1, θ'_2, comptés l'un et l'autre à partir des normales extérieures, la relation

$$\theta'_2 = 290 - \theta'_1,$$

par conséquent,

$$tang.\,\theta'_2 = \frac{1}{tang.\,\theta'_2};$$

ce qui, étant substitué dans l'équation (2), donne

$$(3)\qquad \frac{1}{tang.\,\theta'_1} = -\frac{b^2\, sin.\,\theta_2}{a\sqrt{1-b^2\, sin.^2\,\theta_2}}.$$

En multipliant cette équation par l'équation (1), membre à membre, *tang.* θ'_1 disparaît, et il reste

$$(4)\qquad 1 = \frac{a\,b\; sin.\,\theta_1\; sin.\,\theta_2}{\sqrt{1-a^2\, sin.^2\,\theta_1}\;\sqrt{1-b^2\, sin.^2\,\theta_2}}.$$

C'est la relation entre le rayon incident extraordinaire et le rayon émergent qui en dérive. Or, dans notre mode d'observation, l'émergence θ_2 est aussi commune au rayon ordinaire OI, dont on observe la coïncidence avec l'autre; ainsi, en nommant ${}_{,}\theta$ l'incidence de ce rayon sur la première face BC du prisme, et faisant $b=a$ dans l'équation précédente, elle devra être encore satisfaite; ce qui donnera

$$(5)\qquad 1 = \frac{b^2\, sin.\,{}_{,}\theta\; sin.\,\theta_2}{\sqrt{1-b^2\, sin.^2\,{}_{,}\theta}\;\sqrt{1-b^2\, sin.^2\,\theta_2}}:$$

par conséquent, en égalant les seconds membres, on a

$$\frac{b\; sin.\,{}_{,}\theta}{\sqrt{1-b^2\, sin.^2\,{}_{,}\theta}} = \frac{a\; sin.\,\theta_1}{\sqrt{1-a^2\, sin.^2\,\theta_1}};$$

d'où, par la disparition des radicaux, on tire

$$(6)\qquad sin.\,\theta_1 = \frac{b}{a}\cdot sin.\,{}_{,}\theta,\quad \text{ou}\quad sin.\,\theta_1 = \frac{n'}{n}\, sin.\,{}_{,}\theta,$$

en remplaçant les constantes a et b par leurs valeurs $\frac{1}{n'}$, $\frac{1}{n}$.

Ce résultat peut être comparé directement à l'observation: en effet, pour chaque coïncidence observée sur la division

horizontale, on connaît les distances des traits O, E, au pied du support, c'est-à-dire, HO et HE. La hauteur du support est connue, et l'incidence des rayons est supposée se faire sur son bord; de sorte que l'intervalle *i*I est négligeable : on peut donc calculer d'abord l'angle OIN ou $_{,}\theta$, en prenant sa tangente égale à $\frac{OH}{IH}$. De-là on déduira $\theta_{,}$ par l'équation (6), ensuite *tang*.$\theta_{,}$; et enfin IH *tang*.$\theta_{,}$ donnera la distance HE, que l'on pourra comparer à l'observation.

Si l'on ne voulait pas faire passer les rayons par le bord du support même, mais en un autre point de la surface BC du prisme, on collerait à cet endroit une petite bande de papier dont le bord limiterait les incidences, et l'on compterait les distances OH, EH à partir de ce bord, ce qui serait facile en mesurant sa distance au bord du support qui servait précédemment de point de départ.

On pourrait aussi mesurer les coïncidences sur la division verticale, comme le représente la *fig.* 16; alors on connaîtrait la hauteur HI du point d'incidence, et sa distance IN à la division. L'observation des traits O, E, dont les images coïncident, donnerait les distances NO, NE; on pourrait donc encore calculer l'angle $_{,}\theta$ par sa tangente $\frac{NO}{NI}$; et le reste s'acheverait comme précédemment.

Maintenant, si l'on veut avoir égard à la séparation des points d'incidence I et *i* (*fig.* 15), nommons x la distance du point d'incidence I au tranchant de l'angle du prisme; nommons de même x' la distance analogue du point *i*; et désignant par h la distance commune CI′, où les deux rayons vont se rejoindre sur la seconde surface du prisme, on aura

évidemment

$$h = \frac{x}{tang.\,{}_{,}\theta'} \qquad h = \frac{x'}{tang.\,\theta'_{,}}\,;$$

par conséquent,

$$\frac{x'}{tang.\,\theta'_{,}} = \frac{x}{tang.\,{}_{,}\theta'}\,.$$

Or, en faisant $a = b$ dans l'équation (3), pour l'appliquer au rayon ordinaire, elle donne

$$\frac{1}{tang.\,{}_{,}\theta'} = -\frac{b.\,sin.\,\theta_{,}}{\sqrt{1 - b^{2}\,sin.^{2}\theta_{,}}}\,.$$

Alors, en comparant ce résultat à l'équation (3), on en tire

$$\frac{1}{tang.\,\theta'_{,}} = \frac{b}{a}\cdot\frac{1}{tang.\,{}_{,}\theta'}\,;$$

ou, en mettant pour a et b leurs valeurs,

$$\frac{1}{tang.\,\theta'_{,}} = \frac{n'}{n}\cdot\frac{1}{tang.\,{}_{,}\theta'}\,.$$

Maintenant, cette relation étant introduite dans l'équation entre x' et x, les angles $\theta'_{,}$, ${}_{,}\theta'$, disparaissent, et il reste

$$\frac{n'}{n}\,x' = x,$$

d'où l'on tire

$$x' = x - \frac{(n' - n)\,x}{n'}\,.$$

Dans le cristal de roche, $\frac{n'-n}{n'}$ est, à-très-peu-près, $\frac{1}{169}$: ainsi, premièrement, Ci est moindre que CI, comme le représente la figure; secondement, l'intervalle Ii des deux points d'incidence sera $\frac{1}{169}\,x$, c'est-à-dire $\frac{1}{169}$ de la distance du point d'incidence ordinaire au tranchant de l'angle du

prisme cristallisé. Si cette quantité est sensible, on calculera les directions de chaque rayon, en partant du point d'incidence qui lui est propre.

Voici maintenant des applications de ces formules : les coïncidences sont mesurées sur la division horizontale : on a toujours observé assez près du tranchant du prisme pour rendre insensible la correction d'épaisseur :

HAUTEUR du support IH.	VALEUR de HO, observée.	VALEUR de HE, observée.	VALEUR de l'angle θ, déduite de l'observation.	VALEUR correspondante de l'angle θ_1, déduite de la théorie.	VALEUR de HE, calculée.	EXCÈS du calcul.
mm 100	mm 92	mm 93	42° 36′ 50″	42° 55′ 42″	mm 93,02	mm + 0,02
	130	132	52.25.53	52.52.36	132,11	+ 0,11
	152	155	56.39. 0	57.10.18	155,01	+ 0,01
391,5	318	321	39. 5. 8	39.21.47	321,14	+ 0,14
	367	371	43. 9. 0	43.28.13	371,13	+ 0,13
391	308	311	38.13.43	38.29.51	310,99	— 0,01 (1)
	349	353	41.45. 6	42. 3.24	352,76	— 0,24
	411	416	46.25.43	46.47.17	416,20	+ 0,20

(1) Le prisme est toujours le même; mais il a été déplacé et replacé sur le support.

Voici d'autres mesures de coïncidences prises sur la division verticale :

DISTANCE du point d'incidence à la division verticale AH ou IN, observée.	VALEUR de NO, observée.	VALEUR de NE, observée.	VALEUR de l'angle θ, conclue de l'observation.	VALEUR correspondante de l'angle θ_1, déduite de la théorie.	VALEUR de NE, calculée.	EXCÈS du calcul.
mm	mm	mm			mm	mm
411	346,5	341,5	49° 52′ 1″	56° 26′ 23″	341,52	+0,02
496	347,5	341,5	54.59. 5	55.28.28	341,22	−0,28
149	103.0	101.0	55.20.42	55.50.28	101,10	+0,10 (1)
198	104.0	101.0	62.17.21	62.56.53	101,12	+0,12
236	105.0	101.0	66. 0.54	66.47.35	101,18	+0,18
236	159 0	156.0	56. 1 51	56.32.25	155,97	+0,03
268	145.0	141.0	61.35. 5	62.13.17	141,17	+0,17
269	105.0	100.0	68.40.39	69.34. 7	100,22	+0,22
318	156.0	151.0	63.52. 9	64.34.13	151,20	+0,20
366	256	251	55. 1.44	55.31. 9	151,36	+0,36
651	326	316	63.23.59	64. 5.10	316,30	+0,30
313	136	131	66.30.53	67.18.43	130,85	−0,15 (2)
385	246	241	57.25.23	57.57.38	240,94	−0,06
665	256	246	67. 3.53	67.53. 4	245,86	−0,14

(1) Le prime a été déplacé et replacé sur son support.

(2) Les observations sont faites avec un autre prisme.

Les trois dernières observations sont faites avec un autre prisme que les premières. Elles donnent des écarts moindres, parce que le premier prisme, ayant été tiré d'une aiguille peu épaisse, n'avait qu'une très-petite base, dont il fallait bien

laisser une partie exposée aux rayons incidents; de sorte qu'il ne se fixait sur le support que par une très-petite surface, que l'on ne pouvait conséquemment pas diriger aussi exactement qu'on l'aurait voulu. Il est évident que les erreurs de cette direction altèrent les incidences; et celles-ci à leur tour étant altérées, modifient les angles que les rayons réfractés forment avec l'axe du cristal. Si ces angles étaient peu différents de 0°, ou de 90°, leurs variations auraient peu d'influence sur la réfraction extraordinaire; mais, dans les observations précédentes, ils se trouvent presque au milieu de ces deux limites, ce qui fait que les erreurs qu'on y peut commettre, influent beaucoup sur l'écart des rayons, et par conséquent sur les coïncidences observées.

Réfraction des rayons dans des plans obliques à la section principale.

J'ai pris le prisme compensé à arêtes parallèles à l'axe déja employé pag. 248 : je l'ai fixé sur son support, comme dans ces premières observations; mais au lieu d'observer les coïncidences dans le plan de la section principale, je les ai observées sur des directions obliques, et dans le sens de l'écart même que la double réfraction donnait aux rayons. J'ai employé pour cela l'appareil additionnel, à division circulaire, expliqué pag. 203. J'ai eu soin de faire passer les rayons assez près du tranchant du prisme pour que leur incidence sur sa première surface pût être supposée se faire sensiblement en un même point; et j'ai marqué fort exactement ce point sur la surface même. La disposition de l'expérience est représentée dans la *fig.* 17; OI est le rayon ordinaire, EI le

rayon extraordinaire, qui émergent ensemble suivant une direction I″V oblique au plan de la section principale. Pour que cela puisse être, il faut que les deux points O, E, soient eux-mêmes hors de la section principale, et que leurs positions respectives aient entre elles certains rapports. Pour déterminer ces positions, je rapporte chacun de ces points, O, par exemple, à trois coordonnées rectangulaires, z, x, y. La première, IN ou z, est horizontale, perpendiculaire aux arêtes du prisme, et mesure la distance de la face d'incidence aux divisions croisées. La seconde, NP ou x, est aussi horizontale, mais elle est située dans le plan de la division transversale; enfin la troisième, PO ou y, est perpendiculaire aux deux autres, et parallèle à la division verticale AY. Ces trois coordonnées, partant du point d'incidence, suffisent pour déterminer la direction de tout rayon qui passe par ce point.

Pour les tirer de l'observation des coïncidences obliques, je remarque que cette observation détermine la position des points O, E (*fig.* 18), au moyen des distances A′C′, C′O, C′E, et de l'angle A′C′R′. De-là on peut aisément déduire NP, PO, ou ${}_{,}x$, ${}_{,}y$, coordonnées du point O qui se voit par réfraction ordinaire, et NQ, QE, ou $x_{,}$, $y_{,}$, coordonnées du point E qui se voit par l'autre réfraction. En effet, si l'on nomme H la distance commune NA′, qui peut s'observer immédiatement sur la division verticale AY; que l'on désigne A′C′ par D, C′O par ${}_{,}\delta$, C′E par $\delta_{,}$, et enfin l'angle A′C′R′ par α, on aura évidemment

$$ {}_{,}x = D + {}_{,}\delta \cos.\alpha \qquad {}_{,}y = H + {}_{,}\delta \sin.\alpha $$
$$ x_{,} = D + \delta_{,} \cos.\alpha \qquad y_{,} = H + \delta_{,} \sin.\alpha. $$

La troisième coordonnée z est commune aux deux points

E,O, et mesure la distance horizontale de la surface antérieure du prisme à la division verticale. Il faut remarquer que le point N d'où les coordonnées $_1x$ et x_1 se comptent, est censé situé sur le prolongement de la coordonnée horizontale z, menée par le point d'incidence I; de sorte que c'est proprement la projection de ce point sur la division verticale AY. Conséquemment, le point A', origine de la division transversale, doit être pris sur la verticale menée du point N; et c'est de là que les distances horizontales D doivent être comptées dans les formules précédentes. La détermination des points N et A' sera facile quand on aura fixé la position du point d'incidence I sur la surface antérieure du prisme, puisque, en faisant mouvoir la colonne, cette surface peut toujours être rapprochée de la division verticale jusqu'au contact; ce qui permet d'y rapporter immédiatement la position du point d'incidence I.

Concevons maintenant des coïncidences obliques, observées comme nous venons de le dire, et voyons comment on peut en comparer les indications à la théorie. Pour cela il faut suivre par le calcul, à travers le prisme de cristal, la marche des deux rayons réfractés ordinaire extraordinaire, qui coïncident dans leur émergence. C'est ce que nous allons faire en les rapportant aux mêmes systêmes de coordonnées que nous venons d'établir; mais, afin de ne pas trop compliquer ces considérations, nous nous bornerons au cas où le prisme est rectangulaire.

Soit I (*fig.* 19) le point d'incidence du rayon extraordinaire, sur la face antérieure du prisme que je supposerai dans le plan du papier. Menons par ce point les trois axes de coordonnées rectangulaires IX, IY, IZ; le premier IX, situé dans le plan de la face, parallèlement à l'arête C*c* du prisme,

laquelle se trouve être ici l'axe même du cristal ; le second IY, aussi dans le plan de la face, mais perpendiculaire à la même arête ; le troisième enfin, perpendiculaire aux deux autres, et mesurant la distance du point I, d'incidence aux divisions croisées, sur lesquelles les coïncidences se mesurent. Maintenant, soit EI le rayon incident qui se réfracte extraordinairement dans le prisme, et supposons que IE' soit la projection de ce rayon sur la face d'incidence. Alors l'angle EIZ sera son incidence comptée de la normale extérieure, et l'angle XIE' sera son azimuth compté de l'axe du cristal. Le premier de ces angles devra donc être désigné par θ_1 ; le second par π_1, d'après la notation que nous avons adoptée. Alors, si l'on prend sur le rayon EI, un point arbitraire M à la distance r_1 de l'origine, les coordonnées x_1, y_1, z_1 de ce point auront les valeurs suivantes :

$$x_1 = r_1 \sin. \theta_1 \cos. \pi_1$$
$$y_1 = r_1 \sin. \theta_1 \sin. \pi_1$$
$$z_1 = r_1 \cos. \theta_1,$$

dont le système déterminera complètement la direction du rayon incident EI.

Ce rayon, en pénétrant dans le prisme, s'y réfracte extraordinairement suivant II'. Sa nouvelle direction peut se rapporter aux mêmes axes ; et en désignant par θ'_1, π'_1, r'_1 les coordonnées d'un de ses points pris à la distance arbitraire r'_1 de l'origine I, on aura de même

$$x'_1 = r'_1 \sin. \theta'_1 \cos. \pi'_1 \qquad (2)$$
$$y'_1 = r'_1 \sin. \theta'_1 \cos. \pi'_1$$
$$z'_1 = r'_1 \cos. \theta'_1 ;$$

Dans ces formules, comme dans les précédentes, l'angle θ'_1 doit toujours être compté, de même que $_1\theta$, à partir de la normale extérieure IZ, et l'azimuth π'_1 à partir de l'axe IX dans le même sens que π_1. Alors le seul jeu des signes algébriques indiquera la position relative du rayon réfracté autour des axes de coordonnées IX, IY, IZ.

Conduisons maintenant le rayon réfracté II' jusqu'à ce qu'il perce la seconde surface du prisme, où il émerge, soit dans l'air, soit dans le verre, suivant la direction I'R. Pour déterminer cette nouvelle direction, menons encore, à partir du point d'émergence, trois nouveaux axes de coordonnées rectangulaires I'X', I'Y', I'Z'; le premier, I'X', dans le plan de la face d'émergence, et parallèle à l'arête C*c* du prisme, par conséquent aussi à l'axe du cristal; le second, I'Y', également dans le plan de la face, mais perpendiculaire à l'arête C*c*; le troisième, enfin, I'Z', perpendiculaire aux deux premiers. Supposons alors que I'R' soit la projection du rayon émergent I'R sur le plan de la face, l'angle R'I'X' sera son azimuth compté de l'axe du cristal, azimuth que nous désignerons par π_2; et nous appellerons de même θ_2 l'angle R I' Z', qu'il forme avec la normale extérieure I'Z'. Alors, en prenant sur la direction I'R une longueur arbitraire r_2 aboutissant à un point quelconque, les coordonnées x_2, y_2, z_2 de ce point auront les expressions suivantes

$$x_2 = r_2 \sin.\theta_2 \cos.\pi_2 \qquad (3)$$
$$y_2 = r_2 \sin.\theta_2 \cos.\pi_2$$
$$z_2 = r_2 \cos.\theta_2.$$

Le rayon réfracté II' peut aussi être rapporté, de la même manière, à ces nouveaux axes, d'après les angles qu'il forme

avec eux, et que nous désignerons par π'_2 et θ'_2; alors, en appelant x'_2, y'_2, z'_2, les nouvelles coordonnées angulaires d'un point quelconque de ce rayon, pris à la distance r'_2 du point I' d'émergence, on aura pareillement

$$x'_2 = r'_2 \, sin.\theta'_2 \, cos.\pi'_2 \qquad (4)$$
$$y'_2 = r'_2 \, sin.\theta'_2 \, sin.\pi'_2$$
$$z'_2 = r'_2 \, cos.\theta'_2.$$

Il faut maintenant lier ces coordonnées aux précédentes : pour cela désignons par $[x'_1]$, $[y'_1]$, $[z'_1]$ les longueurs absolues des trois coordonnées du point I' dans le premier systême, abstraction faite de leur signe, c'est-à-dire, en les supposant toutes trois prises positivement. Cela posé, considérons, dans l'espace, un point quelconque ayant pour coordonnées $x, y, z,$ dans le premier systême, dont l'origine est I, et $x_3\, y_3\, z_3$ dans le second sysême, dont l'origine est I'_1, on aura évidemment

$$x_3 = \left[x'_1\right] + x; \quad y_3 = \left[z'_1\right] + z; \quad -z_3 = \left[y'_1\right] + y.$$

Supposons maintenant, que le point choisi pour cette comparaison soit précisément le point I, c'est-à-dire, l'origine même du premier systême : alors ses coordonnées $x, y, z,$ seront nulles; et de plus, il faudra faire r'_2 égal à r'_1 dans les coordonnées x'_2, y'_2, z'_2, de ce point : observant enfin de rendre les valeurs de $[x'_1]$, $[y'_1]$, $[z'_1]$, positives, on aura ces trois conditions :

$$sin.\theta'_2 \, cos.\pi'_2 = - sin.\theta'_1 \, cos.\pi'_1$$
$$sin.\theta'_2 \, sin.\pi'_2 = - cos.\theta'_1$$
$$- cos.\theta'_2 = - sin.\theta'_1 \, sin.\pi'_1.$$

Divisant la seconde sucessivement par la première et par la troisième, puis celle-ci, par la première, on en tire

$$\left.\begin{aligned} tang.\,\pi'_2 &= \frac{1}{tang.\,\theta'_1\, cos.\,\pi'_1}; \\ -tang.\,\theta'_2\, sin.\,\pi'_2 &= \frac{1}{tang.\,\theta'_1\, sin.\,\pi'_1} \\ tang.\,\pi'_1 &= -\frac{1}{tang.\,\theta'_2\, cos.\,\pi'_2}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

L'exactitude de ces relations, quant à l'égalité des quantités et à leurs signes, peut être immédiatememt vérifiée sur la figure même que nous avons construite pour les établir; mais il est facile de s'assurer qu'elles sont indépendantes de cette figure, et qu'elles conviennent à toutes les positions relatives, que les origines I I' de nos deux systêmes peuvent avoir, l'une par rapport à l'autre, pourvu que les angles qui déterminent ces rapports de situation, soient comptés comme nous l'avons supposé. Toutefois, ce ne sont encore là que des relations de position, nécessitées par la forme du prisme. Il faut maintenant introduire les conditions de direction, résultantes du mode de réfraction que le rayon éprouve. Pour cela, considérons d'abord la première face : elle contient l'axe du cristal, ce qui rend $\lambda = 90°$ dans nos formules générales de la page 240. Alors, $cos.\,\lambda$ étant nul, B devient aussi nul, et A se réduit à b^2 : et les deux équations générales donnent

$$tang.\,\theta'_1\, sin.\,\pi'_1 = \frac{a\, sin.\,\theta_1\, sin.\,\pi_1}{\sqrt{1 - sin.^2\theta_1\,(a^2\, sin.^2\,\pi_1 + b^2\, cos.^2\,\pi_1)}} \quad (6)$$

$$tang.\,\theta'_1\, cos.\,\pi'_1 = \frac{b^2\, sin.\,\theta_1\, cos.\,\pi_1}{a\sqrt{1 - sin.^2\theta_1\,(a^2\, sin.^2\,\pi_1 + b^2\, cos.^2\,\pi_1)}},$$

d'où l'on tire, en les divisant l'une par l'autre,

$$tang.\,\pi'_1 = \frac{a^2}{b^2}\,tang.\,\pi_1.$$

Comme la seconde face du prisme contient aussi l'axe du cristal, on aura de même

$$tang.\,\theta'_2\,sin.\,\pi'_2 = \frac{a\,sin.\,\theta_2\,sin.\,\pi_2}{\sqrt{1 - sin.^2\theta_2\,(a^2\,sin.^2\pi_2 + b^2\,cos.^2\pi_2)}} \qquad (7)$$

$$tang.\,\theta'_2\,cos.\,\pi'_2 = \frac{b^2\,sin.\,\theta_2\,cos.\,\pi_2}{a\sqrt{1 - sin.^2\theta_2\,(a^2\,sin.^2\pi_2 + b^2\,cos.\,\pi_2)}},$$

et par suite, $tang.\,\pi'_2 = \dfrac{a^2}{b^2}\,tang.\,\pi_2.$

Maintenant, si l'on substitue les expressions données par (6) et (7) dans la première et la dernière des équations (5), elles donnent les deux suivantes :

$$\left.\begin{aligned} a\,tang.\,\pi_2 &= \frac{\sqrt{1 - sin.^2\theta_1\,(a^2\,sin.^2\pi_1 + b^2\,cos.\,\pi_1)}}{sin.\,\theta_1\,cos.\,\pi_1}; \\ a\,tang.\,\pi_2 &= -\frac{\sqrt{1 - sin.^2\theta_2\,(a^2\,sin.^2\pi_2 + b^2\,cos.^2\pi_2)}}{sin.\,\theta_2\,cos.\,\pi_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Dans la méthode des coïncidences, on observe les rayons qui, après avoir subi dans le cristal des réfractions de nature diverse, en sortent suivant une même direction. D'après cela, si l'on nomme ${}_1\pi$ et ${}_1\theta$ les coordonnées d'incidence du rayon ordinaire qui accompagne l'extraordinaire que nous venons de considérer, les coordonnées d'émergence π_2, θ_2, seront les mêmes pour ces deux rayons à leur sortie du prisme, et conséquemment on pourra aussi bien calculer ces angles d'après l'un que d'après l'autre : pour cela, faisons $a = b$ dans les formules (8), et mettons ${}_1\theta$ et ${}_1\pi$ à la place de θ_1 et de π_1. Alors ces formules se trouveront pliées au cas de la réfraction ordinaire, et donneront :

$$b\,tang.\,\pi_2 = \frac{\sqrt{1 - b^2 \sin.\,{}_1\theta}}{\sin.\,{}_1\theta \cos.\,{}_1\pi} \qquad b\,tang.\,{}_1\pi = -\frac{\sqrt{1 - b^2 \sin.^2 \theta_2}}{\sin.\,\theta_2 \cos.\,\pi_2}. \qquad (9)$$

Au moyen de ces deux équations, on peut déterminer les coordonnées d'émergence π_2 et θ_2 en fonction de ${}_1\pi$ et de ${}_1\theta$; puis, en substituant leurs valeurs dans les équations (8) on tirera de celles-ci π_1 et θ_1, c'est-à-dire, les coordonnées d'incidence du rayon EI qui, après s'être réfracté extraordinairement dans le cristal, coïncide dans son émergence avec le rayon OI réfracté ordinairement.

Le résultat de cette élimination donne:

$$\left.\begin{array}{l} \sin.^2\theta_1 \cos.^2\pi_1 = \sin.^2\,{}_1\theta \cos.^2\,{}_1\pi \\ \sin.^2\theta_1 \sin.^2\pi_1 = \dfrac{b^2 - a^2 - b^4 \sin.^2\,{}_1\theta \cos.^2\,{}_1\pi + a^2 b^2 \sin.^2\,{}_1\theta}{a^2 b^2}\,; \end{array}\right\} \quad (10)$$

on trouve aussi cette autre relation :

$$\sin.^2\theta_2 \cos.^2\pi_2 = \sin.^2\,{}_1\theta \cos.^2\,{}_1\theta :$$

$\sin.\,\theta_1 \cos.\,\pi_1$, ou $\frac{x_1}{r_1}$, exprime le cosinus de l'angle que le rayon incident extraordinaire forme avec l'axe des x, qui est ici l'arête des deux faces réfringentes et l'axe même du prisme cristallisé. La première des équations (10) montre donc que cet angle est le même pour les deux rayons ordinaire extraordinaire qui émergent ensemble par la seconde face. Ainsi, en supposant que ces deux rayons aient le même point d'incidence sur la première face, ce qui sera sensiblement vrai si l'on observe très-près du tranchant du prisme, les points E, O, dont ils émanent, seront situés sur une même surface conique, à base circulaire, décrite autour de l'axe des x avec l'angle donné; et, comme ils sont d'ailleurs l'un et l'autre pris sur la règle divisée qui est placée dans

le plan des xy, il s'en suit qu'ils se trouveront tous deux sur une hyperbole dont le premier axe est parallèle à l'axe du cône, c'est-à-dire à l'axe des x, et dont le centre est le point N, projection du point commun d'incidence I, sur la division verticale AY (*fig.* 20). Nommons β l'angle donné des rayons incidents avec l'axe des x, angle dont le cosinus est $\sin.\theta_{,}\cos.\pi_{,}$, ou $\sin._{,}\theta\cos._{,}\pi$; et soit toujours $z_{,}$ la distance du point d'incidence au plan des xy; l'axe imaginaire de l'hyperbole aura pour valeur $2z_{,}$, et l'axe réel $\frac{2z_{,}}{tang.\,\beta}$; de sorte que l'on pourra aisément la décrire sur le plan des xy.

Maintenant, si l'on regarde cette hyperbole à travers le double prisme, chacun des points qui la composent formera son image ordinaire et son image extraordinaire en d'autres points de son périmètre : car $\sin.\theta_{,}\cos.\pi_{,}$ étant égal à $\sin._{,}\theta\cos._{,}\pi$ et à $\sin.\theta_{,}\cos.\pi_{,}$, il s'ensuit que le rayon émergent et les deux rayons incidents font partie de la même surface conique. Ainsi l'hyperbole, vue de cette manière, ne sera pas doublée par la double réfraction, pourvu toutefois qu'elle soit placée par rapport au prisme, comme le calcul l'indique; et pourvu aussi que l'on observe assez près du tranchant de l'angle réfringent pour négliger les corrections d'épaisseur, et pouvoir considérer tous les rayons émanés du périmètre de la courbe, comme ayant leur incidence au même point.

L'angle β, formé par les rayons avec l'axe des x, étant arbitraire, on peut, en lui donnant diverses valeurs, obtenir autant d'hyperboles différentes, ayant toutes le même centre et les mêmes direction d'axes, avec des paramètres différents pour la même distance du prisme. Concevons une série de ces hyperboles tracées sur un carton blanc (*fig.* 21), et ce

carton appliqué sur le plan des divisions verticales AY, de manière que l'axe réel des hyperboles soit horizontal et leur centre sur la projection N du point d'incidence. Alors, en plaçant l'œil derrière le prisme, on verra qu'en effet les hyperboles ne sont pas doublées, quoique leurs asymptotes le soient, aussi-bien que toutes les autres lignes droites ou courbes arbitrairement tracées dans leur plan. Cette expérience que j'ai faite peut être considérée comme une vérification très-délicate de la loi de double réfraction sur laquelle elle est calculée. Mais, pour que toutes les hyperboles ainsi tracées avec une même valeur de z, puissent être vues à la fois simples dans une même position de l'œil, il faut que l'on puisse négliger les déplacements d'images, produits par l'épaisseur du prisme de verre, qui compense le prisme cristallisé; ce qui arrive lorsque la distance de ce prisme au carton est suffisante. Si cela n'a pas lieu, il faut déplacer un peu l'œil, en passant d'une hyperbole à une autre, afin de compenser par ce déplacement la correction d'épaisseur propre à chacune d'elles, selon l'obliquité des rayons qui doivent en émaner. Ou bien encore on peut laisser l'œil fixe et déplacer un peu le carton, jusqu'à ce que l'hyperbole que l'on considère ne semble pas doublée; car la direction des axes et leur grandeur étant exactement établies par la construction même que nous avons prescrite, la seule condition qui reste à remplir est que le centre de chaque hyperbole soit placé sur la projection du point particulier d'incidence par lequel le cône de rayons qui en émane arrive à l'œil.

Outre cette vérification géométrique de la théorie, les formules (10) en offrent encore une infinité de vérifications numériques en permettant de calculer, pour chaque coïn-

cidence, la position d'un des traits qui coïncident, celle de l'autre trait étant donnée. Pour les disposer à cette application, il faut d'abord y remplacer les constantes a et b par leurs valeurs $\frac{1}{n'}$, $\frac{1}{n}$, que nous avons déterminées précédemment : après cette substitution, on peut leur donner la forme suivante :

$$\left.\begin{aligned} \sin.\theta_1 \cos.\pi_1 &= \sin._1\theta \cos._1\pi \\ \sin.\theta_1 \sin.\pi_1 &= \sqrt{n'^2 - n^2 - \frac{(n'^2-n^2)}{n^2}\sin.^2{}_1\theta + \frac{n'^2}{n^2}\sin.^2{}_1\theta \sin.^2{}_1\pi}. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Supposons que l'on se donne la position du point O, duquel émane le rayon qui subit la réfraction ordinaire. Alors on connaîtra les coordonnées rectangulaires $_1x$ $_1y$ $_1z$ de ce point, et l'on en pourra déduire ses coordonnées angulaires par les formules

$$_1x = {}_1z \tang._1\theta \cos._1\pi; \quad _1y = {}_1z \tang._1\theta \sin._1\pi;$$

avec celles-ci et nos deux formules (11), on calculera $\sin.\theta_1 \cos.\pi_1$ et $\sin.\theta_1 \sin.\pi_1$, par conséquent π_1 et θ_1, c'est-à-dire les coordonnées angulaires du point E, duquel émane le rayon qui subit la réfraction extraordinaire. Mais on connaît aussi le z_1 de ce point, qui est la distance du prisme à la division verticale, et par conséquent le même que $_1z$; on pourra donc calculer directement les deux autres coordonnées x_1, y_1 du point E, par les formules

$$x_1 = z_1 \tang.\theta_1 \cos.\pi_1 \qquad y_1 = z_1 \tang.\theta_1 \sin.\pi_1.$$

De là on pourra enfin déduire la distance OE des deux traits dont les images coïncident, laquelle sera :

$$\sqrt{\{x_1 - {}_1x\}^2 + \{y_1 - {}_1y\}^2},$$

Et l'on en tirera aussi l'inclinaison de cette distance sur la ligne horizontale, laquelle aura pour tangente $\frac{y_1 - {}_1y}{x_1 - {}_1x}$. Cette inclinaison indiquera le sens suivant lequel la double réfraction s'exerce dans l'azimuth d'incidence où la coïncidence est observée.

On pourrait par l'élimination obtenir l'expression de la distance OE et de l'angle A'C'R', en fonction immédiate des coordonnées du point O. Mais l'on arriverait ainsi à une formule assez compliquée, que l'on ne pourrait pas chercher à simplifier par la réduction en série, sans la limiter: car les angles ${}_1\theta$ et ${}_1\pi$ pouvant avoir toutes les valeurs possibles, il n'y a sous les radicaux aucune quantité qui soit assez invariablement petite, par rapport aux autres, pour que l'on puisse ordonner les développements suivant ses puissances; et ainsi je me bornerai à indiquer ici la marche directe, sauf à recourir aux approximations pour les cas particuliers qui en seront susceptibles.

Voici des expériences faites par les méthodes des coïncidences obliques, pour vérifier ces formules: les éléments immédiats des observations sont désignés d'après les dénominations employées dans les *fig.* 17 et 18. La lettre D, placée à droite de la dernière colonne, indique les cas où la division circulaire était placée à droite de l'observateur, et la lettre G indique ceux où elle était placée à gauche. Cette distinction est très-nécessaire. En effet, il est presque impossible de tailler les faces du prisme dans un sens rigoureusement parallèle à l'axe du cristal. Or un petit écart de cette direction n'influerait pas sensiblement sur des déviations qui seraient observées perpendiculairement à l'arête Cc du

prisme, ou plus exactement dans le plan d'incidence qui rend les déviations latérales nulles; parce qu'alors la perpendicularité approchée du rayon sur l'axe du cristal, rend le sinus de son inclinaison presque constant. Mais cette constance cesse dans les observations latérales : alors, pour peu que l'une des faces du prisme, l'antérieure, par exemple, soit oblique à l'axe du cristal, il arrive que, dans les coïncidences observées d'un côté, par exemple à gauche, le rayon réfracté extraordinaire se trouve un peu plus rapproché de cet axe qu'il ne devrait l'être; et que, dans les coïncidences observées de l'autre côté, conséquemment à droite, il s'en trouve un peu trop éloigné. De là il résulte que l'écart des deux rayons, ordinaire, extraordinaire, est, dans le premier cas, un peu trop faible, dans le second cas, un peu trop fort; de manière que leurs erreurs se compensent en partie, lorsque l'on combine deux à deux les observations; et cette compensation devient presque totale si les erreurs partielles dépendantes de l'obliquité de l'axe sont individuellement très-petites. Tel est le cas des expériences que nous allons rapporter. Une autre remarque essentielle, c'est que la détermination du sens de l'écart des deux rayons par la formule $\frac{y_{,}-{}_{,}y}{x_{,}-{}_{,}x}$, ne peut être qu'approchée, à cause de l'extrême petitesse des quantités $y_{,}-{}_{,}y$, $x_{,}-{}_{,}x$, qui expriment les différences des coordonnées des points d'où partent les rayons qui coïncident dans leur émergence; de sorte qu'on peut facilement tolérer une erreur de un ou deux degrés, dans la valeur absolue de l'angle dont la tangente est déterminée par le rapport de ces quantités.

Ces considérations préliminaires étant établies, je passe à l'exposé des résultats immédiats de l'observation :

DISTANCES de la surface d'incidence du prisme à la division verticale, z ou z_1.	HAUTEUR du point d'incidence au-dessus de la division horizontale AX, IH.	HAUTEUR de l'axe horizontal A' C' au-dessus de la division horizontale AX, A A'.	DISTANCE de l'origine A' au centre de la division circulaire, A' C'.	DISTANCE du centre C' de la division circulaire au point de départ du rayon ordinaire sur la règle RR' C'O.	DISTANCE du centre C' de la division circulaire au point de départ du rayon extraordinaire sur la règle RR', C'E.	INCLINAISON de l'axe RR sur l'horizontale A' C', ou direction de la coïncidence A' C' R'.
209mm	404mm	261mm	140mm	65mm	80mm	65°45' D.
209	404	261	134	60	75	69.40. G.
209	404	261	134	70	85	67.30. D.
209	402	261	134	60	75	68.30. G.
252	404	261	134	65	80	73.30. G.
252	404	261	134	75	90	70.30. D.
267	402	186	207	35	55	65. o. G.
261	402	186	207	50	70	65.10. D.
272	402	186	227	25	45	66.15. G.
277,5	402	186	219	50	70	65.10. D.
300	402	186	187	55	75	70.45. G.
288	402	186	187	70	90	68.30. D.
354	402	186	187	60	80	74.45. G.
344	402	186	187	80	100	72. o. D.

En appliquant à ces données les formules de la pag. 277, on en déduira d'abord les coordonnées, soit rectilignes, soit angulaires, du point O, d'où le rayon ordinaire émane. Ensuite, en introduisant ces résultats dans la formule (11), fondée sur la théorie, on en déduira les coordonnées analogues du point E, duquel doit partir le rayon extraordinaire qui coïncide avec le premier dans son émergence. Voici le tableau de ces résultats :

COORDONNÉES rectilignes du point O, déduites de l'observation.			COORDONNÉES angulaires du point O, déduites de l'observation.		COORDONNÉES angulaires du point E, déduites de la théorie.		COORDONNÉES rectilignes du point E, déduites de la théorie.			
$_{1}x$	$_{1}y$ (mm)	$_{1}z$ (mm)	$_{1}\pi$	$_{1}\theta$	π_1	θ_1	x_1 (mm)	y_1 (mm)	z_1	
166,697	202,264	209	50° 30′ 22″	51° 25′ 53″	51° 27′ 36″	52° 56′ 54″	172,484	216,531	209	D
154,849	199,261	209	52. 8.57	50.22. 7	53. 5.10	51.53.20	160,028	213,030	209	G.
160,788	207,672	209	52.15. 5	51.29.20	53. 9.26	53. 1. 7	166,430	222,103	209	D.
155,990	196,824	209	51.36. 7	50.13.56	52.33.31	51.44.33	161,165	210,480	209	G.
152,041	205,323	252	53.28.49	45.23.38	54.32.20	46.54.40	156,291	219,427	252	G.
159,036	211,698	252	53. 5. 5	46.25. 0	54. 7. 8	47.55.49	163,635	226,220	252	D.
221,792	247,721	267	48. 9.40	51.14. 7	49.11.27	52.44. 0	229,337	265,601	26[illegible]	G.
227,997	261,378	261	48.53.59	53. 1.35	49.51.19	54.32.52	236,416	280,309	261	D
237,069	238,883	272	45.13. 6	51. 3.18	46.20.52	52.31.46	244,949	250,752	2[illegible]2	G.
239,997	261,37[illegible]	277,5	47.26.21	51.58.20	48.28. 5	53.28.15	248,388	289,436	277,5	D.
205,133	267,925	300	52.33.40	48.21.40	53.32.46	49.52.26	211,486	286,289	300	G.
212,655	281,129	288	52.53.42	50.45. 0	53.48. 2	52.15.52	219,924	300,494	288	D.
202,781	273,887	354	53.29. 4	43.54.38	54.36. 5	45.25.58	208,209	292,953	354	G.
211,721	292,084	344	54. 3.47	46.21.41	55. 4. 1	47.52.51	217,856	312,926	344	D

Maintenant, avec ces coordonnées, nous pouvons conclure l'écart des deux points OE, exprimé par $\sqrt{(x_1 - {}_1x)^2 + (y_1 - {}_1y)^2}$, et la direction de cet écart, indiquée par son inclinaison sur l'axe A′C′ de la division horizontale; laquelle a, pour tangente trigonométrique, $\frac{y_1 - {}_1x}{x_1 - {}_1y}$. Voici le tableau de ces résultats comparés à l'observation:

ÉCART des points de départ OE, observé.	ÉCART des points de départ OE, calculé.	EXCÈS du calcul sur les observations partielles.	EXCÈS MOYEN du calcul sur les observations combinées des deux côtés.	DIRECTION de l'écart OE, ou valeur de l'angle EOA'', observé.	DIRECTION de l'écart OE, ou valeur de l'angle EOA'', calculé.
mm	mm	mm	mm		
15,000	15,395	+ 0,395 D.	+ 0,053	65° 45′ 0″	66° 9′ 57″ D.
15,000	14,711	— 0,289 G.		69.40. 0	69.23.10 G.
15,000	15,484	+ 0,484 D.	+ 0,043	67.30. 0	68.38.50 D.
15,000	14,603	— 0,397 G.		68.30. 0	69.14.40 G.
15,000	14,730	— 0,270 G.	— 0,011	73.30. 0	73.13.50 G.
15,000	15,248	+ 0,248 D.		70.30. 0	72.25.30 D.
20,000	19,407	— 0,593 G.	+ 0,063	65. 0. 0	67. 7. 0 G.
20,000	20,719	+ 0,719 D.		65. 0. 0	66. 1.10 D.
20,000	19,523	— 0,477 G.	+ 0,178	66.15. 0	66.12.10 G.
20,000	20,832	+ 0,832 D.		65.10. 0	66.14.54 D.
20,000	19,432	— 0,568 G.	+ 0,058	70. 4. 0	70.55. 0 G.
20,000	20,684	+ 0,684 D.		68.30. 0	69.25.30 D.
20,000	19,823	— 0,177 G.	+ 0,289	74.45. 0	74.11.30 G.*
20,000	20,749	+ 0,749 D.		72.30. 0	72.48.10 D.

L'erreur moyenne de l'écart calculé est insensible dans les trois premiers couples; dans les quatre autres, elle est de $0^{mm},147$ sur 20^{mm}, c'est-à-dire $\frac{1}{136}$ de la valeur totale observée.

L'erreur des directions est généralement de 1 ou 2° en plus. Il est probable qu'elle est due, en très-grande partie, à un petit défaut de parallélisme, entre la première face du prisme et la division verticale. D'ailleurs cette erreur ne répond qu'à deux ou trois centièmes de millimètres sur l'écart OE des deux rayons.

Enfin il faut considérer, qu'à cause de la grandeur même

de l'écart OE, il varie très-rapidement avec l'incidence; ce qui rend une petite erreur d'observation plus facile, en même temps que cela augmente l'influence de tous les petits défauts qui peuvent exister dans la disposition de l'appareil.

Les résultats précédents ayant ainsi présenté tout le degré d'exactitude dont ce genre d'observations est susceptible, j'ai cherché à lui substituer quelque autre genre d'épreuves. Je possédais un très-grand morceau de cristal de roche de Madagascar, qui m'avait été donné par M. Rochon, et qui avait déja été coupé par lui, de manière qu'une de ses faces BCB'C' (*fig.* 22) contînt dans son plan l'axe aa' du cristal même. J'ai taillé dans ce morceau une autre face BCB''C'', perpendiculaire à la première, et qui la coupait suivant la droite BC inclinée de 45° sur l'axe AA'; puis, prenant ces deux faces pour guides, j'ai achevé de donner au morceau la forme d'un parallélipipède rectangle, comme le représente la figure. Alors, considérant les deux premières faces comme un prisme rectangulaire, j'ai collé à la seconde un parallélipipède de crown, comme on le voit (*fig.* 23); et, plaçant la base B'C' B'''C''' du cristal sur la colonne de mon appareil, de manière que la face antérieure BCB'C' fût parallèle à la division verticale, j'ai observé, par la méthode des coïncidences, les déviations des rayons OI, EI, qui, après avoir subi dans le prisme cristallisé des réfractions différentes, émergeaient ensemble et arrivaient ensemble à l'œil en V.

Par ces dispositions, les rayons ordinaires OI, émanés de la division verticale, entraient dans le prisme suivant un plan d'incidence vertical, perpendiculaire à l'arête BC du prisme; et par conséquent ils traversaient sa substance et en sortaient, en restant toujours dans ce même plan. Or la trace

IH de ce plan sur la face d'incidence (*fig.* 23) était inclinée de 45° à l'axe aa'. Ainsi l'azimuth d'incidence du rayon ordinaire OI représentée par π dans nos formules, était ici de 45°, et par conséquent l'incidence de ce rayon se faisait dans une direction très-différente de la section principale. Mais, avant de calculer les conséquences de ces dispositions, il faut expliquer par quels moyens j'ai pu m'assurer d'avoir donné aux faces la direction qu'elles supposent, et de l'avoir donnée avec assez d'exactitude pour pouvoir l'introduire comme telle dans le calcul. D'abord, pour m'assurer que l'axe aa' était contenu dans le plan de la face antérieure, j'ai présenté la base B'C' B‴ C‴ du parallélipipède, perpendiculairement à un rayon polarisé; et, analysant ce rayon après sa transmission par la face opposée BC B″ C″, j'ai vu qu'il conservait sa polarisation primitive lorsque l'arête BC était parallèle au sens de cette polarisation, et qu'il la perdait quand ce parallélisme n'avait plus lieu. Ensuite, pour mesurer l'inclinaison de l'axe aa' sur le plan des bases du parallélipipède, j'ai fait enlever parallèlement à ces bases une tranche dont l'épaisseur était de 1350 parties de mon sphéromètre, ou 3mm,049. J'ai transmis perpendiculairement, à travers cette lame, un rayon blanc polarisé en un seul sens; et, plaçant derrière elle des lames naturelles de chaux sulfatée, dont la section principale était croisée rectangulairement avec la sienne, j'ai déterminé l'épaisseur de ces lames qui était nécessaire pour détruire complètement les changements de polarisation produits par la première, et ramener le rayon à son sens de polarisation primitif. Cette épaisseur s'est trouvée égale à 667 parties du sphéromètre, c'est-à-dire presque exactement la moitié de ce qu'elle aurait dû être, si la plaque de cris-

tal de roche eût été parallèle à l'axe; car j'ai depuis longtemps fait voir que le cristal de roche parallèle à l'axe, et les lames naturelles de chaux sulfatée bien pure, se compensent à égalité d'épaisseur, sous l'incidence perpendiculaire. De-là on doit conclure que l'axe de la plaque de cristal de roche est oblique à sa surface, et forme avec elle un angle dont le quarré du sinus est $\frac{667}{1350}$, ou $\frac{1}{2}$; d'où il suit que cet angle est précisément égal à 45° (*).

Reprenons maintenant les conditions initiales d'incidence et de réfraction que nous avons établies plus haut pour le rayon OI qui suit la réfraction ordinaire, et cherchons à calculer la marche du rayon EI qui, amené par la réfraction extraordinaire, coïncide avec lui en sortant du prisme vers l'œil : pour cela, je rapporterai la marche des rayons à deux systêmes successifs de coordonnées rectangulaires x, y, z, x_1, y_1, z_1, dirigées par rapport aux arêtes du prisme rectangulaire précisément comme celles de l'expérience précédente (*fig.* 19); seulement dans le cas actuel, représenté (*fig.* 24), l'axe aa' du cristal n'étant plus parallèle à la coordonnée x de la première face, mais faisant avec elle un angle de 45°, les azimuths π_1, π_1', des rayons incidents et réfractés ne partiront plus de la ligne IX, mais de la nouvelle position aa' de l'axe. Ainsi, pour rapporter ces rayons aux coordonnées xyz, il faudra introduire une nouvelle coordonnée angu-

(*) Cette méthode est celle que j'ai exposée dans les Mémoires de l'Institut ponr 1812, Ire partie, p. 189, et que j'ai depuis reproduite dans mon Traité de physique, tom. IV, pag. 469. Elle suffit pour déterminer la direction de l'axe dans toute plaque tirée d'un cristal à un seul axe, quel que soit le sens suivant lequel cette plaque soit taillée.

laire v_1 comptée de la ligne IX elle-même. Mais, d'après la direction assignée à l'axe, v sera toujours égal à $45^o + \pi_1$, de sorte qu'on pourra toujours la remplacer, si l'on veut, par cette valeur; quant à la seconde surface, la ligne I'X', à partir de laquelle on compte les x_1, coïncidera avec la projection de l'axe aa' sur cette face, et par conséquent on devra compter encore, à partir de cette ligne, les azimuths π'_1 et π_1 relatifs aux rayons émergents.

Cela posé, en conservant les autres dénominations de coordonnées angulaires et rectangulaires dont nous avons précédemment fait usage, si nous considérons un rayon incident EI dont les coordonnées d'incidence soient r_1, π_1, θ_1, et qui doive ensuite subir, à travers le prisme, la réfraction extraordinaire, nous aurons pour le progrès de ce rayon, les séries d'équations suivantes, analogues à celles de la pag. 280.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = r_1 \sin.\theta_1 \cos.v_1 \\ y_1 = r_1 \sin.\theta_1 \sin.v_1 \\ z_1 = r_1 \cos.\theta_1 \end{array}\right\}, \qquad (1)$$

dans lesquelles $v_1 = 45^\circ + \pi_1$. Nous aurons ensuite, pour le rayon réfracté qui en dérive,

$$\left.\begin{array}{l} x'_1 = r'_1 \sin.\theta'_1 \cos.v'_1 \\ y'_1 = r'_1 \sin.\theta'_1 \sin.v'_1 \\ z'_1 = r'_1 \cos.\theta'_1 \end{array}\right\}: \qquad (2)$$

ici l'angle v'_1 sera égal à $45^\circ + \pi'_1$, π'_1 étant l'azimuth du rayon réfracté extraordinaire compté à partir de l'axe aa', et déterminé d'après la loi de la réfraction. Enfin, pour le rayon

émergent à la seconde surface du prisme, on aura

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = r_2\, sin.\, \theta_2\, cos.\, \pi_2 \\ y_2 = r_2\, sin.\, \theta_2\, sin.\, \pi_2 \\ z_2 = r_2\, cos.\, \theta_2 \end{array}\right\}. \qquad (3)$$

En outre, par le seul fait de la rectangularité du prisme, il y aura, entre les nouvelles coordonnées angulaires, des réfractions absolument pareilles aux équations (5) de la pag. 283, lesquelles seront

$$tang.\, \pi'_2 = \frac{1}{tang.\, \theta'_1\, cos.\, v'_1};$$

$$-tang.\, \theta'_2\, sin.\, \pi'_2 = \frac{1}{tang.\, \theta'_1\, sin.\, v'_1};$$

$$tang.\, v'_1 = -\frac{1}{tang.\, \theta'_2\, cos.\, \pi'_2};$$

ou, en mettant pour v'_1 sa valeur $45° + \pi'_1$,

$$\left.\begin{array}{l} tang.\, \pi'_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{tang.\, \theta'_1\, \{cos.\, \pi'_1 - sin.\, \pi'_1\}} \\ -tang.\, \theta'_2\, sin.\, \pi'_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{tang.\, \theta'_1\, \{cos.\, \pi'_1 + sin.\, \pi'_1\}} \\ \dfrac{1 + tang.\, \pi'_1}{1 - tang.\, \pi'_1} = -\dfrac{1}{tang.\, \theta'_2\, cos.\, \pi'_2} \end{array}\right\}. \qquad (5)$$

Il faut maintenant introduire les conditions de réfraction relatives aux deux faces du prisme. D'abord, pour la première, comme elle contient l'axe aa' du cristal, on aura, dans les formules générales de la page 240, $\lambda = 90°$; ce qui donne $A = a^2$; $B = 0$; et, par suite,

$$\left.\begin{aligned} tang.\,\theta'_{,}\,sin.\,\pi'_{,} &= \frac{a\,sin.\,\theta_{,}\,sin.\,\pi_{,}}{\sqrt{1-sin.^2\theta_{,}\,(a^2\,sin.^2\pi_{,}+b^2\,cos.^2\pi_{,})}} \\ tang.\,\theta'_{,}\,cos.\,\pi'_{,} &= \frac{b^2\,sin.\,\theta_{,}\,cos.\,\pi_{,}}{a\sqrt{1-sin.^2\theta_{,}\,(a^2\,sin.^2\pi_{,}+b^2\,cos.^2\pi_{,})}} \end{aligned}\right\}; \quad (6)$$

d'où l'on tire

$$tang.\,\pi'_{,} = \frac{a^2}{b^2}\,tang.\,\pi_{,}.$$

Maintenant, pour la seconde face du prisme, l'axe aa' forme avec elle un angle de 45°; et comme, dans la figure que nous avons faite, cet axe se trouve du côté de la normale où $\pi_{,}$ est nul, la valeur de l'angle λ compté dans ce sens sera 90° + 45°; ce qui donne

$$sin.\,\lambda = cos.\,45^\circ; \quad cos.\,\lambda = -sin.\,45^\circ.$$

Ces valeurs étant introduites dans les formules générales de la page 240, il en résulte d'abord

$$A = \frac{1}{2}(b^2+a^2) \qquad B = -\frac{1}{2}(b^2-a^2);$$

Après quoi, ces mêmes formules donneront $tang.\,\theta'_{,}\,sin.\,\pi'_{,}$ et $tang.\,\theta'_{,}\,cos.\,\pi'_{,}$ en fonction des coordonnées d'émergence $\theta_{,}$ et $\pi_{,}$. Mais ces expressions se simplifient beaucoup, quand on y introduit l'azimuth d'émergence dans lequel les coïncidences s'observent; car cet azimuth étant perpendiculaire à l'arête du prisme, il en résulte que $\pi_{,}$ doit être égal à 90°, et son cosinus égal à zéro, aussi-bien pour le rayon émergent ordinaire que pour l'extraordinaire; puisqu'ils émergent ensemble dans l'observation des coïncidences. Cette condition étant introduite dans les formules générales avec les valeurs précédentes de A et de B, il en résulte :

$$\left.\begin{aligned} tang.\,\theta'_{,}\ sin.\,\pi'_{,} &= \frac{a^2\, sin.\,\theta_{,}\, \sqrt{2}}{\sqrt{b^2+a^2}\,\sqrt{1-a^2\, sin.^2\,\theta_{,}}} \\ tang.\,\theta'_{,}\ cos.\,\pi'_{,} &= -\left\{\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\right\} \end{aligned}\right\} : \qquad (7)$$

Cette dernière relation étant combinée avec la dernière des équations (5) il en résulte

$$\frac{1+tang.\,\pi'_{,}}{1-tang.\,\pi'_{,}} = \frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}, \quad \text{par conséquent,}\ tang.\,\pi'_{,} = \frac{a^2}{b^2};$$

valeur qui, étant substituée à la place de $tang.\,\pi'_{,}$ dans les équations (6) relatives à la première face du prisme, donne

$$tang.\,\pi_{,} = 1,$$

par conséquent, $\pi_{,} = 45^{\circ}$, et $v_{,} = 45^{\circ} + \pi_{,} = 90^{\circ}$;

c'est-à-dire que, lorsque le plan d'émergence du rayon extraordinaire est pris perpendiculaire à l'arête du prisme, comme nous l'avons supposé dans ce qui précède, il faut que l'incidence de ce rayon sur la première face du prisme se fasse aussi dans le même plan. Par conséquent, si l'on observe assez près du tranchant du prisme, pour que les corrections d'épaisseur soient insensibles, les coïncide ncesainsi observées devront se faire exactement sur l'axe des divisions verticales, sans aucune déviation quelconque; non qu'en effet le rayon extraordinairement réfracté reste toujours dans le plan d'incidence, puisque l'angle $v'_{,}$ n'est pas droit comme $v_{,}$, ni égal à 270°; mais, parce que la déviation latérale que le rayon subit dans la réfraction à la première face du prisme, se trouve exactement compensée par celle qu'il reçoit en sens contraire, en sortant par la seconde face. Ce résultat remarquable, et qui tient essentiellement à la loi suivant laquelle

les déviations latérales s'opèrent dans des plans obliques à la section principale, offrait un sujet de vérification important pour la théorie : or, j'ai trouvé qu'en effet il avait lieu avec la dernière rigueur, lorsque les autres conditions adoptées dans nos calculs étaient exactement observées. Alors, en observant tout près du tranchant du prisme, les deux images ordinaire, extraordinaire, de la division verticale, paraissaient l'une et l'autre transportées sur cette division même, et leurs coïncidences s'observaient dans le plan vertical d'incidence qui la contenait.

L'azimuth d'incidence des deux rayons incidents ordinaire extraordinaire étant commun, il ne reste plus qu'à trouver le relation de leurs angles d'incidence ${}_1\theta$, θ_1, d'après la condition que l'angle d'émergence θ_2 leur soit commun aussi. Pour cela, il faut d'abord introduire dans les équations (6) relatives à la face d'incidence, la condition $\pi_1 = 45^\circ$. Puis, prenant les valeurs de $tang.\,\theta'_1\,sin.\,\pi'_1$ et $tang.\,\theta'_1\,cos.\,\pi'_1$ qui en résultent, il faut les substituer dans la seconde des équations (5), qui donne la valeur de $tang.\,\theta'_2\,sin.\,\pi'_2$; enfin, égalant cette valeur à celle que donne la première des équations (7), il en résulte une relation entre l'incidence θ_1 du rayon extraordinaire et son émergence θ_2; cette relation est

$$-\frac{a\,sin.\,\theta_2}{\sqrt{1-a^2\,sin.^2\,\theta_2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}(a^2+b^2)\,sin.^2\,\theta_1}}{sin.\,\theta_1\,\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}},$$

d'où, en élevant les deux membres au quarré, on tire

$$0=1-a^2\,sin.^2\,\theta_2-\frac{1}{2}\,(a^2+b^2)\,sin.^2\,\theta_1. \qquad (8)$$

Mais l'émergence θ_2 peut aussi se conclure de l'incidence ${}_1\theta$ appartenant au rayon ordinaire, puisque les deux rayons

sortent ensemble; et pour l'obtenir, il suffit de supposer $a=b$ dans l'équation précédente, qui donne alors

$$o = 1 - b^2 \sin.^2 \theta_1 - b^2 \sin.^2 {}_1\theta. \quad (9)$$

éliminant donc θ_1 entre celle-ci et la précédente, il reste

$$o = b^2 - a^2 + a^2 b^2 \sin.^2 {}_1\theta - \frac{1}{2} b^2 (a^2 + b^2) \sin.^2 \theta_1 : \quad (10)$$

C'est la relation cherchée entre les incidences ${}_1\theta$, θ_1, des deux rayons ordinaire extraordinaire qui émergent ensemble : si l'on substitue à la place des constantes b et a leurs valeurs $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n'}$, et qu'on dégage $\sin. \theta_1$, elle donne

$$\sin. \theta_1 = \frac{n}{\sqrt{\frac{1}{2}(n'^2 + n^2)}} \cdot \sqrt{n'^2 - n^2 + \sin.^2 {}_1\theta} : \quad (11)$$

c'est l'expression que j'ai comparée aux observations.

Pour cela, ayant placé le prisme comme je l'ai expliqué plus haut, et comme la *fig.* 23 le représente, j'ai observé le rang des traits O, E qui coïncidaient après la transmission, ce qui m'a donné AO et AE. Je connaissais la hauteur HI du point d'incidence qui pouvait être censé commun aux deux rayons, car j'observais par le tranchant même du prisme cristallisé; j'ai donc pu déduire de là les distances NO, NE qui sont les coordonnées y_1, ${}_1y$; et de plus, l'observation de la division horizontale me donnait immédiatement HA ou IN, qui est le z commun aux deux points O et E. Avec ces données, j'ai calculé l'angle d'incidence ordinaire NIO ou ${}_1\theta$ dont la tangente est $\frac{{}_1y}{{}_1z}$; j'ai déduit de celui-ci θ_1 ou l'angle NIE par la formule (11) fondée sur la théorie; et, formant enfin le pro-

duit z_1 *tang*. θ_1 ou y_1, j'ai comparé immédiatement sa valeur à la valeur observée de NE.

J'ai aussi observé des coïncidences sur la division horizontale : alors on emprunte de l'observation les coordonnées HO' ou $_1z$ et HI qui représente à-la-fois $_1y$ et y_1. Avec les deux premières on calcule $_1\theta$, comme tout-à-l'heure, puis on déduit θ_1 de la formule (11), et enfin divisant y_1 par *tang*. θ_1, on a z_1 que l'on compare à l'observation : tel est l'objet du tableau suivant.

	COORDONNÉES DES POINTS DE DÉPART des rayons ordinaires.		extraordinaires.		INCIDENCES du rayon ordinaire comptées de la normale extérieure,	ÉCART VERTICAL DES TRAITS dont les images coïncident, OE ou O'E',		EXCÈS DU CALCUL.
	$_1y$	$_1z$	y_1	z_1	$_1\theta$	observé.	calculé.	
Divis. vertic.	277mm	321mm	292mm	321mm	40° 47′ 30″	15mm	14,95 mm	— 0,05 mm
	357	445	377	445	38.44.18	20	19,88	— 0,12
	382	600	407	600	32.29. 1	25	25,01	+ 0,01
Divis. horiz.	442	395	442	375	48.12.50	20	19,73	— 0,27

On voit combien les erreurs sont petites, comparativement aux écarts observés des images : la dernière, la plus forte de toutes, n'en est que les $\frac{14}{1000}$. Si maintenant l'on songe que ces résultats dépendent de la direction exacte des faces du prisme par rapport à l'axe du cristal ; de leur angle entre elles, et de leur inclinaison sur cet axe ; de la position du prisme au-devant des divisions observées ; enfin de la justesse même des observations, qui ne peut jamais être par-

faite, on sentira que d'aussi légères différences sont bien difficiles à éviter; et alors on regardera, je crois, l'épreuve précédente comme une vérification décisive de la loi de Huyghens dans le cristal de roche, pour les incidences obliques à la section principale, et pour les déviations latérales qui en dérivent. Les observations même de Malus sur le spath d'Islande, qui possède une double réfraction si énergique, n'offrent pas, pour ce genre de déviation, des écartements d'images à beaucoup près aussi considérables que ceux que je viens de rapporter.

Réflexion intérieure des rayons à la seconde surface du cristal de roche.

Lorsque les rayons lumineux, après avoir pénétré dans un cristal, arrivent à sa seconde surface, et y subissent une réflexion intérieure, soit totale, soit partielle, l'influence de la double réfraction se fait sentir sur la direction des rayons réfléchis; et l'on peut, comme l'a fait M. Laplace, calculer la marche de ces rayons par le principe de la moindre action, en leur appliquant les mêmes lois qui règlent les vîtesses de tout autre rayon, soit ordinaire, soit extraordinaire, qui se meut dans l'intérieur du cristal. L'observation de ces phénomènes est donc encore une épreuve propre à vérifier l'application de la loi de Huyghens, et elle est même nécessaire pour en constater la généralité.

Ces motifs m'ont déterminé à l'ajouter à toutes celles que j'avais déja faites. Pour cela, j'ai employé le même parallélipipède rectangulaire du cristal de roche dont j'ai décrit le sens de coupe, pag. 294, et dont nous avons, tout-à-l'heure, calculé la réfraction extraordinaire. Je l'ai posé sur le support

de mon appareil par une de ses plus longues faces, comme on le voit *fig.* 25, où il est représenté de profil. Alors la face BCDE qui se présente à l'œil, contenait dans son plan l'axe du cristal, dont la direction désignée par ia, i_1a_1, i_2a_2, formait avec les autres faces un angle de 45°. Le parallélipipède étant ainsi posé et fixé sur le support, les traits de la division verticale AY se voyaient par réflexion intérieure sur sa base CD comme sur un miroir, et l'on pouvait aisément en observer le doublement et les coïncidences, en plaçant l'œil derrière le cristal en V. Or, comme, dans cette observation, l'incidence des rayons OI, Ei, leur trajet à travers le cristal, et leur émergence commune à la surface postérieure, se faisaient toujours dans la section principale de chaque face réfringente ou réfléchissante, il s'ensuit que chacune de ces opérations ne devait occasionner aucune déviation latérale, et qu'ainsi, la marche des rayons et leurs coïncidences devaient toujours se faire dans les plans de ces sections principales, lesquelles ne formaient qu'un seul et même plan parallèle à la face latérale BCDE. Cette condition, indiquée par la théorie, s'est trouvée parfaitement satisfaite dans les observations. Il est aussi arrivé que le sens de polarisation imprimé par la première réfraction à chacun des faisceaux, a rendu ensuite leur réflexion et leur émergence simple pour chacun d'eux, conformément aux lois de polarisation données par Malus pour les cristaux à un seul axe.

Maintenant, afin de donner aux écarts observés des rayons une exactitude qui les rendît propre à être comparés avec la théorie, il fallait d'abord déterminer avec précision la position des points d'incidence ordinaire, extraordinaire, sur la surface antérieure du cristal : c'est ce que j'ai fait en col-

lant horizontalement sur cette surface une petite bande de papier horizontale, dont les bords bien rectilignes me servaient à limiter l'incidence des rayons par lesquels chaque coïncidence était produite, en observant qu'ils rasassent ses bords. Ensuite, avec ces incidences connues et la longueur CD du cristal qui était de 82 millimètres, je calculais la distance verticale I*i* des points d'incidence ordinaire, extraordinaire, correspondants à une émergence commune, distance qui, à cause de la longueur du cristal, ne pouvait nullement être négligée. J'ai observé aussi des coïncidences près du bord inférieur D du parallélipipède, c'est-à-dire, par des rayons qui rasaient ce bord, et qui entraient et sortaient du cristal parallèles ou presque parallèles à la face inférieure CD. On trouvera plus bas les résultats de ces deux genres d'observation qui, outre la valeur de l'écart absolu qu'ils donnent, présentent encore plusieurs particularités également conformes à la théorie.

Etablissons maintenant les formules par lesquelles les coïncidences doivent être calculées. Pour cela, supposons, comme nous l'avons fait toujours, un rayon incident E*i* qui, tombant sur la première surface du cristal, donne naissance à un rayon réfracté extraordinaire. Suivons ce rayon à travers le cristal jusqu'à sa réflexion intérieure sur la face CD; conduisons-le de nouveau jusqu'à la surface postérieure du cristal en I_2; et enfin, calculons quelle devra être l'incidence antérieure du rayon OI qui, après avoir subi dans l'intérieur du cristal la réfraction et la réflexion ordinaires, coïncidera avec E*i* dans son émergence en I_2.

Considérons d'abord la réfraction extraordinaire à la première surface; l'axe *ia* du cristal fait avec cette face un

angle de 45°. D'après cela, si nous commençons à compter les azimuths π à partir de la droite iB, c'est-à-dire du côté de la normale où l'axe se trouve, dans la *fig.* 25, il faudra prendre $\lambda = 90° + 45°$, d'où $sin.\lambda = cos. 45°$; $cos.\lambda = - sin. 45$: ces valeurs, substituées dans les formules générales de la pag. 240, donnent d'abord

$$A = \frac{1}{2}(b^2 + a^2) \qquad B = -\frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Comme il faut assigner une direction déterminée aux rayons incidents, pour pouvoir les construire, plaçons-les comme les représente la fig. 25. C'était en effet la disposition qu'ils avaient dans mes expériences. Alors, comme tout se passe dans le plan de la section principale de la face, on aura $\pi_1 = 0$ pour le rayon incident Ei; et $\pi_1' = 180°$ pour le rayon réfracté qui en résulte. Ces valeurs étant introduites dans les deux formules générales de la pag. 240, la première se trouve satisfaite d'elle-même; et, en mettant pour A et B leurs valeurs dans la seconde, elle donne

$$-tang.\,\theta'_1 = \frac{2a^2b^2\,sin.\,\theta_1}{(b^2+a^2)\sqrt{\frac{1}{2}(b^2+a^2) - a^2b^2\,sin.^2\,\theta_1}} - \frac{(b^2-a^2)}{b^2+a^2}. \qquad (1)$$

Conduisons maintenant le rayon ainsi réfracté ii_1, jusqu'à la surface inférieure CD, et là, comparons son angle d'incidence intérieure ii_1n_1 ou θ_2' avec l'angle de réfraction i_1in ou θ_1'; on aura évidemment

$$\theta'_2 = 270° - \theta'_1; \qquad \text{d'où } tang.\,\theta'_2 = \frac{1}{tang.\,\theta'_1}.$$

Il faut maintenant appliquer nos formules générales à cette seconde face. Pour cela comptons encore les azimuths, à partir du côté de la normale où se dirige l'axe du cristal :

ce sera ici, à compter de i_1D. Alors, pour le rayon intérieur ii_1, la valeur de son azimuth, ou π'_2, sera 180°; et pour le rayon fictif $i_1 v_1$ qui en résulterait par émergence, l'azimuth correspondant, ou π_2, serait égal à zéro. Ainsi, en nommant θ_2 l'angle d'émergence de ce rayon, nos formules générales donneraient

$$-tang.\, \theta'_2 = \frac{a^2 b^2 sin.^2 \theta_2}{A\sqrt{A - a^2 b^2 sin.^2 \theta_2}} + \frac{B}{A}.$$

Nous donnerons tout-à-l'heure à B et à A les valeurs particulières qui leur conviennent : pour le moment, laissons-les sous cette forme générale; maintenant, pour trouver la direction du rayon réfléchi extraordinaire qui provient de ii_1, il faut concevoir, du côté de la normale opposé à $i_1 v_1$, un autre rayon extérieur $i_1 v_2$, éloigné aussi de cette normale du même angle θ_2, et chercher le rayon réfracté extraordinaire $I_1 I_2$ qui en dériverait. Alors, pour ce nouveau rayon fictif, l'azimuth d'émergence π_2 serait égal à 180°; et π'_2 serait nul pour le rayon réfracté extraordinaire qui en dérive, puisque celui-ci doit aller percer la surface postérieure DE du cristal. Nommant donc θ'_3 l'angle de réfraction extraordinaire de ce dernier rayon, compté toujours à partir de la normale extérieure $i_1 n_1$, nos formules générales donneront

$$tang.\, \theta'_3 = \frac{-a^2 b^2 sin.\, \theta_2}{A\sqrt{A - a^2 b^2 sin.^2 \theta_2}} + \frac{B}{A}.$$

Ici les valeurs de B et de A sont identiquement les mêmes qu'elles étaient tout-à-l'heure, puisque l'angle λ, seule variable qu'elles renferment, se rapporte toujours à la même face du cristal, et se compte à partir de la même normale $i_1 n_1$. On peut donc combiner cette équation avec la précédente pour

éliminer θ_2 entre elles. Pour cela, il suffira de les ajouter ensemble, et il viendra

$$tang.\,\theta'_3 - tang.\,\theta'_2 = \frac{2B}{A}.$$

Maintenant l'axe $i_1 a_1$ du cristal fait avec la face AB un angle de 45. L'angle λ, compté comme les θ, à partir de la normale extérieure $i_1 n_1$, et du côté i_1D de cette normale où π_2 est nul, sera donc $90° + 45$; par conséquent, *sin.* λ sera égal à $+$ *sin.* 45°, et *cos.* λ à $-$*cos.* 45. Ainsi on aura encore, comme pour la première face,

$$A = \frac{1}{2}(b^2 + a^2) \qquad B = -\frac{1}{2}(b^2 - a^2);$$

ce qui, étant substitué dans l'équation précédente, donne enfin

$$tang.\,\theta'_3 - tang.\,\theta'_2 = -\frac{2(b^2 - a^2)}{b^2 + a^2}: \qquad (2)$$

c'est la relation générale qui doit exister entre l'angle d'incidence intérieure θ'_2 et l'angle de réflexion intérieure θ'_3 du rayon extraordinaire, sur la surface CD du cristal.

Suivons maintenant le rayon refléchi $i_1 i_2$ jusqu'à sa rencontre avec la surface postérieure DE; alors, si nous nommons θ'_4 son angle d'incidence sur cette face, toujours à partir de la normale extérieure $I_2 N_2$, on aura, comme à la première face,

$$\theta'_4 = 270° - \theta'_3; \qquad \text{d'où } tang.\,\theta'_4 = \frac{1}{tang.\,\theta'_3}.$$

Maintenant, à partir du point d'émergence I_2, menons dans l'intérieur du cristal la ligne $I_2 a_2$ parallèle à l'axe du cristal, et représentant ainsi sa direction en ce point. Puis

comptons les azimuths π'_4, π_4, à partir de la ligne I, D, du même côté de la normale où se trouve l'axe : alors, comme il est incliné de 45° sur cette face, λ s'y trouvera encore égal à $90° + 45°$; et l'on aura, comme tout-à-l'heure, *sin.* λ égal à *sin.* 45°, et *cos.* λ à $-$*cos.* 45; ce qui donnera encore

$$A = \frac{1}{2}(b^2 + a^2) \qquad B = -\frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

En outre, les azimuths π'_4, π_4, étant comptés sur la face d'émergence à partir de la ligne I, D, l'azimuth π'_4 sera nul pour le rayon réfracté $i, i,$, et π_4 sera 180 pour le rayon émergent I, V. D'après cela, en nommant θ_4 l'angle extérieur d'émergence, nos formules générales donneront

$$tang.\,\theta'_4 = \frac{-2a^2b^2 \sin.\theta_4}{(b^2+a^2)\sqrt{\frac{1}{4}(b^2+a^2) - a^2b^2\sin.\theta_4}} - \frac{(b^2-a^2)}{b^2+a^2}. \quad (3)$$

Les équations successives que nous venons d'établir, et que nous avons désignées par (1) (2) (3), déterminent complètement la marche du rayon extraordinaire dérivé de Ei. Pour avoir maintenant la marche du rayon ordinaire qui l'accompagne dans son émergence, et dont nous désignerons l'incidence par $_{,}\theta$, il faut seulement faire $a = b$ dans les formules, et employer l'angle d'émergence θ_4 comme commun aux deux rayons diversement réfractés. On trouve ainsi $\theta_4 = {}_{,}\theta$, c'est-à-dire que l'angle d'émergence, compté de la dernière normale, est égal à l'angle d'incidence compté de la première; résultat évident d'après le parallélisme des faces antérieure et postérieure du cristal.

Substituant donc $_{,}\theta$ au lieu de θ_4 dans les précédentes formules; puis, éliminant *tang.* θ'_4 au moyen de sa valeur $\frac{1}{tang.\,\theta'_4}$,

et $tang.\,\theta'_4$ au moyen de sa valeur $\frac{1}{tang.\,\theta'_3}$, les équations (1), (2), (3), se changent dans les suivantes, que nous désignerons par les mêmes indices.

$$\frac{1}{tang.\,\theta'_2}=\frac{-2a^2b^2\,sin.\,\theta_1}{(b^2+a^2)\sqrt{\frac{1}{2}(b^2+a^2)-a^2b^2\,sin.^2\,\theta_1}}+\frac{(b^2-a^2)}{b^2+a^2}, \qquad (1)$$

$$tang.\,\theta'_3-tang.\,\theta'_2=-\frac{2(b^2-a^2)}{b^2+a^2}, \qquad (2)$$

$$\frac{1}{tang.\,\theta'_3}=\frac{-2a^2b^2\,sin.\,{}_1\theta}{(b^2+a^2)\sqrt{\frac{1}{2}(b^2+a^2)-a^2b^2\,sin.^2\,{}_1\theta}}-\frac{(b^2-a^2)}{b^2+a^2}. \qquad (3)$$

Il s'agit maintenant d'éliminer θ_2' et θ_3' entre ces trois équations, afin d'en déduire θ_1 en fonction de ${}_1\theta$: pour le faire de la manière la plus simple, j'introduis deux variables auxiliaires v_1 et v_1 telles qu'on ait

$$sin.\,v_1=\frac{ab}{\sqrt{\frac{1}{2}(b^2+a^2)}}\cdot sin.\,\theta_1 \qquad sin.\,{}_1v=\frac{ab}{\sqrt{\frac{1}{2}(b^2+a^2)}}\cdot sin.\,{}_1\theta; \qquad (4)$$

ce qui donne

$$\left.\begin{aligned} tang.\,v_1&=\frac{ab\,sin.\,\theta_1}{\sqrt{\frac{1}{2}(b^2+a^2)-a^2b^2\,sin.^2\,\theta_1}}\\ tang.\,{}_1v&=\frac{ab\,sin.\,{}_1\theta}{\sqrt{\frac{1}{2}(b^2+a^2)-a^2b^2\,sin.^2\,{}_1\theta}}\end{aligned}\right\};$$

Et en substituant ces transformations dans nos trois équations précédentes, elles prennent cette forme très-simple

$$\frac{1}{tang.\,\theta'_2}=-\frac{2ab}{b^2+a^2}\cdot tang.\,v_1+\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}, \qquad (1)$$

$$tang.\,\theta'_3-tang.\,\theta'_2=-\frac{2(b^2-a^2)}{b^2+a^2}, \qquad (2)$$

$$\frac{1}{tang.\,\theta'_3}=-\frac{2ab}{b^2+a^2}\cdot tang.\,{}_1v-\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}. \qquad (3)$$

Maintenant divisez tous les termes de la seconde équation par le produit $tang.\theta_2'\ tang.\theta_3'$ et substituez-y pour ces deux tangentes, leurs valeurs tirées de la première et de la troisième, l'élimination proposée se trouvera faite, et il viendra pour équation résultante

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{2ab}{b^2+a^2}\cdot tang.\,v_1+\frac{2ab}{b^2+a^2}\,tang.\,{}_1v+\frac{2(b^2-a^2)}{b^2+a^2} \\ =-\frac{2(b^2-a^2)}{b^2+a^2}\left(\frac{2ab}{b^2+a^2}\,tang.\,v_1-\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\right)\left(\frac{2ab}{b^2+a^2}tang.\,{}_1v+\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\right)\end{array}\right\};$$

Tous les termes de cette équation peuvent être divisés par $\frac{2}{b^2+a^2}$: si, de plus, on effectue les produits indiqués dans le second membre, et qu'on y passe le terme constant du premier, qui se trouvera ainsi réduit à $+(b^2-a^2)$, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l} ab\left(tang.\,{}_1v-tang.\,v_1\right)=-\left(b^2-a^2\right) \\ \left[1-\frac{(b^2-a^2)^2}{(b^2+a^2)^2}-\frac{2ab(b^2-a^2}{(b^2+a^2)^2}\left(tang.\,{}_1v-tang.\,v_1\right)\right. \\ \left.\quad+\frac{4a^2b^2}{(b^2+a^2)^2}\,tang.\,{}_1v\ tang.\,v_1\right]\end{array}\right\}.$$

Or, $1-\frac{(b^2-a^2)^2}{(b^2+a^2)^2}$ est égal à $\frac{4a^2b^2}{(b^2+a^2)^2}$, de sorte que ce terme peut se réunir à celui qui contient $tang.\,{}_1v\,.\,tang.\,v_1$; réunissant de même les termes affectés par la différence de ces deux tangentes, et divisant toute l'équation par ab, il reste

$$\left.\begin{array}{l} \left(1-\frac{2(b^2-a^2)}{(b^2+a^2)^2}\right)(tang.\,{}_1v-tang.\,v_1) \\ =-\frac{4ab(b^2-a\,)}{(b^2+a^2)^2}\,(1+tang.\,v_1\ tang.\,{}_1v)\end{array}\right\}:$$

Le coëfficient constant du premier membre étant réduit au même dénominateur (b^2+a^2), prend pour numérateur $4a^2b^2-(b^2-a^2)^2$; alors le dénominateur commun $(b^2+a^2)^2$ disparaît des deux membres de l'équation : divisant de plus par le facteur variable du second membre, il vient définitivement

$$tang.\,(v_1 - {}_1v) = \frac{4ab\,(b^2-a^2)}{4a^2b^2-(b^2-a^2)^2}. \qquad (5)$$

Cette relation extrêmement simple montre que l'angle $v_1 - {}_1v$ est constant dans toutes les expériences, et permet de le calculer avec la plus grande précision : pour cela il faut remplacer les constantes a et b par les rapports $\frac{1}{n'}$, $\frac{1}{n}$, ce qui donne

$$tang.\,(v_1 - {}_1v) = \frac{4nn'\,(n'^2-n^2)}{4n'^2n^2-(n'^2-n^2)^2}.$$

En substituant à ces rapports leurs valeurs numériques pour le cristal de roche, on trouve

$$v_1 - {}_1v = 0^\circ.40'.47'',2;$$

par conséquent,

$$v_1 = {}_1v + 0^\circ.40'.47'',2.$$

Maintenant ${}_1v$ est donné par la seconde des équations (4) en fonction de l'incidence ${}_1\theta$ du rayon ordinaire : ainsi, en ajoutant à sa valeur la différence constante que nous venons d'obtenir, on aura v_1. De-là, on déduira θ_1 par la première des équations (4); ainsi, quand on aura observé la distance in ou IN de la face d'incidence à la division verticale, sur laquelle les coïncidences se mesurent, distance que nous avons désignée en général par z_1 ou ${}_1z$, on pourra calculer le produit

z_1 *tang.* θ_1, lequel exprimera la hauteur nE, c'est-à-dire l'ordonnée y_1 du trait E, dont l'image extraordinaire coïncide dans son émergence avec l'image ordinaire du trait O. Pour effectuer ces calculs numériquement, il faut remplacer a et b par $\frac{1}{n'}$, $\frac{1}{n}$, dans les équations (4) qui prennent alors la forme suivante:

$$sin.\, v_1 = \frac{sin.\, \theta_1}{\sqrt{\frac{1}{2}(n'^2+n^2)}} \qquad sin.\, {}_1v = \frac{sin.\, {}_1\theta}{\sqrt{\frac{1}{2}(n'^2+n^2)}}.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la distance Ii des deux points d'incidence des rayons sur la première surface du cristal, afin de l'ajouter à la différence z_1 *tang.* θ_1 — z *tang.* ${}_1\theta$, qui exprimerait la valeur de l'écart OE, si la longueur CD ou e du parallélipipède de cristal était infiniment petite. Pour le faire de la manière la plus simple, nommons ${}_1h$, h_1 les hauteurs AI, Ai des deux points d'incidence ordinaire extraordinaire, au-dessus de la base CD du cristal; et désignons par h_2 la hauteur DI$_2$ du point d'émergence commun des deux rayons à la seconde surface DE. Cela posé, en continuant à désigner, par des indices inférieurs, les angles qui appartiennent au rayon ordinaire, le calcul des segments, dans lequel chaque rayon divise la base, donnera ces deux équations:

$$h_1\, tang.\, \theta'_2 + h_2\, tang.\, \theta'_3 = -e \qquad {}_1h\, tang.\, {}_2\theta' + h_2\, tang.\, {}_3\theta' = -e.$$

La première se rapporte au rayon extraordinaire: on peut en éliminer *tang.* θ'_3, en mettant pour cette quantité sa valeur *tang.* $\theta'_2 - \frac{2(b^2-a^2)}{b^2+a^2}$, ou *tang.* $\theta'_2 - \frac{2(n'^2-n^2)}{n'^2+n^2}$, telle que la donne la condition de la réflexion extraordinaire; de même, dans la seconde qui se rapporte au rayon ordinaire, on peut, d'après la loi de réflexion qui lui est propre, remplacer ${}_3\theta'$ par ${}_2\theta'$, à cause de l'égalité des angles d'incidence et de ré-

flexion. Ces deux équations, ainsi transformées, se changent dans les suivantes :

$$h_1 + h_2 = -\frac{e}{tang.\,\theta'_1} + \frac{2(n'^2 - n^2)\,h_2}{(n'^2 + n^2)\,tang.\,\theta'_1}; \quad {}_1h + h_2 = -\frac{e}{tang.\,{}_1\theta'};$$

Or, d'après ce qu'on a vu précédemment, $\frac{1}{tang.\,\theta'_1}$ est égal à $tang.\,\theta'_1$, et de même $\frac{1}{tang.\,{}_1\theta'}$ égale $tang.\,{}_1\theta'$; substituant ces valeurs, et soustrayant les deux équations l'une de l'autre, elles donnent le système des deux suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} h_2 = -{}_1h - e\,tang.\,{}_1\theta' \\ h_1 - {}_1h = -e(tang.\,\theta'_1 - tang.\,{}_1\theta') + \frac{2(n'^2 - n^2)\,h_2\,tang.\,\theta'_1}{n'^2 + n^2} \end{array}\right\};$$

ou enfin

$$\left.\begin{array}{l} h_2 = -{}_1h - e\,tang.\,{}_1\theta' \\ h_1 - {}_1h = -\frac{e\,sin.\,(\theta'_1 - {}_1\theta')}{cos.\,\theta'_1\,cos.\,{}_1\theta'} + \frac{2(n'^2 - n^2)}{n'^2 + n^2}\,h_2\,tang.\,\theta'_1 \end{array}\right\}: \quad (6)$$

la première donnera h_2, c'est-à-dire l'ordonnée DI, du point commun d'émergence, quand on connaîtra l'ordonnée CI du point d'incidence du rayon ordinaire sur la première surface du cristal, ainsi que l'angle de réfraction ${}_1\theta'$ de ce rayon. Avec ces données et l'angle de réfraction θ'_1 du rayon extraordinaire, la seconde équation fera connaître $h_1 - {}_1h$, c'est-à-dire l'intervalle Ii des deux points d'incidence ; les angles ${}_1\theta'$ et θ'_1, éléments de ces calculs, s'obtiendront par les formules suivantes :

$$sin.\,{}_1\theta' = \frac{1}{n}\,sin.\,{}_1\theta \qquad tang.\,\theta'_1 = -\frac{2nn'}{n'^2 + n^2}.\,tang.\,v_1 + \frac{n'^2 - n^2}{n'^2 + n^2},$$

qui expriment les lois suivant lesquelles s'opère la première

réfraction, tant ordinaire qu'extraordinaire, et dans lesquelles les angles $_{,}\theta$, $\theta_{,}$, $_{,}\theta'$, $\theta'_{,}$, doivent toujours être comptés à partir de la normale extérieure, à la face d'incidence du cristal; quand tous ces calculs seront effectués; l'ordonnée NE du trait E sera égale à $h_{,}-{}_{,}h+z_{,}\ tang.\ \theta_{,}$.

Maintenant, pour appliquer ces formules, il ne reste qu'à déduire de l'observation les données dont elles font usage. A cet effet, supposons le cristal placé sur sa colonne, comme nous l'avons représenté, *fig.* 25. L'observation indique immédiatement les numéros des traits O, E, de la division verticale, dont les images, vues par réflexion intérieure, coïncident. On connaît donc ainsi leurs hauteurs AO, AE, au-dessus de la division horizontale sur laquelle la colonne repose : on en retranche AN ou HI, hauteur du point d'incidence I au-dessus de la même division, et l'on a les distances NO, NE, qui sont exprimées dans nos formules par $_{,}y$ et $h_{,}-{}_{,}h+y_{,}$. On connaît aussi la distance commune NI' ou AH, que nous avons appelée $_{,}z$; on peut donc calculer l'angle d'incidence ordinaire $_{,}\theta$ par sa tangente $\frac{_{,}y}{_{,}z}$; et, en y joignant l'épaisseur e du cristal, ainsi que la hauteur $_{,}h$ du point d'incidence I, au-dessus de sa base, deux choses qui se mesurent immédiatement, et dont les valeurs sont constantes dans toutes les expériences, on aura toutes les données comprises dans nos formules, et l'on pourra en déduire l'écart OE des deux traits dont les images coïncident, afin de le comparer à l'observation. C'est ainsi qu'ont été obtenus les résultats renfermés dans le tableau suivant. L'épaisseur e ou CD du cristal était de 82^{mm}, et la hauteur $_{,}h$ du point d'incidence ordinaire était de $19^{mm},5$.

DISTANCE IN à la division verticale $_1z$ observée en millimètres.	VALEUR de NO ou $_1y$ observée.	VALEUR de NE ou $h_1 - _1h + y_1$ observée.	INCIDENCE du rayon ordinaire $_1\theta$ déduite de l'observation.	INCIDENCE du rayon extraordinaire θ_1 déduite de la théorie.	ÉCART des deux points d'incidence I i sur la surface du cristal, $h_1 - _1h$ calculé.	VALEUR de NE ou $h_1 - _1h + y_1$ calculée par la théorie.	EXCÈS DU CALCUL.
					mm	mm	mm
82mm	54mm	57mm	33°21' 58" 8	34°33' 12" 6	0,476	56,945	— 0,055
185	90	95	25.56.32.0	27. 4.18.5	0,483	95,036	+ 0,036
	120	126	32.58.10.0	34. 8.53.0	0,476	125,957	— 0,043
	143	150	37.42.11.0	38.56.10.7	0,470	149,940	— 0,060
240	100	106	22.37.11.5	23.43.49.3	0,485	105,989	— 0,011
	135	142	29.21.27.9	30.30.39.5	0,480	141,913	— 0,088
	162	170	34. 1. 9.7	35.12.46.2	0,470	169,852	— 0,147
	210	220	41.11. 9.4	42.27.53.7	0,460	220,110	+ 0,110

On voit que la correction d'épaisseur due à l'écart des deux points d'incidence sur la surface antérieure du cristal, a une valeur très-sensible, qu'il aurait éte impossible de négliger dans des observations aussi exactes.

J'ai observé aussi d'autres coïncidences, en prenant pour limite la base inférieure du cristal, et sous des incidences aussi rapprochées que possible de la perpendiculaire : les résultats, calculés de la même manière, sont réunis dans le tableau suivant :

DISTANCE IN à la division verticale ${}_1z$ ou z_1 observée.	VALEUR de NO ou ${}_1y$ observée.	VALEUR de NE ou $k_1 - {}_1k + y_1$ observée.	INCIDENCE du rayon ordinaire ${}_1\theta$ déduite de l'observation.	INCIDENCE du rayon extraordinaire θ_1 déduite de la théorie.	ÉCART des deux points d'incidence I i sur la surface antérieure du cristal calculée.	VALEUR de NE ou $k_1 - {}_1k + y_1$ calculée.	EXCÈS du CALCUL.
	mm	mm			mm	mm	mm
0mm	0,	0,5	0° 0′ 0″ 0	1° 3′.19″ 4	0,4865	0,4865	— 0,0135
27	0,5	1,5	1. 3.39.30	2. 6.59.67	0,4865	1,4844	— 0,0156
81	1	2	0.42.26.52	1.45.45.92	0,4865	1,9787	— 0,0213
134	2	5	0.51.18.35	1.54.38.67	0,4865	4,9560	— 0,0440
185	4	8	1.14.19.08	2.17.39.47	0,4865	7,8984	— 0,1016
240	10	15	2.23. 9. 4	3.26.31. 6	0,4865	14,9223	— 0,0777
296	20	26	3.51.55. 6	4.55.21. 6	0,4865	25,9806	— 0,0194

La première expérience a été faite, en posant la face antérieure du cristal sur une division de demi-millimètres et de quarts de millimètre, tracée par M. Fortin sur une petite lame d'argent, et en regardant les traits de cette division par réflexion intérieure sur la face CD, sous une incidence aussi approchée que possible de la perpendiculaire. J'ai vu ainsi que les traits réfléchis des demies et des quarts coïncidaient parfaitement les uns sur les autres, et j'en ai conclu que l'écart des images était, pour ce cas, précisément un demi-millimètre. C'est à-peu-près $\frac{14}{1000}$ de millimètre de plus que ne donne le calcul fondé sur la seule connaissance de l'épaisseur du cristal, de la direction de son axe, et du parallélisme de ses faces opposées. L'erreur du résultat paraîtra bien petite, si l'on fait attention aux incertitudes presque inévitables des deux dernières données. Mais si l'on voulait partir de ce

premier résultat, comme d'une constante une fois déterminée, ce qui donnerait alors, pour toutes les autres, la correction d'épaisseur 0,5 plus forte de $\frac{14}{1000}$ de millimètre que celle qui se déduit du calcul, on voit que les erreurs des autres observations seraient, pour la plupart, fort atténuées et presque anéanties. Au reste, il est impossible, malgré tous les soins imaginables, d'éviter ces dernières incertitudes, dans des observations qui dépendent d'appareils nécessairement sujets à leurs propres erreurs. Tout ce que l'on peut desirer, c'est de varier les épreuves qu'ils permettent de faire, et de voir si les erreurs se multiplient et s'agrandissent, ou si elles oscillent dans des limites suffisamment resserrées.

Quand on observe la coïncidence pour le cas du contact, en posant la face antérieure du cristal sur la division même, comme dans notre première expérience, il se présente un phénomène digne de remarque, c'est que l'écart des traits observé dans le cristal par transmission directe, est sensiblement le même que lorsqu'on les regarde par réflexion. C'est encore une conséquence de la loi de Huyghens. En effet, l'équation (2) de la page 309 nous a montré que, d'après le sens de coupe de notre cristal, les angles d'incidence et de réflexion intérieure θ'_2, θ'_3 sont tels, que la différence de leurs tangentes est une quantité constante, égale à $-2\frac{(n'^2-n^2)}{n'^2+n^2}$, par conséquent très-petite dans l'espèce de cristal que nous considérons. Il suit de là que lorsque les angles θ'_2, θ'_3 deviennent très-peu différents de 90°, comme cela arrive quand l'incidence antérieure comptée de la normale devient très-petite, la différence constante de leurs tangentes ne fait plus qu'une différence insensible entre eux; c'est-à-dire que, plus la réflexion

devient oblique, plus les angles d'incidence et de réflexion intérieure approchent de l'égalité, comme dans la réflexion ordinaire; et ils y arrivent même rigoureusement à la limite où la réflexion se fait presque parallèlement à la surface, parce qu'alors les tangentes de θ', et $\theta'_{,}$ deviennent toutes deux infinies. Or, du moment où cette égalité a lieu, si non exactement, au moins d'une manière très-approchée, la réflexion intérieure renvoie les rayons sans altérer sensiblement leur inclinaison sur l'axe du cristal, et sans changer sensiblement la longueur de leur trajet. Ils se trouvent ainsi, sous ce double rapport, précisément dans les mêmes conditions que les rayons transmis directement sous une incidence antérieure à-peu-près perpendiculaire; ils doivent donc offrir aussi le même écart, comme l'observation nous le fait voir.

Une autre remarque que notre dernier tableau présente encore, c'est que les incidences des rayons dans les expériences qu'il renferme ayant toujours été presque perpendiculaires sur la première face du cristal, et par conséquent presque identiques entre elles, les deux rayons ordinaire, extraordinaire, qui coïncidaient à leur émergence, se croisaient en entrant dans le cristal, sous un angle à-peu-près constant et égal à 1°. 3'. 19",4, c'est-à-dire, à-peu-près le même que dans notre première expérience. C'est en effet ce que l'on peut vérifier sur notre tableau même, en prenant les différences $\theta_{,} - {}_{,}\theta$ pour les diverses observations. Mais, comme le rayon ordinaire avait un point d'incidence différent de l'ordinaire, et plus élevé d'un demi-millimètre, il s'ensuit que sa direction prolongée dans l'intérieur (*fig.* 26) allait couper le prolongement de celui-ci, à une certaine profondeur IC qui peut se calculer d'après ces données, et

qui est égale à $\frac{0^{mm},4865}{tang.(1°.3'.19'',4)}$; ce qui fait $26^{mm},407$. Maintenant, dans toutes les observations, le point *c* n'a presque fait que s'éloigner à diverses distances, par l'effet du mouvement donné à la colonne qui portait le cristal, sans que l'écart angulaire des rayons changeât : ainsi, pour avoir les positions successives de ce point et ses distances à la division verticale, il suffit d'ajouter la distance primitive $26^{mm},407$ aux distances observées de la face antérieure du cristal à cette même division, lesquelles sont marquées dans nos expériences; on aura aussi ce tableau comparatif des distances de

DISTANCES *c*N observées.	Leurs DIFFÉRENCES successives.	ÉCARTS DES TRAITS dont les images coïncident.	Leurs DIFFÉRENCES successives.
mm 26,407	27^{mm}	mm 0,4865	mm 0,5135
53,407	54	1,0000	1,0000
107,407	53	2,0000	1,0000
160,407	51	3,0000	1,0000
211,407	55	4,0000	1,0000
266,407	56	5,0000	1,0000
322,407		6,0000	

On voit que l'écart des traits a augmenté proportionnellement à la distance du point *c*, à la division verticale; l'intervalle des distances d'une coïncidence à celle qui la suit, est, par une moyenne de $53^{mm},8$ presque exactement, comme le donnerait le calcul, en partant de l'écart $0^{mm},4865$ pour

la distance 26mm,407; car cette proportion donnerait 54,28, valeur différente, à-peu-près, de $\frac{1}{100}$ de celle qu'a fournie l'observation. Je suis porté à croire que cette petite différence et celles du tableau précédent, viennent en grande partie, d'un petit défaut de parallélisme, entre les deux faces antérieures et postérieures du cristal. Car, en l'éloignant à 185mm de la division verticale, le trait de cette division, qui était à la hauteur de sa base inférieure CD, cessa d'être visible par transmission ordinaire, de sorte que je dus observer la coïncidence sur un autre trait plus élevé de 4mm; et, dans la dernière observation, quand la distance IN devint 296mm, quatorze traits au-dessus de la base CD avaient disparu; il est donc vraisemblable que les deux faces antérieures et postérieures formaient entre elles un très-petit angle réfringent, dont le tranchant était tourné en bas. La grande épaisseur du cristal eût rendu difficile d'amener ces deux faces à un parallélisme rigoureux; et une pareille recherche d'exactitude eût été sans objet, c'est pourquoi je n'ai pas cherché à l'obtenir. Les résultats précédents m'ont paru suffire pour prouver d'une manière non douteuse, que la loi de Huyghens déja vérifiée par Malus dans le spath d'Islande, qui est un cristal à un seul axe et à double réfraction répulsive, existe pareillement dans le cristal de roche, qui est aussi un cristal à un seul axe, mais à double réfraction attractive. Ce qui complète l'application et la vérité de cette loi :

Vérification de la loi de la double réfraction dans les cristaux à deux axes.

La plupart des expériences que j'ai faites jusqu'à-présent sur les cristaux à deux axes, ont été effectuées avec des morceaux taillés et disposés de manière, que les deux axes, menés par le point d'incidence, fussent également inclinés sur la face par laquelle les rayons pénétraient le cristal, et aussi également inclinés, quoique avec un autre angle, sur la face par laquelle les rayons sortaient. Cette disposition avait pour objet de simplifier l'application des formules.

Dans ce cas, le plan mené par les deux axes coupe la face suivant une droite également inclinée sur leurs directions. C'est ce que montre la *fig.* 27, dans laquelle les droites IA, IB, représentent les deux axes; YX'X la face d'incidence, et X'IX l'intersection dont il s'agit. Si l'on prolonge l'axe IB de l'autre côté du point d'incidence vers B", ce prolongement, toujours compris dans le plan BIA, s'élevera autant au-dessus de la face, que l'axe IA s'abaisse au-dessous. Ainsi l'intersection X'IX' divisera l'angle B"IA en deux parties égales.

Cela posé, lorsque nous voudrons employer des coordonnées rectangulaires $x y z$, nous prendrons la première x sur la ligne IX, la seconde y suivant une ligne IY située aussi dans le plan de la face et perpendiculaire à IX; enfin, la troisième IZ, ou z, perpendiculaire à la face XIY et aux deux autres coordonnées.

Lorsque nous voudrons employer des coordonnées angulaires θ et π analogues à des distances zénithales et à des azimuths, nous compterons les premières θ à partir de la nor-

male extérieure, comme nous l'avons fait toujours, et nous compterons les azimuths π dans le plan de la face, à partir de l'intersection IX; par ce moyen si a' et a'' représentent, comme dans la pag. 229, les azimuths XIA', XIB' des deux axes, projetés l'un et l'autre sur le plan de la face, la symétrie de leur inclinaison autour de la ligne X'IX donnera toujours

$$a'' = 180° - a' \qquad \lambda'' = \lambda';$$

λ'' et λ' étant les distances zénithales des deux axes autour de la normale IZ.

En introduisant ces relations dans les formules générales de la page 229, elles prennent les formes suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \cos. u' = \quad \sin.\lambda' \sin.\theta'_{,} \cos.(\pi'_{,} - a') + \cos.\lambda' \cos.\theta'_{,} \\ \cos. u'' = - \sin.\lambda' \sin.\theta'_{,} \cos.(\pi'_{,} + a') + \cos.\lambda' \cos.\theta'_{,} \end{array}\right\}, \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sin.\theta'_{,}} \dfrac{dv_{,}}{d\pi'_{,}} = \dfrac{k \sin.\lambda'}{2 v_{,} \sin. u' \sin. u''} \left\{\begin{array}{l} \cos. u' \sin.^2 u'' \sin.(\pi'_{,} - a') \\ - \cos. u'' \sin.^2 u' \sin.(\pi'_{,} + a') \end{array}\right\} \\ \dfrac{dv_{,}}{d\theta'_{,}} = \dfrac{k}{2 v_{,} \sin. u' \sin. u''} \left\{\begin{array}{l} - \sin.\lambda' \cos.\theta'_{,} \cos. u' \sin.^2 u'' \cos.(\pi'_{,} - a') \\ \quad + \sin.\lambda' \cos.\theta'_{,} \cos. u'' \sin.^2 u' \cos.(\pi' + a') \\ + \cos.\lambda' \sin.\theta'_{,} \cos. u' \sin.^2 u'' \\ \quad + \cos.\lambda' \sin.\theta'_{,} \cos. u'' \sin.^2 u' \end{array}\right\}; \end{array}\right. \qquad (4)$$

à quoi il faut toujours joindre l'expression de la vîtesse

$$v_{,}^2 = {}_{,}v^2 + k \sin. u' \sin. u'', \qquad (2)$$

et les équations tirées du principe de la moindre action

$$\left.\begin{array}{l} - \sin.\theta \cos.(\pi'_{,} - \pi) = v_{,} \sin.\theta'_{,} + \left(\dfrac{dv_{,}}{d\theta'_{,}}\right) \cdot \cos.\theta'_{,} \\ \sin.\theta \sin.\theta'_{,} \sin.(\pi'_{,} - \pi) = \dfrac{dv_{,}}{d\pi'_{,}} \end{array}\right\}. \qquad (3)$$

A ces conditions géométriques, dépendantes de la coupe

du cristal, j'en ajouterai d'autres dépendantes du mode d'observation même, et qui ont toujours eu pour objet de simplifier, autant qu'il était possible, des épreuves déja par elles-mêmes si compliquées. Par exemple, dans plusieurs de mes expériences, j'ai disposé le cristal de manière que la projection du rayon réfracté sur une face d'incidence, ou sur une face d'émergence, fût dirigée suivant la ligne IY perpendiculaire à IX. Par ce moyen, le rayon réfracté se trouvait également incliné sur les deux axes du cristal, ce qui devait simplifier la résultante de leurs actions. Et il est également évident que, d'après la symétrie de cette disposition, l'incidence extérieure du rayon, ou son émergence, devait se faire dans le même plan que son incidence intérieure. C'est en effet ce qu'indiquent les formules de la page précédente; car, en y supposant $\pi'_1 = 90$, ce qui est l'énoncé de la disposition précédente, on trouve d'abord $cos. u'' = cos. u'$, quel que soit θ'_1, par conséquent $u'' = u'$, et par suite $\frac{d v_1}{d\pi'_1} = 0$. Or, en vertu de cette valeur, la seconde des équations (3) donne $sin. (\pi'_1 - \pi) = 0$, d'où résulte $\pi'_1 = \pi$ ou bien $\pi_1' = 180^o + \pi$, c'est-à-dire que le rayon intérieur et le rayon extérieur, qui dérivent l'un de l'autre, sont dans un même plan normal à la face du cristal. En adoptant la dernière racine, la première des équations (3) se réduit à la forme suivante :

$$sin. \theta = v_1 \, sin. \theta'_1 + \frac{d v_1}{d\theta'_1} cos. \theta'_1 ;$$

et, en introduisant les mêmes suppositions dans les autres éléments analytiques de la question, on trouve :

$$\cos. u'' = \cos. u' \qquad \cos. u' = \cos.\lambda' \cos.\theta'_1 + \sin.\lambda' \sin. a' \sin.\theta'_1,$$

$$v_1^2 = {}_1v^2 + k \sin.^2 u' \qquad \frac{dv_1}{d\theta'_1} = \frac{k \cos. u'}{v_1}\left(\cos.\lambda' \sin.\theta'_1 - \sin.\lambda' \sin. a' \cos.\theta'_1\right).$$

Si l'on met dans les deux dernières, au lieu de $\cos. u'$, sa valeur, et qu'on substitue les résultats dans la première, on trouve, après quelques réductions,

$$\sin.\theta = \frac{({}_1v^2 + k - k \sin.^2\lambda' \sin.^2 a') \sin.\theta'_1 - k \sin.\lambda' \cos.\lambda' \sin. a' \cos.\theta'_1}{\sqrt{{}_1v^2 + k - k(\cos.\lambda' \cos.\theta'_1 + \sin.\lambda' \sin. a' \sin.\theta'_1)^2}}, \qquad \text{(A)}$$

formule dont les indications peuvent être immédiatement comparées à l'expérience.

Jusqu'ici nous avons supposé le plan de réfraction ou d'incidence intérieure dirigé suivant la ligne IY, de manière que l'azimuth π_1' du rayon extraordinaire fût égal à 90°. Mais j'ai fait aussi des observations dans lesquelles la réfraction ou l'incidence intérieure de ce rayon s'opérait suivant la ligne IX elle-même, ce qui rendait son azimuth π_1' égal à zéro. Cela a eu lieu dans deux cas différents, pour chacun desquels il est nécessaire de préparer séparément les formules.

Dans le premier, représenté *fig.* 28, la face réfringente contenait les deux axes du cristal; les distances zénithales $\lambda' \lambda''$ de ces axes, comptée de la normale IZ, étaient donc l'une et l'autre des angles droits. De plus, la ligne IX faisait avec chacun d'eux des angles égaux à la moitié de l'inclinaison mutuelle, que je désignerai par $2a$: ainsi, en comptant les azimuths à partir de cette ligne, on avait pour coordonnées angulaires des deux axes,

$$\lambda' = 90° \quad a' = a \qquad \lambda'' = 90° \quad a'' = 360° - a;$$

et puisque la réfraction s'opérait suivant le plan des xz, on avait, pour le rayon réfracté extraordinaire, π'_1 égal à zéro. En substituant ces éléments dans les formules générales des pag. 229 et 230, elles deviennent

$$\cos. u' = \pm \sin. \theta'_1 \cos. a; \quad u'' = u'; \quad v_1^2 = {}_1v^2 + k - k \sin.^2 \theta'_1 \cos.^2 a$$

$$\frac{dv_1}{d\pi_1} = 0 \qquad \pi'_1 = 180 + \pi \qquad \frac{dv_1}{d\theta_1} = -\frac{k \sin. \theta'_1 \cos. \theta'_1 \cos.^2 a}{v_1};$$

π'_1 étant égal à $180 + \pi$, la réfraction et l'émergence des rayons se fait dans le plan d'incidence même. Alors la première équation (3) se réduit à la forme simple

$$\sin. \theta = v_1 \sin. \theta'_1 + \frac{dv'_1}{d\theta'_1} \cos. \theta'_1;$$

et, en substituant dans le second membre les valeurs précédentes. elle donne, toute réduction faite,

$$\sin. \theta = \frac{({}_1v^2 + k \sin.^2 a) \sin. \theta'_1}{\sqrt{{}_1v^2 + k - k \sin.^2 \theta'_1 \cos.^2 a}}. \qquad \text{(B)}$$

Le second cas dans lequel j'ai observé π_1' étant nul, est représenté *fig.* 29. Les deux axes IA, IB du cristal étaient situés dans un même plan normal à la face réfringente, et qui est ici le plan des $x\,z$. De plus, ils étaient également inclinés sur cette face, de sorte que la ligne IX, suivant laquelle elle était coupée par leur plan, formait encore avec eux des angles AIX, BIX' égaux entre eux et à la moitié du supplément de leur inclinaison mutuelle, que nous représenterons, comme tout-à-l'heure, par $2a$. Enfin les observations étaient toujours dirigées de manière que le plan de réfraction ou d'incidence intérieure fût le plan même des xz.

Ainsi, en comptant toujours les azimuths sur le plan des xy à partir de la ligne IX, $\pi'_{,}$ était nul pour le rayon réfracté extraordinaire, et quant aux coordonnées des axes du cristal, on avait

$$a'=0 \qquad a''=180° \qquad \lambda'=180°-a \qquad \lambda''=\lambda';$$

ces valeurs et celles de $\pi'_{,}$ étant substituées dans les équations générales des pag. 229 et 230, elles donnent

$$\cos. u'=-\cos.(\theta'_{,}+a) \qquad \cos. u''=-\cos.(\theta'_{,}-a),$$

d'où $\quad u'=180-(\theta'_{,}+a) \qquad u''=180-(\theta'_{,}-a),$

et par suite,

$$\sin. u'=\sin.(\theta'_{,}+a) \qquad \sin. u''=\sin.(\theta'_{,}-a).$$

Avec ces éléments, on trouve d'abord

$$\frac{dv_{,}}{d\pi'_{,}}=0 \qquad \pi'_{,}=180°+\pi \qquad \frac{dv_{,}}{d\theta'_{,}}=\frac{k\sin.\theta'_{,}\cos.\theta'_{,}}{v_{,}}.$$

Ainsi la réfraction se fait dans le plan d'incidence. Avec ce résultat, la condition de la moindre action donne

$$\sin.\theta=v_{,}\sin.\theta'_{,}+\frac{dv_{,}}{d\theta'_{,}}\cos.\theta'_{,}: \qquad (3)$$

or, l'expression du quarré de la vitesse devient

$$v_{,}^{2}={}_{,}v^{2}+k\sin.(\theta'_{,}+a)\sin.(\theta'_{,}-a),$$

ou $\quad v_{,}^{2}={}_{,}v^{2}+k\left(\sin.^{2}\theta'_{,}-\sin.^{2}a\right).$

Substituant cette valeur dans l'équation (3), on trouve

$$\sin.\theta=\frac{({}_{,}v^{2}+k\cos.^{2}a)\sin.\theta'_{,}}{\sqrt{{}_{,}v^{2}+k\sin.^{2}a-k\sin.^{2}\theta'_{,}}}. \qquad (C)$$

Cette formule, et les deux précédentes (A) (B), constituent trois modes de réfraction différents, que j'ai développés et mesurés dans la topaze blanche, au moyen des expériences que je vais rapporter.

La topaze est un minéral qui se présente quelquefois dans un état de limpidité parfaite, mais qui, d'autres fois, est coloré en bleu ou en jaune. Dans ce dernier cas, on peut le faire passer au rouge en le chauffant fortement. Les échantillons régulièrement cristallisés offrent, dans un sens, un clivage facile, d'autant plus brillant et plus net, qu'ils sont plus limpides; dans les topazes parfaitement limpides, on peut ainsi, bien qu'elles soient très-dures, séparer des lames parallèles extrêmement minces. Ce sens de clivage étant le seul mécaniquement possible, la forme primitive ne peut se conclure que de l'observation des faces secondaires; ce qui laisse plus de liberté, et en même temps plus d'incertitude sur sa détermination; M. Haüy l'a successivement supposée un prisme droit à base rhombe, et un octaëdre rectangulaire. Ces suppositions qui pouvaient, par des décroissements, être déduites l'une de l'autre, changent seulement le solide générateur que l'on emploie pour reproduire les formes secondaires par apposition. Quoi qu'il en soit, la facilité du clivage dans un sens unique, offre un caractère fort utile pour former, dans un morceau quelconque de topaze, des faces dont la position est toujours certainement et rigoureusement la même, par rapport à la molécule intégrante, quelle qu'elle soit. Je nommerai, par la suite, faces de clivage celles que l'on obtient de cette manière, et que j'ai toujours commencé par mettre en évidence dans tous les morceaux que j'ai employés.

Ayant ainsi reconnu ce sens de coupe, je forme, aux deux extrémités opposées du cristal, deux faces pareilles, que j'obtiens l'une et l'autre par clivage : conservant d'abord l'une d'elles intacte, je l'emploie comme régulateur pour faire polir l'autre, sans altérer sa direction; je me guide ensuite sur celle-ci, pour polir la première, sans altérer son parallélisme. J'obtiens ainsi une plaque d'épaisseur égale, que je fixe au centre d'un anneau divisé, appartenant à l'appareil général de polarisation décrit dans mon Traité de physique, et dans mes précédents mémoires. A l'aide de cet appareil, je présente perpendiculairement la plaque à un rayon polarisé, que j'analyse ensuite, au moyen d'un prisme de spath d'Islande achromatique, dont la section principale a été préalablement placée de manière que le rayon s'y réfractât tout entier ordinairement. Cette condition cesse, en général, d'être remplie, lorsque la topaze est interposée; mais je la tourne sur son anneau, sans changer l'incidence, jusqu'à ce que le rayon transmis se réfracte de nouveau tout entier, en un seul sens, dans le double prisme; je trace alors sur une des faces de la plaque, une ligne droite, parallèle au plan de la polarisation primitive, ou, du moins, aussi exactement parallèle qu'un tracé graphique peut le donner. Cela fait, je tourne de nouveau la plaque dans son anneau, jusqu'à ce que je trouve une seconde position où la même condition de réfraction simple soit encore remplie; et, quand j'y suis arrivé, je trace de nouveau, sur la face de clivage, une ligne parallèle à la direction de polarisation du rayon incident. On trouve toujours deux positions de la topaze qui jouissent de cette propriété, et les deux traces qui en résultent sur sa surface de clivage, sont rectangulaires.

Maintenant, si l'on tourne la topaze sur son plan jusqu'à ce que l'une de ces deux traces arrive à 45° de la direction de la polarisation primitive, et qu'on l'incline ensuite sur le rayon polarisé de manière que le plan d'incidence soit dirigé suivant la trace même que l'on a choisie, on trouve que les deux sections ainsi déterminées produisent des effets bien différents sur le rayon transmis. Car, lorsqu'il a suivi l'une d'entre elles, il se divise toujours en deux faisceaux en arrivant au prisme cristallisé, tandis que, lorsqu'on incline l'autre trace, on trouve deux positions opposées, et également inclinées des deux côtés de la normale, dans lesquelles la plaque n'enlève plus au rayon sa polarisation primitive; ce qui, d'après la liaison constante du pouvoir de polarisation avec celui de la réfraction double, indique que cette dernière est nulle aussi dans ces deux sens, et qu'ainsi le passage du rayon se fait alors suivant les directions des axes du cristal. C'est en effet ce que confirme l'expérience, lorsque l'on introduit des rayons, non plus par des faces parallèles, mais même par des faces obliques, de manière qu'ils se réfractent suivant l'une des deux directions ainsi déterminées. Cette épreuve achève donc, au besoin, pour constater la position des axes, et permet de la reconnaître exactement. On trouve ainsi que, dans la topaze, les deux axes sont situés dans un plan perpendiculaire à la face de clivage, et qu'ils sont tous deux également inclinés sur elle. D'où il suit que la normale, à cette face, divise en deux parties égales leur inclinaison mutuelle, qui, d'après mes expériences, se trouve être de 63°. 14′ dans la topaze limpide.

La section qui contient les deux axes étant reconnue par ces caractères, et sa direction tracée sur la surface de cli-

vage, je taille dans le cristal deux faces latérales qui lui soient parallèles; et menant aussi deux plans normaux parallèles à l'autre trace, j'obtiens deux dernières faces perpendiculaires aux premières. Le cristal se trouve ainsi coupé en un parallélipipède rectangle, ayant deux de ses faces CC données par le clivage, deux autres faces SS parallèles au plan des deux axes, enfin les deux dernières PP perpendiculaires aux autres. Les faces contiguës de ce parallélipipède forment alors autant de prismes rectangulaires, à travers lesquels on peut faire réfracter des rayons, en appliquant à leur seconde surface des parallélipipèdes de verre, collés par du mastic en larmes, qui force les rayons à se transmettre. La séparation éprouvée par ces rayons peut être mesurée par la méthode des coïncidences; et en la comparant aux formules théoriques établies pour la position connue des axes, par rapport aux faces réfringentes, on peut vérifier si elle y satisfait. C'est ainsi que j'ai opéré dans les diverses épreuves dont je vais rendre compte.

La disposition générale de ces expériences est représentée *fig*. 30 et 23; elle est la même que celle que j'ai décrite plus haut pour le cristal de roche : les rayons incidents EI, OI, entrent par-dessous la topaze, se réfractent dans le prisme rectangulaire C, et en sortent ensemble par la seconde surface. Après quoi, sans se désunir, ils traversent le parallélipipède de crownglass collé à cette surface; de là ils ressortent dans l'air et arrivent ensemble à l'œil de l'observateur. Il ne reste plus qu'à fixer, pour chaque cas, la direction des faces d'émergence et d'incidence par rapport aux axes du cristal.

Le premier système d'expériences que j'ai faites se rapporte à la *fig*. 30. Les rayons entraient par une face PI, perpendicu-

laires aux faces de clivage et au plan des deux axes; ils sortaient par une face CS parallèle à ce plan : cela posé, soit (*fig.* 31) PPPP la face d'incidence, et I le point par lequel pénètre le rayon EI, qui doit être réfracté extraordinairement. CCCC est la face donnée par le clivage; SSSS la face parallèle au plan des deux axes. La face d'incidence PPPP est perpendiculaire à l'une et à l'autre. Conséquemment, si, par le point d'incidence I, on conçoit un plan parallèle à la face SS', ce plan coupera la face d'incidence suivant une ligne X'IX normale à la face de clivage CC. De plus, il contiendra les deux axes IA, IB de la topaze, lesquels seront également inclinés sur la ligne X'IX. Enfin le plan d'incidence EIZ sera perpendiculaire à cette ligne. Ce cas de réfraction est un de ceux que comprend notre première formule, que nous avons désignée par (A). La ligne IX, également inclinée aux deux axes, est celle à partir de laquelle on compte dans la face d'incidence les azimuths $\pi \pi_1'$ des rayons incidents et réfractés. Le premier est égal à 270°, comme notre formule le suppose; le second sera donc égal à 90, c'est-à-dire que la réfraction devra s'opérer dans le prolongement du plan d'incidence sans déviation latérale. L'azimuth a' de l'axe IA est égal à zéro; celui de l'autre axe IB est égal à 180°. Enfin la distance zénithale $\lambda' \lambda''$ de chacun de ces axes à partir de la normale extérieure IZ, est égale à $90° + a$, en désignant par a l'angle AIX ou BIX'; dont le double $2a$ exprime l'inclinaison mutuelle AIB' des deux axes, que je compte dans ce sens, parce que c'est celui où elle offre un angle aigu. Il ne reste donc qu'à introduire ces valeurs dans la formule générale (A). Mais, comme nous aurons besoin par la suite de distinguer l'angle d'incidence du rayon EI d'avec celui du rayon OI qui

subit la réfraction ordinaire, je marquerai le premier par un indice inférieur placé à sa droite, et le second par un indice inférieur placé à sa gauche, comme nous l'avons fait précédemment pour le cristal de roche. Nous aurons ainsi dans le cas actuel

$$sin.\,\theta_{,}=\frac{({}_{,}v^2+k)\,sin.\,\theta'_{,}}{\sqrt{{}_{,}v^2+k-k\,sin.^2 a\,cos.^2\theta'_{,}}}.$$

Nous avons vu que le quarré de la vîtesse extraordinaire est représenté en général par ${}_{,}v^2 + k\,sin.\,u'\,sin.\,u''$, ${}_{,}v$ étant la vîtesse ordinaire, et u' u'' les angles formés par chacun des deux axes avec le rayon réfracté extraordinairement. Il résulte de cette expression que les deux limites de la vîtesse extraordinaire seront ${}_{,}v$ et $\sqrt{{}_{,}v^2+k}$: la première a lieu quand l'un des angles u' u'' est nul, ou égal à 180°, c'est-à-dire quand le rayon réfracté suit un des axes du cristal; la seconde limite s'obtient quand les angles u' u'' sont tous deux droits, c'est-à-dire quand le rayon réfracté est perpendiculaire au plan qui contient les deux axes. D'après cela, nous pouvons appliquer ici la notation que nous avons employée pour désigner les deux vîtesses extrêmes, et qui consiste à représenter l'ordinaire par n, l'extraordinaire par n'; alors k sera n'^2-n^2; et l'expression précédente de $sin.\,\theta_{,}$, deviendra

$$sin.\,\theta_{,}=\frac{n'^2\,sin.\,\theta'_{,}}{\sqrt{n'^2-(n'^2-n^2)\,sin.^2 a\,cos.^2\theta'_{,}}}. \qquad (1)$$

Retournons maintenant à la *fig.* 31. Après sa réfraction dans la première face du prisme, le rayon va rencontrer la seconde, qui forme avec elle un angle droit. Conformément à notre notation ordinaire, appelons $\theta'_{,}$ l'angle d'incidence

intérieur du rayon sur cette surface, et θ_2 son angle d'émergence, l'un et l'autre étant toujours compté à partir de la normale extérieure à cette seconde face. La rectangularité des deux faces du prisme donnera évidemment

$$\theta'_2 = 270^\circ - \theta'_1;$$

d'où $sin.\,\theta'_2 = -cos.\,\theta''_1 \quad cos.\,\theta'_2 = -sin.\,\theta'_1.$ (2)

Soit maintenant I_1 le point d'incidence intérieur du rayon sur la face d'émergence SS. D'après la coupe de notre parallélipipède, cette face est perpendiculaire à la face de clivage CC. Si donc on mène dans son plan, par le point d'incidence, une ligne droite $X'_1 I_1 X_1$, parallèle à leur intersection commune, cette droite sera perpendiculaire à la face du clivage, et aussi perpendiculaire au plan d'incidence intérieur $I I_1 Z_1$, dans lequel se trouve le rayon réfracté. Mais, en outre, la face d'émergence SS est parallèle au plan des deux axes du cristal. Conséquemment si, par le point d'incidence, on mène dans cette face deux droites, $I_1 A_1$, $I_1 B_1$, également inclinées sur la ligne $X'_1 I_1 X_1$, et formant chacune un angle a avec elle, ce seront les deux axes du cristal qui partent du point d'émergence I'. La marche du rayon émergent se trouvera donc encore comprise dans notre formule générale (A); la ligne $I_1 X_1$, également inclinée aux deux axes, sera celle à partir de laquelle se comptent les azimuths $\pi\,\pi'_1$ des rayons incidents et réfractés. Le second de ces azimuths sera égal à 90°, comme la formule le suppose; par conséquent, le second sera 270°. De plus, les deux axes étant contenus dans le plan de la face, leurs distances zénithales $\lambda'\,\lambda''$, comptées à partir de la normale extérieure, seront toutes deux de 90°; et enfin l'azimuth a' de l'axe IA sera égal à la

moitié de l'inclinaison mutuelle $A_1 I_1 B'_1$ des deux axes, c'est-à-dire à a, d'après notre notation précédente. En substituant ces valeurs dans notre formule, et marquant les angles d'incidence et d'émergence par les indices caractéristiques de la seconde face, elle donne

$$\sin.\theta_2 = \frac{\{{}_{,}v^2 + k - k\sin.^2 a\}\sin.\theta'_2}{\sqrt{{}_{,}v^2 + k - k\sin.^2 a \sin.^2\theta'_2}};$$

ou, en mettant au lieu de ${}_{,}v$ et k, leurs valeurs n et $n'^2 - n^2$,

$$\sin.\theta_2 = \frac{\{n'^2 - (n'^2 - n^2)\sin.^2 a\}\sin.\theta'_2}{\sqrt{n'^2 - (n'^2 - n^2)\sin.^2 a \sin.^2\theta'_2}}. \qquad (3)$$

Ainsi, pour trouver la relation qui lie le premier angle d'incidence θ_1 avec l'angle d'émergence θ_2, il faut éliminer θ'_1 et θ'_2 entre les trois équations (1), (2), (3).

La chose est d'abord bien facile pour θ'_2, puisque sa valeur est immédiatement donnée par l'équation (2); en la substituant dans (3), il vient

$$\sin.\theta_2 = -\frac{\{n'^2 - (n'^2 - n^2)\sin.^2 a\}\cos.\theta'_1}{\sqrt{n'^2 - (n'^2 - n^2)\sin.^2 a \cos.^2\theta'_1}}; \qquad (3)$$

de sorte qu'il ne reste plus que l'angle θ'_1 à éliminer. Pour cela, il suffit de remarquer que le radical est maintenant le même dans les équations (1) et (3) : car alors, en les divisant l'une par l'autre, on en tire

$$\text{tang}.\theta'_1 = -\frac{\{n'^2 - (n'^2 - n^2)\sin.^2 a\}}{n'^2}\cdot\frac{\sin.\theta_1}{\sin.\theta_2}.$$

Maintenant si, d'après cette expression, l'on forme celles de $\sin.^2\theta'_1$, $\cos.^2\theta'_1$, et qu'on les substitue dans l'équation (1),

après en avoir élevé au quarré tous les membres, on trouve, après toutes réductions faites,

$$\left.\begin{aligned} n'^2 \sin.^2 \theta_2 + \left(n'^2 - (n'^2 - n^2) \sin.^2 a\right) \sin.^2 \theta_1 \\ = n'^2 \left(n'^2 - (n'^2 - n^2) \sin.^2 a\right) \end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

Il reste maintenant à exprimer que l'émergence θ_2 est aussi commune au rayon ordinaire, dont l'incidence est ${}_1\theta$. Pour cela, il n'y a qu'à considérer que la relation obtenue pour une des deux réfractions s'appliquera également à l'autre, pourvu qu'on y modifie les éléments par lesquels leurs lois diffèrent. Cela se fera en rendant d'abord l'angle a nul, ce qui change le cristal en un cristal à un seul axe; puis en y supposant $n' = n$, ce qui transforme la réfraction extraordinaire en ordinaire. Ces changements faits, on peut substituer l'incidence ordinaire ${}_1\theta$ à θ_1, en conservant la même valeur de θ_2. Alors on trouve

$$\sin.^2 \theta_2 + \sin.^2 {}_1\theta = n^2;$$

ce qui est en effet la relation entre les angles d'incidence et d'émergence ordinaires dans un prisme dont l'angle est droit, comme on le peut vérifier par les équations de la page 247. Chassant donc θ_2 de l'équation (4), au moyen de cette relation, il reste

$$\left(n'^2 - (n'^2 - n^2) \sin.^2 a\right) \sin.^2 \theta_1 - n'^2 \sin.^2 {}_1\theta = n'^2 (n'^2 - n^2) \cos.^2 a, \qquad (5)$$

qui exprime la relation demandée.

Au moyen de cette relation, si l'on se donne l'incidence ${}_1\theta$ du rayon ordinaire qui concourt à une coïncidence, on pourra calculer l'incidence θ_1 du rayon extraordinaire qui

coïncide avec lui dans son émergence; mais, pour cela, il faut connaître les valeurs particulières des constantes n, n' et a, dans le cristal que l'on considère.

La constante n est le rapport de réfraction ordinaire. On peut la déterminer par des observations de déviation absolue faites sur le rayon ordinaire, suivant des sens de coupes quelconques. Les deux autres constantes n' et a, exprimant des éléments de la double réfraction, exigent des observations faites sur le rayon extraordinaire, suivant des directions connues relativement aux axes du cristal. Si l'on suppose n obtenue préalablement par des mesures directes, l'équation (5) donnera entre ces deux éléments une relation à laquelle chaque coïncidence devra satisfaire; et ainsi deux coïncidences observées sous des inclinaisons diverses, suffiraient pour les déterminer.

Mais l'exactitude du résultat deviendra beaucoup plus grande, si, à la diversité des inclinaisons, qu'on ne peut communément faire varier que dans des limites assez étroites, on substitue celle des coupes mêmes, en combinant ensemble des coïncidences observées suivant différents sens, pour chacun desquels on aura déterminé la relation analytique donnée par la théorie. Par exemple, dans le cas du parallélipipède dont nous avons fait tout-à-l'heure usage (*fig.* 31) : il se présente un second genre d'observation qui convient parfaitement à cette idée; c'est de faire entrer les rayons par la face de clivage CCCC, suivant une direction perpendiculaire au plan des deux axes, et de les faire sortir, comme tout-à-l'heure, par la face SSSS parallèle à ce plan. C'est ce que représente la *fig.* 32. Dans cette disposition, toute la marche du rayon s'opère encore suivant

un seul et même plan parallèle à la face PPPP, par conséquent perpendiculaire à celui de la première réfraction que nous avons tout-à-l'heure calculée, puisque celui-ci était parallèle à la face de clivage. Or, si l'on répète sur les points d'incidence et d'émergence II_1, de la *fig.* 32, les mêmes constructions que nous avons alors faites, c'est-à-dire si l'on trace sur chaque face les lignes X_1IX, $X'_1I_1X_1$, perpendiculaires au rayon incident ou réfracté, et qu'on mène aussi les lignes IA, IB, I_1A_1, I_1B_1, suivant la direction des deux axes du cristal pour chacune d'elles, on verra aisément que ce second mode de réfraction est absolument le même que le premier, avec cette seule différence que les deux directrices $X'IX$, $X'_1I_1X_1$, y sont situées à angle droit avec les premières, d'où il suit que les angles a qu'elles forment avec chacun des deux axes, sont les compléments de ce qu'ils étaient d'abord. La relation définitive des angles d'incidence des rayons qui émergent ensemble, sera donc la même aussi, à cette seule inversion près; c'est-à-dire qu'en les désignant par les lettres ${}_1\tau$, τ_1, pour les distinguer des deux premiers, il suffira ensuite de changer, dans la formule (5), $2a$ en $180°-2a$; ou a en $90-a$; après quoi l'on aura

$$\left(n'^2-(n'^2-n^2)\cos.^2a\right)\sin.^2\tau_1-n'^2\sin.^2{}_1\tau=n'^2(n'^2-n^2)\sin.^2a; \quad (6)$$

ceci donne donc une nouvelle relation entre a et n', dont les résultats pourront être combinés avec l'équation (5), lorsque la constante n de la réfraction ordinaire aura été préalablement déterminée, et que l'on se sera donné ${}_1\tau$ et τ_1, d'après une observation de coïncidence.

La résolution rigoureuse des équations (5) et (6) serait assez compliquée; mais elle n'est point nécessaire : car on peut,

à l'aide d'une approximation fort simple, en tirer les valeurs de a et de n' avec toute l'exactitude que les observations les plus précises peuvent exiger.

Pour cela, je rassemble les termes affectés seulement de ${}_{1}\theta$, θ_1, ${}_{1}\tau$, τ_1, qui doivent être considérés comme connus; et, mettant par-tout le sinus et le cosinus de l'angle a en évidence, je donne à nos deux équations cette forme,

$$sin.(\theta_1 + {}_{1}\theta)\, sin.(\theta_1 - {}_{1}\theta) - \frac{(n'^2 - n^2)}{n'^2}\, sin.^2 a\, sin.^2 \theta_1 = (n'^2 - n^2)\, cos.^2 a$$

$$sin.(\tau_1 + {}_{1}\tau)\, sin.(\tau_1 + {}_{1}\tau) - \frac{(n'^2 - n^2)}{n'^2}\, cos.^2 a\, sin.^2 \tau_1 = (n'^2 - n^2)\, sin.^2 a,$$

qui peut se changer dans la suivante

$$sin.(\theta_1 + {}_{1}\theta)\, sin.(\theta_1 - {}_{1}\theta) + \left(1 - \frac{sin.^2 \theta_1}{n'^2}\right)(n'^2 - n^2)\, sin.^2 a = n'^2 - n^2,$$

$$sin.(\tau_1 + {}_{1}\tau)\, sin.(\tau_1 - {}_{1}\tau) - \left(1 - \frac{sin.^2 \tau_1}{n'^2}\right)(n'^2 - n^2)\, sin.^2 a = \frac{sin.^2 \tau_1}{n'^2} \cdot (n'^2 - n^2).$$

Maintenant, pour une première approximation, j'emploie n au lieu de n', pour calculer les termes où n'^2 entre comme diviseur. Cela revient évidemment à négliger d'abord le quarré de $n'^2 - n^2$ qui, en effet, est une extrêmement petite fraction. Alors les deux équations ne contiennent plus que les deux inconnues $n'^2 - n^2$, $(n'^2 - n^2)\, sin.^2 a$, et chacune d'elles au premier degré seulement; de sorte que l'élimination se fait avec la plus grande facilité. La valeur de $n'^2 - n^2$ étant ainsi connue, si on y ajoute n^2, on obtient n'^2; alors on peut employer cette valeur comme plus approchée que n pour remplacer n'^2 dans les dénominateurs des équations (5) et (6). Après quoi on procède de nouveau à l'élimination entre elles. Les nouvelles valeurs de $n'^2 - n^2$ et $(n'^2 - n^2)\, sin.^2 a$, obte-

nues par cette seconde approximation, diffèrent extrêmement peu des premières, mais pourtant sont plus exactes. Une troisième approximation n'y apporterait plus que des changements si faibles, qu'ils seraient insensibles aux observations les plus précises, et ainsi il serait inutile d'y procéder.

Mais, pour affaiblir autant qu'il est possible les erreurs inévitables des observations, il convient de ne pas employer seulement une coïncidence de chaque espèce. Il faut plutôt former chacune des équations (5), (6), par la moyenne de plusieurs entre lesquelles on éliminera. J'ai même ajouté à cette précaution celle de répéter chaque système d'observation par les deux couples de faces opposées qui peuvent y servir dans le parallélipipède de topaze, afin de compenser autant qu'il était possible les erreurs que l'artiste avait pu commettre sur leur parfaite perpendicularité, et celle que j'aurais pu moi-même faire sur le sens des coupes que je lui indiquais. Seulement, je n'ai pas cru devoir prendre cette précaution pour les observations dans lesquelles le rayon passe par les faces de clivage, dont la direction, par rapport aux axes du cristal, est toujours certaine.

Mon intention n'est pas de présenter ce système d'observation et de coupe comme le seul, ou même comme le plus commode que l'on puisse employer pour déterminer les éléments de la double réfraction dans un cristal à deux axes. On verra bientôt, au contraire, qu'en se guidant sur la loi générale des vîtesses qui existe dans ces cristaux, on peut y trouver des sens de coupes qui donnent immédiatement, soit l'angle des axes, soit la différence des deux vîtesses. Mais le mode d'observation indiqué ici, n'exigeant point d'incidence déterminée, m'a paru plus général, et conséquem-

ment plus convenable pour montrer la réalité de la loi. Par le même motif, je n'ai pas voulu déterminer la position des axes par des expériences de polarisation; il m'a paru plus convenable que tous les éléments de l'action du cristal fussent déduits des seules mesures de déviation par la loi des vitesses. D'ailleurs, les causes d'incertitude que j'ai indiquées pag. 197, rendraient ici la détermination des axes par la polarisation trop peu sûre et trop peu précise pour qu'on dût l'introduire dans nos calculs.

La première application que j'ai faite de cette méthode a eu lieu sur une topaze d'un blanc légèrement bleuâtre, ayant un clivage assez net, mais pourtant un peu fendillée dans son intérieur. Après y avoir taillé divers systêmes de faces rectangulaires dans les directions ci-dessus indiquées, j'y ai déterminé d'abord la constante n de la réfraction ordinaire, par des mesures de déviation absolues, comme je l'ai expliqué pour le cristal de roche, pag. 258; et, en me bornant à la moyenne de trois expériences qui différaient peu entre elles, j'ai trouvé $n = 1{,}63045$; ce qui donne $n^2 = 2{,}65837$.

J'ai ensuite choisi parmi les faces celle qui était perpendiculaire aux faces de clivage, et qui contenait le plan des deux axes; c'est celle que nous avons généralement désignée par SSSS. J'y ai luté le parallélipipède de crown, qui devait déterminer la lumière à traverser les angles réfringents du cristal; et, fixant le tout sur mon appareil à divisions rectangulaires, j'ai observé plusieurs coïncidences dont les éléments sont exposés dans les tableaux suivants.

I[re] Série (*fig.* 30). Les rayons entrent par une face PI perpendiculaire aux faces de clivage et au plan qui contient

lès deux axes; leur direction d'incidence est perpendiculaire à ce plan : ils sortent par la face I'S qui contient les deux axes. Après avoir observé quelques coïncidences en prenant PI pour face d'incidence, j'ai pris la face P'P', qui était censée lui être parallèle, dans la vue de détruire, par cette alternative, les petites erreurs qui pouvaient exister sur le sens de coupe de ces deux faces, erreurs qui semblaient décelées par une déviation latérale très-petite, mais pourtant sensible.

INDICATION de LA FACE d'incidence.	COORDONNÉES DU POINT DE DÉPART du rayon ordinaire observées.		COORDONNÉES DU POINT DE DÉPART du rayon extraordinaire observées.		INCIDENCE du rayon ordinaire OIH ou O'IH conclue	INCIDENCE du rayon extraordinaire EIH ou E'IH conclue	
	IN ou HO': $_1x$	NO ou IH: $_1y$	IN ou HE': x_1	NE ou IH: y_1	$_1\theta$	θ_1	
PP.	134mm	75mm	134mm	70mm	60° 45′ 51″	62° 25′ 5″	Div. vertic.
	230	200	230	190	48.59.27	50.26.25	
	254	160	254	150	57.47.32	59.26.10	
	373	275	373	260	53.36. 0	55. 7.18	
	504	355	504	335	54.50 26	56.23.20	
	397	390	417	390	45.30.30	46.54.59	Div. horiz.
P'P'	124	75	124	70	58.49.48	60.33.17	Div. vertic.
	213	200	213	190	46.47. 0	48.15.59	
	226	190	226	180	49.56.45	51.27.51	
	247	160	247	150	57. 3.57	58.43.43	
	355	275	355	260	52.14.13	53.46.52	
	485	355	485	335	53.47.50	55.21.59	
	380,5	390	400,5	390	44.17.37	45.45.40	Div. horiz.

IIe SÉRIE (*fig.* 33). Les rayons entrent par une face de clivage CC, perpendiculairement au plan qui contient les deux axes, et ils sortent par la face I'S, parallèle à ce plan, comme dans la série précédente.

INDICATION de LA FACE d'incidence.	COORDONNÉES DU POINT DE DÉPART du rayon ordinaire observées.		COORDONNÉES DU POINT DE DÉPART du rayon extraordinaire observées.		INCIDENCE du rayon ordinaire O I H ou O' IH conclue	INCIDENCE du rayon extraordinaire E I H ou E'I H conclue	
	IN ou HO' : 1^x	NO ou IH : 1^y	IN ou HE' : x_1	NE ou IH : y_1	1^r	r_1	
CC.	187^mm	165^mm	187^mm	160^mm	48°34' 35"	49° 26' 57"	Div.vertic.
	198	155	198	150	51.56.43	52.51.11	
	405	285	405	275	54.52. 0	55.49.23	
	608	360	608	345	59.22.12	60.25.40	
	357	390	367	390	42.28.14	43.15.35	Div.horiz.

Maintenant, pour former le système des équations de condition (5) et (6), qui devaient déterminer la valeur de $n'^2 - n^2$ et l'angle a égal à la demi-inclinaison des axes, j'ai employé les observations 3, 4, 5, 10, 11, 12, de la première série, et les observations 2, 3, 4, de la seconde. J'ai formé l'équation de condition qui résultait de chacune de ces observations, et, prenant la moyenne de celles qui étaient relatives à chaque série, j'ai obtenu les deux suivantes :

$$\text{I}^{re}\ \text{Série.}\quad 0{,}02562738 - 0{,}6944095\frac{(n'^2-n^2)}{n'^2}\sin.^2 a = (n'^2-n^2)\cos.^2 a,$$

$$\text{II}^{e}\ \text{Série.}\quad 0{,}01565080 - 0{,}69207500\frac{(n'^2-n^2)}{n'^2}\cos.^2 a = (n'^2-n^2)\sin.^2 a;$$

et, par deux approximations successives dont j'ai expliqué plus haut la marche, j'en ai déduit les valeurs suivantes, auxquelles je joins celles de n^2 données plus haut :

$$n^2=2{,}65837;\quad n'^2-n^2=0{,}032827045;\quad (n'^2-n^2)\sin.^2 a=0{,}00970372,$$

d'où l'on tire

$$n'^2=2{,}691197;\quad (n'^2-n^2)\cos.^2 a=0{,}02312332;\quad a=32^\circ.56'.7''.$$

La valeur de a étant doublée, donne 65°.52'.14" pour l'inclinaison mutuelle des deux axes de notre topaze. M. Brewster, en partant de l'observation des anneaux que la polarisation développe autour de ces axes, indique pour leur inclinaison 65°. Mais des expériences que je rapporterai plus loin, montrent que les topazes jaunes du Brésil ont une inclinaison d'axes fort différente de ces valeurs; et d'après cela il se pourrait que cette inclinaison ne fût pas non plus tout-à-fait la même dans celles qui, ainsi que la précédente, offrent des traces sensibles de coloration.

La valeur de n'^2-n^2 étant positive, n' est plus grand que n, et la vîtesse extraordinaire v_1 se trouve constamment plus grande que la vîtesse ordinaire ${}_1v$. De là résulte cette conséquence : si l'on coupe dans le cristal une face perpendiculaire à la ligne qui divise l'angle des axes en deux parties égales ; et si, ayant pris sur cette face un azimuth d'incidence perpendiculaire au plan des deux axes, on introduit suivant cette direction dans le cristal un rayon naturel qui se partage en deux faisceaux par l'effet de la double réfraction, le faisceau extraordinaire se rapprochera toujours du plan des deux axes plus que le faisceau ordinaire, comme s'il était attiré vers ce plan. L'effet contraire aurait lieu si n'^2-n^2

était une quantité négative ; alors le faisceau extraordinaire s'écarterait du plan des deux axes plus que le faisceau ordinaire, de même que s'il en était repoussé. On peut aisément déduire ces résultats de l'équation générale, pag. 326, en la particularisant pour le sens de coupe que je viens de spécifier. Lorsque l'inclinaison mutuelle des deux axes devient nulle, la face d'incidence devient perpendiculaire à l'axe unique, et le rapprochement ou l'éloignement du rayon extraordinaire se fait autour de la normale à cette face, toujours sous la même condition de la vitesse, c'est-à-dire selon que n' est plus grand ou plus petit que n. C'est le caractère que j'ai depuis long-temps indiqué dans les cristaux à un seul axe, et qui me les a fait diviser en deux classes, sous les dénominations de cristaux à double réfraction attractive, et cristaux à double réfraction répulsive. On voit, d'après ce qui précède, que cette distinction peut être également appliquée aux cristaux à deux axes, en généralisant son énoncé comme nous venons de le faire ; et non-seulement elle sera utile, comme établissant entre eux une différence physique fondée sur leur nature ; mais encore on pourra, dans un grand nombre de circonstances, s'en servir avec avantage pour prévoir d'une manière générale la position relative des deux faisceaux réfractés qui dérivent d'un même rayon incident.

Il me reste maintenant à montrer jusqu'à quel point les écarts observés entre les faisceaux qui émergent ensemble, sont conformes à la théorie. Pour cela, j'ai adopté les valeurs de n, n' et a, que nous avons tout-à-l'heure déterminées ; et, prenant pour données les angles ${}_{\iota}\theta$, ${}_{\iota}\tau$, qui expriment les incidences observées du rayon ordinaire dans les expériences, j'ai calculé, par les formules (5) et (6), les valeurs de θ_{ι} et

de τ_1, c'est-à-dire les incidences du rayon extraordinaire qui devaient y répondre d'après la théorie. Avec ces résultats et la distance connue du point d'incidence à la division soit verticale, soit horizontale, sur laquelle chaque coïncidence avait été observée, j'ai obtenu la valeur de l'ordonnée y_1 ou z_1, qui devait se mesurer sur cette division : car, dans le cas des coïncidences verticales, où z_1 était donné, y_1 était égal à z_1 *tang.* θ_1; et dans les horizontales, où l'on connaissait y_1, la valeur de z_1 était $\frac{y_1}{tang.\ \tau_1}$. Ces valeurs étant retranchées des ordonnées ${}_1y$ ou ${}_1z$ appartenantes au point de départ du rayon ordinaire, m'ont fait connaître l'écart OE, ou O′E′ assigné à chaque coïncidence par la théorie; et je l'ai comparé à l'écart observé. Ceci, comme on le voit, suppose que le point d'incidence I était commun aux deux rayons incidents OI, EI, ou O′I, E′I; ou, du moins, que s'il y a deux points d'incidence distincts, leur écart est si petit, qu'il peut être négligé comme insensible. J'ai toujours eu soin qu'il en fût ainsi : car j'ai toujours observé le plus près possible du bord tranchant du prisme cristallisé. Au reste, si l'on était forcé de faire autrement, il suffirait de mesurer l'épaisseur du cristal à l'endroit où les rayons le traversent, et l'on en déduirait la correction que l'intervalle des points d'incidence exige, de même que nous l'avons fait pour les cristaux à un seul axe.

I[re] SÉRIE (*fig.* 30). Les rayons entrent par une face PI ou P′P′, perpendiculaire aux bases naturelles et au plan des deux axes; ils sortent par une face I′S parallèle à ce plan; on a rapporté alternativement les résultats des observations faites sur l'une et l'autre face d'incidence, afin de compenser

ainsi les erreurs qui pouvaient provenir des défauts d'exactitude de leur direction, par rapport aux axes du cristal.

DÉSIGNATION de LA FACE d'incidence.	INCIDENCE DU RAYON ORDINAIRE observée i0	ÉCART DES POINTS de départ des rayons O E ou O'E': observé.	ÉCART DES POINTS de départ des rayons O E ou O'E': calculé.	EXCÈS DES RÉSULTATS partiels calculés pour chaque face.	EXCÈS MOYEN DES COUPLES correspondants calculés pour les deux faces.	
P P	60° 45' 51"	5mm	mm 5,37	mm + 0,37	mm + 0,04	Div. vertic.
P' P'	58.49.48	5	4,67	— 0,33		
P P	48.59.27	10	10,12	+ 0,12	— 0,12	
P' P'	46.47. 0	10	9,74	— 0,26		
P' P'	49.56.45	10	9,76	— 0,24		
P P	57.47.32	10	10,11	+ 0,11	— 0,04	
P' P'	57. 3.57	10	9,85	— 0,15		
P P	53.36. 0	15	15,24	+ 0,24	+ 0,00	
P' P'	52.14.13	15	14,76	— 0,24		
P P	54.50.26	20	20,34	+ 0,34	+ 0,11	
P' P'	53.47.50	20	19,77	— 0,23		
P P	45.30.30	20	20,44	+ 0,44	— 0,07	Div. horiz.
P' P'	44.17.37	20	19,49	— 0,51		
Somme des écarts observés.		170	Somme des erreurs....		— 0,08	

On voit que les erreurs des résultats partiels sont presque uniquement dues à un petit défaut d'exactitude dans le sens suivant lequel on a taillé les faces : car elles deviennent insensibles dans les résultats accouplés où elles sont détruites

par le retournement. Alors la théorie se trouve parfaitement satisfaite.

IIᵉ SÉRIE (*fig.* 33). Les rayons entrent par une face de clivage CI, perpendiculairement au plan qui contient les deux axes : ils sortent par la face I'S parallèle à ce plan, comme dans la série précédente.

DÉSIGNATION de LA FACE d'incidence.	INCIDENCE du rayon ordinaire observée τ	ÉCART des points de départ des rayons OE ou O'E' : observé.	ÉCART des points de départ des rayons OE ou O'E' : calculé.	EXCÈS des résultats partiels calculé.	
CC	48° 34' 35"	5mm	mm 4,86	mm − 0,14	Div. vertic.
	51.56.43	5	4,95	− 0,05	
	54.52. 0	10	9,98	− 0,02	
	59.22.12	15	mm 15,17	mm + 0,17	
	42.28.14	10	10,00	+ 0,00	Div. horiz.
Somme des écarts observés. 45			Somme des erreurs. − 0,04		

On voit qu'ici les erreurs des résultats partiels sont beaucoup moindres que dans la série précédente, et qu'elles sont indifféremment positives ou négatives, de manière à se compenser mutuellement dans leur ensemble. Cela tient sans sans doute à ce qu'ici la direction d'une des deux faces, et de celle sur laquelle une petite inexactitude eût été la plus influente, était donnée par un clivage naturel. La théorie se trouve donc encore parfaitement satisfaite dans ce second

sens de réfraction, et l'on peut y remarquer avec évidence l'influence de la séparation des deux axes et de leur inclinaison mutuelle : car ce sont ces circonstances qui rendent les écarts des deux faisceaux observés dans cette seconde série, différents de ceux que nous avons obtenus dans la première ; au lieu qu'ils auraient été de même étendue si l'angle *a* eût été de 45°, parce que son sinus se fût alors trouvé égal à son cosinus.

Quoique les expériences précédentes fussent peut-être assez concordantes avec la loi des sinus pour être regardées comme en donnant une confirmation suffisante, cependant, comme j'avais précédemment trouvé des variations très-sensibles entre les éléments de la double réfraction dans des bérils qui ne différaient, au moins à l'extérieur, que par leur coloration, j'ai désiré reprendre les mêmes expériences avec un échantillon de topaze qui fût exempt même de cette légère teinte bleuâtre qui, ainsi que je l'ai dit tout-à-l'heure, existait dans celui-ci. Pour cela, j'ai eu recours à la généreuse intervention de M. le comte de Bournon, de qui le zèle sans bornes pour l'avancement de la minéralogie, joint à une inépuisable complaisance envers ceux qui la cultivent, accomplissent si dignement la destination que la collection royale qu'il dirige reçoit des intentions d'un prince éclairé. M. le comte de Bournon, accordant à mes recherches un intérêt qui me pénètre de reconnaissance, m'a donné les moyens de les compléter en me remettant un très-beau morceau d'une topaze blanche, extrêmement limpide et pure, sur lequel j'ai pu répéter les mêmes observations. Je vais rapporter ici les résultats de cette nouvelle épreuve dans la même forme que j'ai précédemment employée.

I[re] Série (*fig.* 30). Les rayons entrent par une face PI, parallèle aux bases naturelles et au plan qui contient les deux axes. Leur direction d'incidence est perpendiculaire à ce plan. Ils sortent par une face I'S qui lui est parallèle. On n'a observé les incidences que sur la seule face PP; de sorte que les erreurs qui peuvent provenir d'un petit défaut de direction dans la coupe, ne sont point compensées.

DÉSIGNATION de LA FACE d'incidence.	COORDONNÉES DU POINT DE DÉPART du rayon ordinaire observées.		COORDONNÉES DU POINT DE DÉPART du rayon extraordinaire observées.		INCIDENCE du rayon ordinaire OIH ou O'IH: conclue $_1\theta$	INCIDENCE du rayon extraordinaire EIH ou E'IH: conclue θ_1	
	IN ou HO' $_1x$:	NO ou IH $_1y$:	IN ou HE' x_1:	NE ou IH y_1:			
PP	mm 127,5	mm 80,6	mm 127,5	mm 75,6	57° 42′ 2″	59° 20′ 4″	Div. vertic.
	225,5	160,6	225,5	151,6	54.32.30	56. 5.16	
	225,5	200,6	225,5	190,6	48.20.40	49.47.40	
	255,5	160,6	255,5	150,6	57.50.52	59.27.38	
	255,5	215,6	255,5	204,6	49.50.28	51.18.46	
	255,5	245,6	255,5	233,6	46. 7.54	47.33.50	
	371,5	185,6	371,5	170,6	63.27.12	65.20. 4	
	371,5	190,6	371,5	175,6	62.50.23	64.42. 3	
	371,5	270,6	371,5	255,6	53.55.50	55.28.16	
	497,5	275,6	497,5	255,6	61. 0.53	62.48.26	
	497,5	355,6	497,5	335,6	54.26.38	55.59.51	
	504,5	295,6	504,5	275,6	59.37.59	61.21.11	
	504,5	335,6	504,5	315,6	56.22. 4	57.58.16	
	617,0	330,6	617,0	305,6	61.49. 0	63.39. 3	
	392,0	390,6	412,0	390,6	45. 6. 9	46.31.39	Div. horiz.

II[e] SÉRIE (*fig.* 33). Les rayons entrent par une face de clivage CI ; leur direction d'incidence est perpendiculaire au plan qui contient les deux axes. Ils sortent par la face I'S parallèle à ce plan.

INDICATION de LA FACE d'incidence.	COORDONNÉES DU POINT DE DÉPART du rayon ordinaire observées.		COORDONNÉES DU POINT DE DÉPART du rayon extraordinaire observées.		INCIDENCE du rayon ordinaire OIH ou O'IH : conclue T	INCIDENCE du rayon extraordinaire EIH ou E'IH : calculée T_1	
	IN ou HO' x :	NO ou IH y :	IN ou HE' x_1 :	NE ou IH y_1 :			
	mm	mm	mm	mm			
CC	207,5	105,6	207,5	100,6	63° 1',40"	64° 8' 6"	Div. vertic.
	207,5	120,6	207,5	115,6	59.50. 6	60.52.39	
	207,5	140,6	207,5	135,6	55.52.44	56.50. 8	
	207,5	170,6	207,5	165,6	50.34.27	51.24.27	
	207,5	180,6	207,5	175,6	48.57.54	49.45.36	
	207,5	185,6	207,5	180,6	48.11.20	48.57.54	
	207 5	190,6	207,5	185,6	47.25.50	48.11.20	
	397,5	195,6	397,5	185,6	63.47.58	64.58.17	
	397,5	205,6	397,6	195,6	62.39. 2	63.47.58	
	426,5	255,6	426,5	245,6	59.3 .58	60. 3.52	
	426,5	285,6	426,5	275,6	56.11.32	57. 7.48	
	426,5	295,6	426,5	285,6	55.16.30	56.11:32	
	619,5	345,6	619,5	330,6	60.50.38	61.54.47	
	374,5	390,6	384,5	390,6	43.47.40	44.32.57	Div. horiz.

Pour ne rien laisser à l'arbitraire dans la détermination des éléments de cette topaze, qui, par sa pureté et par le soin qu'on avait mis dans la coupe de ses faces, me paraissait de-

voir fournir des observations très-exactes, j'ai mesuré aussi directement sa réfraction ordinaire avec mon appareil même, comme je l'ai expliqué pour le cristal de roche, pag. 258. La topaze était posée sur la colonne, comme on le voit *fig.* 34. L'angle réfringent ICI′, préalablement mesuré par la réflexion de la lumière, avait été trouvé de 45°.47′. L'épaisseur de la base BB′ était de 8^{mm}; et comme l'angle B était droit, il en résulte que la distance BC de cet angle au point C où se rencontrent les deux faces du prisme, était $7^{mm},784$. L'incidence I des rayons sur la face antérieure, était limitée par une bande de papier appliquée sur cette surface, à une hauteur BI, laquelle était précisément de 10^{mm}; et les distances IN, IH, de ce point aux deux divisions verticales et horizontales de l'appareil, se mesuraient immédiatement. Cela fait, plaçant l'œil en V derrière le prisme, presque sur le prolongement de sa face latérale IBB′I′, de manière à voir du même œil l'image directe et l'image réfractée de la division verticale AY, j'observais à quel trait D de cette division répondait par vision directe le rayon émergent I′V émané d'un trait R connu; ou, pour parler plus exactement, je choisissais parmi les traits R, vus ainsi à travers le prisme, celui qui me paraissait répondre exactement à un trait D vu par vision directe; et même, comme il y avait toujours plusieurs de ces coïncidences possibles, je tenais note de chacune d'elles. Alors la hauteur HI ou AN du point d'incidence étant retranchée de AR, on a la hauteur NR du point de départ du rayon incident, au-dessus de l'horizontale IN, hauteur que je désignerai par y; et, en la divisant par IN ou z, le rapport $\frac{y}{z}$ donne la tangente de l'angle d'incidence RIN, que je désignerai

par θ. Maintenant, pour obtenir la déviation du rayon réfracté, en ayant égard à l'épaisseur du prisme, je calcule d'abord la marche de ce rayon, en prenant pour index de réfraction une valeur seulement approchée, par exemple, $n=1,63$, qui convenait à notre première topaze. Cela donne la position du point d'émergence I′, relativement à la première surface, c'est-à-dire sa distance I′i à cette surface, et sa hauteur iB au-dessus de la base BB′. La première quantité ajoutée à IN ou z, donne la distance du point d'émergence I′ à la division verticale ou z_1; et la seconde, ajoutée à BH, donne sa hauteur Hi ou AN′, au-dessus de la division horizontale; d'où, retranchant la valeur de AD, qui est observée, on a la distance N′D ou y_1. Alors on peut calculer l'angle N′I′D, dépression du rayon émergent, au moyen de sa tangente $\frac{y_1}{z_1}$. Maintenant si, par le point I, on conçoit une droite ID′ parallèle à I′D, cette droite sera évidemment la direction qu'aurait suivie le rayon incident RI, si le tranchant C du prisme eût été placé en I même. Ainsi la dépression NID′ ou N′I′D′ étant ajoutée à l'angle d'incidence θ, ou en étant retranchée, selon son signe, donnera la déviation RID′, ou Δ, telle qu'on l'aurait observée si le prisme eût été infiniment mince. Cette déviation étant connue, ainsi que l'incidence θ et l'angle réfringent C du prisme, on peut calculer le rapport de réfraction par les formules que j'ai données dans mon Traité de physique, tom. III, p. 209.

Voici maintenant les éléments de six observations faites de cette manière, avec les valeurs du rapport de réfraction ordinaire qui s'en déduisent. Afin d'affaiblir la dispersion qui aurait rendu l'image des traits tout-à-fait indistincte à une médiocre distance, je les observais à travers une plaque colorée

d'un orangé-rougeâtre, qui ne laissait passer que des rayons peu différents de l'orangé; et, pour éviter en même temps une autre source de confusion, qui est le doublement des traits causé par la double réfraction, j'avais choisi pour plaque colorée une lame de tourmaline parallèle à l'axe, que je tournais de manière à ce qu'elle ne transmît que l'image ordinaire, toujours facile à distinguer de l'autre par sa situation relative, et par le sens de sa polarisation.

DISTANCE de la face antérieure du prisme à la division verticale IN.	HAUTEUR du point d'incidence I au-dessus de la division horizontale MI.	HAUTEUR du point R duquel émane le rayon réfracté AR.	HAUTEUR du point D auquel tend le rayon émergent AD.	ANGLE d'incidence RIN conclu θ.	DÉPRESSION du rayon émergent au-dessous de l'horizontale menée par le point d'émergence, conclue N'I' D ou δ.	DÉVIATION du rayon par la réfraction du prisme, conclue Δ.	RAPPORT de réfraction, conclu n.	ÉCARTS des résultats partiels autour de la moyenne.
mm 192,0	401mm	520mm	395mm	31° 47' 25	+ 0° 33' 42"	32° 21' 7"	1,61067	+ 0,00049
192,0	401	510	386	29.35. 2	+ 3. 5.11	32.40.13	1,60869	— 0,00149
193,5	401	540	410	35.41.30	— 3.37.11	32. 4.19	1,61307	+ 0,00289
217,3	401	530	390	30.40.20	+ 1.44.52	32.25.12	1,60860	— 0,00158
225,5	401	530	385	29.46.20	+ 2.53.26	32.39.46	1,60940	— 0,00078
225,5	401	540	394	31.39. 0	+ 0.43.24	32.22.24	1,61064	+ 0,00046

Valeur moyenne du rapport de réfraction ordinaire $n = 1,61018$

La petitesse des écarts contenus dans la dernière colonne, prouve l'exactitude de la méthode employée.

Avec ces éléments, j'ai pu former les équations de condition indiquées par les formules (5) et (6). Pour cela, j'ai employé les six dernières observations de la première série, dans lesquelles l'écart observé est de 20mm, et les six avant-

dernières de la seconde série, dans lesquelles l'écart observé est de 10^{mm}; puis, prenant la moyenne des équations partielles qui en résultaient pour chaque série, j'ai obtenu les deux équations suivantes :

$$\text{I}^{re}\ \text{Série.}\quad 0{,}02558226 - 0{,}716163\,\frac{(n'^2-n^2)}{n'^2}\,\sin.^2 a = (n'^2-n^2)\cos.^2 a,$$

$$\text{II}^{e}\ \text{Série.}\quad 0{,}01548545 - 0{,}758539\,\frac{(n'^2-n^2)}{n'^2}\,\cos.^2 a = (n'^2-n^2)\sin.^2 a.$$

Pour tirer maintenant de ces deux équations les valeurs de a et de n'^2-n^2, je suis parti de la valeur de n trouvée par l'expérience, laquelle donne $n^2=2{,}592682$; et, lui ajoutant la valeur de n'^2-n^2 que j'avais trouvée pour la première topaze, c'est-à-dire 0,032827, j'ai formé une première valeur approchée de n'^2, qui était 2,625509. J'ai employé cette valeur pour dénominateur des termes déja multipliés par (n'^2-n^2), et la petitesse de ce coëfficient rendait cette approximation très-exacte. Alors, n'ayant plus que les deux inconnues n'^2-n^2 et $(n'^2-n^2)\sin.^2 a$, je les ai tirées des deux équations, et j'ai trouvé ainsi

$$n'^2-n^2=0{,}0319730 \qquad (n'^2-n^2)\sin.^2 a=0{,}00878687 8;$$

lesquelles, étant jointes à celle de n^2, qui est 2,592682, donnent

$$n'^2=2{,}624654 \qquad (n'^2-n^2)\cos.^2 a=0{,}023185422 \qquad a=31^\circ.37'.1''.$$

On voit par-là que, dans cette topaze, le coëfficient n'^2-n^2, qui mesure l'accroissement du quarré de la vîtesse, a presque exactement la même valeur que dans la première topaze, dont j'ai rapporté plus haut les observations; mais l'inclinaison mutuelle des deux axes y est sensiblement moindre, car elle est égale à 63°. 14'. 2"; tandis que, dans l'autre to-

paze, elle était de 65°. 52'. 14"; et, d'après la manière dont on verra que les observations sont représentées, on ne peut guère concevoir de doute sur la réalité de cette différence. Tout me persuade qu'il en existe de beaucoup plus grandes encore entre les topazes parfaitement blanches, comme celle dont nous venons de faire usage, et les topazes également limpides, mais colorées, dont les teintes intenses décèlent la présence de principes chimiques étrangers, combinés avec leur substance. On en verra tout-à-l'heure un exemple frappant dans la topaze jaune du Brésil. Ceci, au reste, est absolument analogue aux variations que j'ai reconnues entre les intensités des doubles réfractions, et entre les angles des axes de diverses espèces de mica dont la composition est différente. (*Mémoires de l'Institut pour* 1816, pag. 275.)

Toutefois, comme les éléments auxquels nous venons d'être conduits, semblent devoir convenir spécialement à la topaze dans son état le plus parfait de pureté et de simplicité, je les rassemblerai ici en un même tableau.

Eléments de la double réfraction pour la lumière orangée dans la topaze limpide.

Rapport de réfraction pour la lumière orangée...	*ordinaire*,	$n = 1{,}61018$;	*log.* $n = 0{,}2068746$
	extraordinaire,	$n' = 1{,}62008$;	*log.* $n' = 0{,}2095360$
		$\frac{n'}{n} = 1{,}006147$;	*log.* $\left(\frac{n'}{n}\right) = 0{,}0026614$
Accroissement du quarré de la vîtesse...............		$n'^2 - n^2 = 0{,}0319723$;	*log.* $(n'^2 - n^2) = \bar{2}{,}5047740$
Demi-inclinaison des deux axes..................		$a = 31°.37'.1''$.	

Pour appliquer ces éléments aux deux séries d'observations rapportées plus haut, je suis parti, pour chacune d'elles,

de l'incidence du rayon ordinaire, comme d'une donnée, et j'ai calculé, d'après la théorie, l'écart du rayon extraordinaire, qui devait coïncider avec lui après son émergence. Les résultats comparés à ceux de l'expérience sont l'objet des deux tableaux suivants.

DÉSIGNATION de LA FACE d'incidence. 1ere SÉRIE.	INCIDENCE du rayon ordinaire observée, θ.	ÉCART des points de départ des rayons O E' ou O' E : observé.	ÉCART des points de départ des rayons OE ou O'E' : calculé.	EXCÈS des résultats partiels calculés.	
PP	57° 42' 2"	5mm	5,052 mm	+ 0,052 mm	Div. vertic.
	54.32.30	9	9,086	+ 0,086	
	48.20.40	10	10,040	+ 0,040	
	57.50.52	10	10,123	+ 0,123	
	49.50.28	11	11,022	+ 0,022	
	46. 7.54	12	12,038	+ 0,038	
	63.27.12	15	14,990	— 0,010	
	62.50.23	15	15,099	+ 0,099	
	53.55.50	15	15,057	+ 0,057	
	61. 0.53	20	19,880	— 0,120	
	54.26.38	20	20,029	+ 0,029	
	59.37.59	20	20,027	+ 0,027	
	56.22. 4	20	20,088	+ 0,088	
	61.49. 0	25	24,815	— 0,185	
	45. 6. 9	20	20,064	+ 0,064	Div. horiz.
Somme des écarts observés.		227	Somme des erreurs.	+ 0,410	

On voit que les erreurs sont toujours fort petites, et leur somme n'est que $\frac{1}{553}$ de la somme totale des écarts observés.

Ce petit reste d'erreur peut légitimement être attribué aux imperfections inévitables de l'appareil, aux erreurs de la coupe des faces, enfin à ce qu'il est impossible d'observer rigoureusement par le tranchant même des prismes ; ce qui exige une petite correction d'épaisseur que nous avons négligée. Voici, sous la même forme, les résultats des calculs de la seconde série d'observations.

DÉSIGNATION de LA FACE d'incidence. 2e SÉRIE.	INCIDENCE du rayon ordinaire observée I.	ÉCART des points de départ des rayons OE ou O'E' : observé.	ÉCART des points de départ des rayons OE ou O'E' : calculé.	EXCÈS des résultats partiels calculés.	
CC	63° 1' 40"	5mm	mm 5,179	mm + 0,179	Div. vertic.
	59.50. 6	5	4,962	— 0,038	
	55.52.44	5	4,860	— 0,140	
	50.34.27	5	4,968	— 0,032	
	48.57.54	5	5,080	+ 0,080	
	48.11.20	5	5,137	+ 0,137	
	47.25.50	5	5,200	+ 0,200	
	63.47.58	10	10,060	+ 0,060	
	62.39. 2	10	9,857	— 0,143	
	59. 3.58	10	10,132	+ 0,132	
	56.11.32	10	9,993	— 0,007	
	55.16.30	10	9,993	— 0,007	
	60.50.38	15	14,972	— 0,028	
	43.47.40	10	9,992	— 0,008	Div. horiz.
Somme des écarts observés.		110	Somme des erreurs.	+ 0,385	

On voit que les erreurs sont également fort petites, et que leur sens varie irrégulièrement : leur somme $+ 0^{mm},385$ est $\frac{1}{314}$ de la somme totale des écarts observés. Mais l'accord paraîtra encore plus satisfaisant par cette circonstance, que la première observation et la septième, qui donnent les erreurs les plus fortes, dont la somme est $+ 0^{mm},379$, sont précisément les deux extrêmes d'une même coïncidence de cinq traits, observée dans une même position du prisme sur les diverses parties de la division verticale; coïncidence qui se soutenait dans tout cet intervalle par la compensation qui s'opérait entre les changements angulaires de la réfraction sous diverses incidences, et ceux que produisait le changement de la distance dans l'écart linéaire des traits observés. Il est tout simple que l'erreur soit le plus grande possible dans les termes extrêmes d'une pareille série ; et, en les excluant, les erreurs des autres observations se compenseraient presque exactement.

Quelque satisfaisantes que les épreuves précédentes pussent paraître, j'ai voulu encore en tenter une sur un sens de coupe tel qu'une des faces du prisme fût oblique aux axes; et cela m'a donné lieu de vérifier une analogie remarquable que la théorie indique entre les cristaux à deux axes et ceux qui n'en ont qu'un seul.

On sait que, dans ceux-ci, la réfraction extraordinaire suit la loi de Descartes, lorsqu'elle s'opère dans un plan perpendiculaire à l'axe du cristal. Alors le rayon réfracté extraordinaire est toujours perpendiculaire à cet axe. Or, c'est précisément cette perpendicularité qui fait que l'émergence s'opère suivant la loi du sinus, car, en l'introduisant directement dans les formules générales de la pag. 230, on trouve que la

proportionnalité des sinus en résulte, non-seulement quand le plan où la réfraction s'opère est perpendiculaire à l'axe du cristal, mais généralement pour toutes les directions possibles des faces d'incidence et d'émergence, pourvu que le rayon qui subit la réfraction ou l'émergence extraordinaire, soit perpendiculaire à l'axe dans l'intérieur du cristal. J'ai démontré précédemment ce résultat en traitant de la double réfraction du cristal de roche, pag. 265. Mais si l'on veut examiner les considérations analytiques dont j'ai fait alors usage, on verra qu'elles s'appuient uniquement sur la rectangularité des angles n', n'', que le rayon extraordinairement réfracté forme avec les axes du cristal, soit réunis, soit séparés. Ainsi, lorsque cette condition sera satisfaite, les mêmes résultats analytiques auront lieu encore; c'est-à-dire que si, dans un cristal à deux axes, on conçoit un rayon intérieur qui soit perpendiculaire à-la-fois à ces deux lignes, par conséquent au plan qui les contient, ce rayon, en sortant du cristal par une face quelconque, suivra la loi de réfraction de Descartes, en prenant pour rapport de réfraction la vîtesse intérieure extraordinaire; et réciproquement, si on l'introduit du dehors, de manière qu'après avoir subi la réfraction extraordinaire, il devienne perpendiculaire au plan des deux axes, sa réfraction s'opérera encore suivant la même loi.

Pour vérifier ce résultat, j'ai fait les deux expériences suivantes, que je décrirai successivement.

J'ai pris le prisme rectangulaire de topaze limpide, dont j'ai rapporté tout-à-l'heure les observations, et j'y ai fait tailler une nouvelle face, qui était, comme les précédentes, perpendiculaire aux faces de clivage, mais qui, au lieu d'être

rectangulaire avec les autres coupes, formait un angle de 45°. 47' avec celle qui contenait le plan des deux axes. Celle-ci est désignée par SS dans la *fig.* 35, et la nouvelle face l'est par FF; l'angle compris entre elles avait été mesuré par la réflexion de la lumière. J'ai collé à cet angle un prisme de crown qui compensait en partie sa dispersion; puis j'ai placé la face PP du morceau de topaze sur la colonne de mon appareil, ce qui rendait la face SS parallèle à la division verticale; et ayant marqué sur SS une limite d'incidence *i*, j'ai déterminé sur la division verticale le point E qui se trouvait à égale hauteur. Alors, plaçant l'œil en V derrière le double prisme, j'ai observé, comme dans la page 265, le trait O, qui, amené par la réfraction ordinaire, coïncidait dans son émergence avec le trait E, vu par réfraction extraordinaire. Par cette disposition, le rayon extraordinaire E*i*, tombant perpendiculairement sur la face SS, traversait la topaze perpendiculairement aux deux axes. L'observation était donc la même que dans le cas du prisme de cristal de roche de la page 265, et le calcul en est le même aussi; avec cette seule différence, qu'il faut appliquer à l'angle réfringent du prisme les valeurs de n, n', qui conviennent à la topaze limpide, et que j'ai données plus haut. On trouve ainsi que l'angle d'incidence intérieur II'*i* du rayon ordinaire, est de 21'.47"; ce qui donne, pour son incidence extérieure en I sur la première surface, 35'.4",5, dont la tangente est 0,0102034. Alors, en nommant toujours z la distance de la surface d'incidence SS à la division verticale sur laquelle se mesurent les coïncidences, et désignant par e l'épaisseur du prisme à l'endroit où le rayon II' le traverse, épaisseur qui, dans mon expérience, était d'environ 10^{mm}, la formule de la

page 267 donne, pour l'expression de l'écart OE, la formule

$$e.0{,}0063366 + 0{,}0102034 \,.\, z.$$

Voici maintenant la comparaison des résultats de cette formule avec les écarts réellement observés.

DISTANCE de la surface antérieure du prisme à la division verticale observée : z	ÉCART des points de départ des deux rayons : OE observé.	ÉCART des points de départ des deux rayons : OE calculé.	EXCÈS DES RÉSULTATS calculés.
mm 91,5	mm 1,000	mm 0,997	mm — 0,003
188,5	2,000	1,988	— 0,012
285,5	3,000	2,977	— 0,023
386,5	4,000	4,007	+ 0,007
485,5	5,000	5,017	+ 0,017
583,5	6,000	6,017	+ 0,017
672,5	7,000	7,027	+ 0,027

On voit que les erreurs exprimées dans la dernière colonne sont d'une petitesse excessive; cependant ces observations étaient faites long-temps avant que j'eusse déterminé les éléments de la double réfraction pour cette topaze, et elles n'ont point concouru à les former. Au reste, en prenant les diverses précautions que j'ai indiquées, ce genre d'observation est susceptible de beaucoup d'exactitude, parce que, en variant la distance du prisme avant et après celle qui donne chaque coïncidence, on peut déterminer des

limites qui la comprennent, et resserrer ensuite ces limites de manière à affaiblir beaucoup les erreurs.

La nouvelle face que j'avais taillée dans la topaze pour l'expérience précédente, était oblique aux axes, mais perpendiculaire aux faces de clivage; ce qui la rendait également inclinée sur les directions des deux axes. J'ai voulu détruire cette symétrie, et vérifier le résultat indépendamment d'elle, puisque le calcul de la page 265 fait voir qu'il dépend uniquement de ce que le rayon extraordinaire est, dans l'intérieur du cristal, perpendiculaire aux deux axes. Or, cette condition sera toujours remplie, lorsque l'on fera, comme tout-à-l'heure, la face antérieure du prisme parallèle au plan des deux axes, et qu'on observera un rayon extraordinaire qui l'aura traversée perpendiculairement. Ainsi, la direction de la face postérieure est tout-à-fait arbitraire; et, quelle qu'elle puisse être, le rayon extraordinaire devra suivre la loi de Descartes dans son émergence.

Pour vérifier ce résultat de la théorie, j'ai choisi une topaze différente de la précédente, mais d'une limpidité aussi parfaite, et dont je suis redevable à la bienveillance de l'illustre physicien M. Wollaston. Les bases naturelles de l'octaëdre primitif, désignées par C (*fig.* 36), ayant été mises en évidence par un clivage bien net, j'y ai déterminé avec soin la direction des axes par les caractères tirés de la polarisation de la lumière; puis, perpendiculairement à ces bases, j'ai fait tailler deux faces, dont l'une, SS, contenait le plan des deux axes; et l'autre, PP, était perpendiculaire à ce plan. Enfin, obliquement à ces deux faces, j'en ai fait tailler une troisième, OO, inclinée de 62°. 9'. 36" sur la face SS, et qui coupait les faces de clivage C, suivant une ligne inclinée d'environ 45° sur les traces SS, CC, des deux premières sections.

Cette troisième face était évidemment oblique sur les axes, et placée d'une manière non symétrique par rapport à eux. Cela posé, voulant observer la réfraction à travers cette face et la première S, j'y ai collé un prisme de crown, d'un angle à-peu-près égal, mais dirigé en sens opposé, afin de compenser, au moins en partie, la dispersion produite par le prisme de topaze. Puis j'ai placé le tout sur la colonne de mon appareil, de manière que la face antérieure SS fût, comme dans l'expérience précédente, parallèle à la division verticale, ce que j'obtenais en l'appliquant contre elle; et en outre je tournais le cristal jusqu'à ce que l'intersection commune SO des deux faces O, S, devînt horizontale (*fig.* 37). Ces dispositions faites, j'ai marqué sur la face antérieure S une limite I d'incidence; et, ayant déterminé sur la division verticale le trait E que je trouvais situé à la même hauteur, j'ai regardé ce trait par réfraction à travers le double prisme en plaçant l'œil en V.

Cela posé, l'arête commune des deux faces O, S, étant horizontale, le prisme réfringent formé par ces deux faces devait exercer sa réfraction ordinaire dans le sens vertical sur la division AY; et c'est en effet ce qui avait lieu. Mais, en outre, il en était de même dans la réfraction extraordinaire pour le point E et les points environnants : car cette partie de la division étant vue à travers le double prisme, donnait deux images parfaitement superposées dans le sens vertical. Ainsi l'émergence extraordinaire se faisait comme l'ordinaire dans le prolongement du plan vertical d'incidence intérieure; ce qui est la première condition indiquée par la théorie.

Ceci bien constaté, j'ai cherché à déterminer, comme dans l'expérience précédente, le trait O (*fig.* 37), qui, étant vu par réfraction ordinaire à travers le double prisme, don-

nait une image coïncidente avec l'image du trait E, vue par réfraction extraordinaire. Pour cela, j'ai placé successivement le prisme à des distances de la division verticale, telles que l'écart devînt successivement égal à une ou plusieurs divisions de l'échelle, de sorte que je pusse l'apprécier exactement par les coïncidences; et j'ai comparé ces écarts à ceux que la théorie indiquait pour les mêmes distances, précisément comme nous l'avons fait dans l'expérience déja rapportée. Enfin, comme la nouvelle topaze dont je me servais était aussi parfaitement pure et limpide que la première, j'ai employé les mêmes éléments numériques pour calculer ses effets. Alors l'angle réfringent du prisme OS ayant été trouvé de 62°. 9'.36" par la réflexion de la lumière, on en tire l'angle d'incidence intérieure II' N" du rayon ordinaire égal à 117°.9'.59", et, par suite, l'angle II'i de 0°.40'.28". C'est l'angle de réfraction du rayon ordinaire sur la première face SS. Sa tangente 0,0117718 étant multipliée par l'épaisseur iI' ou e du prisme à l'endroit où le rayon le traverse, donne la correction d'épaisseur Ii, ou l'intervalle des points d'incidence des deux rayons OI, Ei; et son sinus étant multiplié par le rapport de réfraction ordinaire n, qui convient à la topaze, donne l'angle d'incidence extérieure du rayon ordinaire OI, lequel se trouve ainsi de 1°.5'.9",7. Enfin la tangente de cet angle 0,0189520 étant multipliée par la distance z du prisme à la division verticale, donne l'abaissement du trait O au-dessous de l'horizontale même par le point I; et l'écart des deux traits OE sur cette division se trouve ainsi représenté par la formule

$$e.0{,}0117718 + z.0{,}0189520.$$

Dans mes expériences, j'ai cherché à faire passer les rayons

aussi près que possible du bord tranchant du prisme, afin de rendre aussi petite que possible la correction d'épaisseur. Toutefois, il ne me paraît guère possible que cette distance ait été moindre d'un millimètre; ce qui donne à-peu-près deux millimètres pour l'épaisseur du prisme à l'endroit où passaient les rayons; j'adopterai cette évaluation, qui donne pour correction d'épaisseur, $0^{mm},023543$. Alors, en mettant pour z les diverses valeurs des distances auxquelles j'ai observé les coïncidences successives, j'ai formé le tableau suivant, où les résultats sont comparés à l'observation :

DISTANCE de la surface antérieure du prisme à la division verticale observée : z	ÉCART des points de départ des deux rayons: OE observé.	ÉCART des points de départ des deux rayons: OE calculé.	EXCÈS DES RÉSULTATS calculés.
263^{mm}	mm 5,000	mm 5,008	mm + 0,008
315	6,000	5,993	— 0,007
369	7,000	7,017	+ 0,017
420	8,000	7,983	— 0,017
472	9,000	8,969	— 0,031
527	10,000	10,011	+ 0,011
791	15,000	15,014	+ 0,014

On voit que ces écarts sont excessivement petits, et qu'ils sont à-peu-près indifférents dans leur signe. Leur somme totale est $0^{mm},005$ sur 60^{mm} observés, ce qui fait $\frac{1}{12000}$. Un pareil accord prouve évidemment la réalité de la loi indiquée par la théorie.

Application des mêmes formules à la topaze jaune du Bresil.

La topaze jaune du Bresil n'est point distinguée par les minéralogistes de la topaze limpide; ils regardent sa coloration comme accidentelle. Toutefois, les cristaux de cette sorte diffèrent de ceux de la topaze limpide par plusieurs caractères physiques; sur-tout ils offrent un clivage plus difficile et beaucoup moins net, parallèlement aux faces de l'octaëdre adopté par M. Haüy. L'examen d'un très-grand nombre d'aiguilles, de la variété cylindroïde la plus commune et la plus facile à se procurer, m'avait depuis long-temps fait soupçonner que les éléments de la double réfraction dans ces topazes jaunes étaient fort différents de ceux qui appartiennent à la topaze limpide. Mais je n'osais avoir une entière confiance dans cette observation, parce que les modifications éprouvées par la lumière polarisée en traversant les lames tirées de ces aiguilles par le clivage, montrent qu'elles sont presque toutes irrégulièrement cristallisées, et composées de prismes qui ne sont pas assemblés par les faces correspondantes. M. le comte de Souza, de qui la généreuse disposition à favoriser les recherches des sciences est connue par tant d'autres exemples, a bien voulu me fournir les moyens de constater ce fait, en me donnant plusieurs beaux morceaux de topaze jaune d'une grosseur considérable, rapportés autrefois du Bresil même par son père, alors vice-roi de ce pays. Un de ces cristaux m'ayant présenté un dichroïsme très-marqué, je m'y suis attaché de préférence; car ce phénomène, lorsqu'il existe, indique que la matière colorante

est régulièrement groupée autour de chaque particule du cristal; d'où il semble naturel d'inférer qu'elle a été également soumise à la force de cristtallisation. Quoi qu'il en soit, après avoir clivé cette topaze avec tout le soin possible, j'en ai tiré un parallélipipède rectangulaire taillé précisément comme ceux que j'avais formés avec la topaze limpide; et je l'ai soumis à un système d'expériences précisément pareil, que je vais rapporter sans autre explication, dans le même ordre que j'ai précédemment adopté.

Détermination du rapport de réfraction ordinaire avec un prisme dont l'angle réfringent était de 45°. 10′ (fig. 34).

DISTANCE de LA FACE antérieure DU PRISME à la division verticale IN.	HAUTEUR			ANGLE D'INCIDENCE RIN, conclu θ.	ÉLÉVATION DU RAYON ÉMERGENT au-dessus de l'horizontale IN, conclue, δ.	DÉVIATION du RAYON par la réfraction ordinaire, conclue, Δ.	RAPPORT de RÉFRACTION ordinaire, conclu, n.	ÉCARTS des RÉSULTATS PARTIELS autour de la moyenne.
	DU POINT d'incidence I au dessus de la division horizontale HI ou AN.	du POINT R duquel émane le rayon réfracté AR,	du POINT D auquel tend le rayon émergent AD.					
mm 150,5	mm 425	mm 355	mm 453	24° 56′ 38″	+10° 32′ 21″	35° 28′ 59″	1,63390	+0,00137
150,5	425	345	442	27.59.36	6.26.41	34.26.17	1,63488	+0,00235
404,0	425	185	445	30.42.46	2.50. 3	33.32.49	1,63172	—0,00081
150,5	425	335	432	30.52.47	2.39.47	33.32.34	1,63221	—0,00032
150,5	425	315	416	36. 9.47	—3.25.20	32.44.27	1,62997	—0,00256

Valeur moyenne du rapport de réfraction ordinaire n=1,63253

Cette détermination prise, j'ai collé un parallélipipède rectangulaire de crown à celle des faces du parallélipipède cristallisé qui contenait le plan des deux axes; et j'ai ob-

servé successivement les coïncidences à travers cette face et les faces rectangulaires, comme le montrent les tableaux suivants :

Ire SÉRIE (*fig.* 30). Les rayons entrent par une face PI, perpendiculaire aux faces de clivage et au plan des deux axes. Leur direction d'incidence est perpendiculaire à ce plan. Ils sortent par la face SI′ qui lui est parallèle.

DÉSIGNATION de la face d'incidence.	COORDONNÉES DU POINT DE DÉPART du RAYON ORDINAIRE, observées. IN ou HO′ $_{1}z$.	NO ou IH $_{1}y$,	COORDONNÉES DU POINT DE DÉPART du RAYON EXTRAORDINAIRE, observées. IN ou HE′ z_1.	NE ou IH y_1.	INCIDENCE du rayon ordinaire OIH ou O′IH conclue $_{1}\theta$.	INCIDENCE du rayon extraordinaire EIH ou E′IH conclue θ_1.	
PP.	mm 295	mm 181,5	mm 295	mm 171,5	58° 23′ 53″	59° 49′ 41″	Division vertic.
	295	191,5	295	181,5	57. 0.37	58.23.53	
	295	201,5	275	191,5	55.39.54	57. 0.37	
	295	211,5	295	201,5	54.21.41	55.39.54	
	295	251,5	295	240,5	49.33. 4	50.48.40	
	295	286,0	295	274,0	45.53.15	47. 6.49	
	450	281,5	450	266,5	57.58.18	59.21.54	
	450	291,5	450	276,5	57. 3.57	58.25.54	
	598	336,5	598	316,5	60.37.59	62. 6.33	
	598	346,5	598	326,5	59.54.39	61.21.58	
	598	356,5	598	336,5	59.11.55	60.38. 1	
	598	366,5	598	346,5	58.29.49	59.54.48	
	445,5	391,5	465,5	391,5	48.41.29	49.56. 7	Division horiz.

IIe Série (*fig.* 33). Les rayons entrent par une face de clivage CI. Leur direction est perpendiculaire au plan qui contient les deux axes : ils sortent par la face SI′ parallèle à ce plan.

DÉSIGNATION de la face d'incidence.	COORDONNÉES du point de départ du rayon ordinaire, observées.		COORDONNÉES du point de départ du rayon extraordinaire, observées.		INCIDENCE du rayon ordinaire OIH ou O′IH conclue.	INCIDENCE du rayon extraordinaire EIH ou E′IH conclue.	
	IN ou HO′ x.	NO ou IH y.	IN ou HE′ x_1.	NE ou IH y_1.	τ.	τ_1.	
	mm	mm	mm	mm			
CC.	200	120	200	117	59° 2′ 10″	59° 40′ 20″	Division vertic.
	200	125	200	122	57.59.40	58.37. 0	
	200	145	200	142	54. 3.26	54.37.31	
	200	165	200	162	50.28.39	50.59.33	
	200	175	200	172	48.48.53	49.18.16	
	330	207	330	202	57.54. 4	58.31.42	
	330	222	330	217	56. 4.13	56.40.19	
	330	252	330	247	52.38. 0	53.11. 8	
	330	272	330	267	50.30.11	51. 1.26	
	625	322	625	312	62.44.33	63.28.17	
	625	327	625	317	62.22.53	63. 6. 2	
	625	332	625	322	62. 1.22	62.44.33	
	625	337	625	327	61.39.59	62.22.53	
	510	392	520	392	52.27.11	52.59.22	Division horiz.

La seule inspection de ces tableaux montre que, pour les mêmes incidences et les mêmes distances aux divisions ob-

servées, notre topaze jaune exerce une double réfraction beaucoup moindre que ne faisait la topaze limpide.

A l'aide de ces résultats, j'ai formé les équations de conditions (5) et (6) de la page 340. Pour cela, j'ai employé les observations 1, 2, 7, 8, 10, 11, de la première série, et 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, de la seconde, lesquelles étant ajoutées, ont donné pour moyennes les deux suivantes :

$$(5)\qquad 0{,}0217255\text{1} - 0{,}7448225\,\frac{(n'^2 - n^2)}{n'^2}\,\sin.^2 a = (n'^2 - n^2)\cos.^2 a,$$

$$(6)\qquad 0{,}00998614 - 0{,}7482349\,\frac{(n'^2 - n^2)}{n'^2}\,\cos.^2 a = (n'^2 - n^2)\sin.^2 a.$$

Pour effectuer la première approximation, j'ai calculé les diviseurs n'^2 avec la valeur $n' = 1{,}639945$, qui m'avait été indiquée par d'autres expériences ; et, comme elle s'est trouvée excessivement peu différente de la véritable, il a été inutile de recourir à une seconde approximation. J'ai obtenu ainsi les éléments suivants pour la double réfraction de notre topaze jaune :

Rapport de réfraction	*ordinaire*,	$n = 1{,}63253$;	$log.\,n = 0{,}2128611$
	extraordin.^{re},	$n' = 1{,}64011$;	$log.\,n' = 0{,}2148735$
Accroissement du quarré de la vîtesse.		$n'^2 - n^2 = 0{,}02481363$;	$log.\,(n'^2 - n^2) = \bar{2}{,}3946904$
Demi-inclinaison des deux axes.		$a = 24^\circ.30'.41''$.	

On voit que ces éléments diffèrent considérablement de ceux qui conviennent à la topaze limpide. La différence des quarrés des vitesses est réduite aux trois quarts de la valeur qu'elle avait d'abord ; l'inclinaison mutuelle des deux axes est diminuée dans la même proportion. J'ajoute que cette

valeur de l'inclinaison est parfaitement confirmée par les expériences de la polarisation. Il reste maintenant à voir jusqu'à quel degré d'exactitude ces éléments représentent les observations : tel est l'objet des tableaux suivants, qui ont été calculés comme ceux de la topaze limpide.

DÉSIGNATION DE LA FACE D'INCIDENCE. 1ere SÉRIE.	INCIDENCE du rayon ordinaire, observée. θ.	ÉCART des points de départ des rayons conjugués OE ou O'E', observé.	ÉCART des points de départ des rayons conjugués OE ou O'E', calculé.	EXCÈS des RÉSULTATS calculés.	
PP.	58° 23′ 53″	10mm	mm 9,883	mm — 0,117	Division vertic.
	57. 0.37	10	9,918	— 0,082	
	55.39.54	10	9,998	— 0,002	
	54.21.41	10	10,188	+ 0,168	
	49.33. 4	11	10,936	— 0,064	
	45.53.15	12	12,013	+ 0,013	
	57.58.18	15	15,082	+ 0,082	
	57. 3.57	15	15,127	+ 0,127	
	60.37.59	20	20,102	+ 0,102	
	59.54.39	20	20,058	+ 0,058	
	59.11.55	20	20,028	+ 0,028	
	58.29.49	20	20,026	+ 0,026	
	48.41.29	20	20,012	+ 0,012	Division horiz.

La somme totale des erreurs est + 0,mm351 ; celle des écarts observés est 193mm. Ainsi l'erreur moyenne est $+\frac{1}{550}$ de l'observation.

DÉSIGNATION DE LA FACE D'INCIDENCE. 2ᵉ SÉRIE.	INCIDENCE du rayon ordinaire, observée. I.	ÉCART des points de départ des rayons conjugués OE ou O E', observé.	ÉCART des points de départ des rayons conjugués OE ou O'E', calculé.	EXCÈS des RÉSULTATS calculés.	
cc.	59° 2' 10"	3mm	mm 3,056	mm + 0,056	Division vertic.
	57.59.40	3	3,039	+ 0,039	
	54. 3.26	3	2,986	— 0,014	
	50.28.39	3	3,010	+ 0,010	
	48.48.53	3	3,072	+ 0,072	
	57.54. 4	5	5,014	+ 0,014	
	56. 4.13	5	4,955	— 0,045	
	52.38. 0	5	4,941	— 0,059	
	50.30.11	5	4,988	— 0,012	
	62.44.33	10	10,114	+ 0,114	
	62.22.53	10	10,049	+ 0,049	
	62. 1.22	10	9,985	— 0,015	
	61.39.59	10	9,930	— 0,070	
	52.27.11	10	10,098	+ 0,098	Division horiz.

La somme totale des erreurs est $+0^{mm},237$; celle des écarts observés est 85^{mm}. Ainsi l'erreur moyenne est $+\frac{1}{358}$ de l'observation.

Pour compléter ces résultats, j'ai répété sur cette topaze la même observation que j'ai décrite pour la topaze limpide, pag. 361, et dont la disposition est représentée *fig.* 35. J'ai fait entrer les rayons lumineux perpendiculairement à la face SS, qui contenait les deux axes, et je les ai fait sortir par une face FF également perpendiculaire aux faces de cli-

vage, mais inclinée sur SS de 44°.50′. Cette inclinaison a été mesurée par la réflexion de la lumière. Enfin l'épaisseur du prisme était de 9^{mm} dans la partie où se faisait le trajet des rayons. En appliquant à ces éléments la méthode de calcul employée pag. 362, laquelle est la même dont j'ai plus haut fait usage pour le cristal de roche, pag. 267, on trouve pour l'écart observé OE la formule suivante :

$$e.0,0046281 + 0,0075559.z;$$

et, en y mettant pour e sa valeur 9^{mm}, elle donne la comparaison suivante du calcul avec l'observation.

DISTANCE de LA SURFACE antérieure DU PRISME à la division verticale, observée.	ÉCART DES POINTS DE DÉPART des DEUX RAYONS OE, observé.	ÉCART DES POINTS DE DÉPART des DEUX RAYONS OE, calculé.	EXCÈS des RÉSULTATS calculés.
mm	mm	mm	mm
130	1	1,024	+0,024
267	2	2,059	0,059
400	3	3,064	0,064
535	4	4,084	0,084
666	5	5,074	0,074

On doit faire ici sur le sens des erreurs la même remarque que dans la page 363 ; mais, en outre, la coloration du cristal et son épaisseur rendaient ici l'observation singulièrement difficile. Toutefois l'accord général des résultats avec la théorie suffit pour montrer la régularité d'action de cette topaze,

et pour prouver que sa constitution intérieure différait essentiellement des deux autres topazes essayées plus haut.

Application des mêmes formules à la double réfraction de la chaux sulfatée anhydre.

La chaux sulfatée anhydre est un minéral divisible par des coupes nettes, suivant trois sens rectangulaires. Toutefois l'inégale facilité de ces trois clivages et leur éclat divers montrent qu'ils n'appartiennent pas à un cube ; et en effet la substance exerce très-énergiquement la réfraction double. M. Haüy lui assigne pour forme primitive un prisme droit à base rectangle, dans lequel les diagonales de la base font entre elles des angles de 79°. 56′ et 100°. 8′. Les cristaux se laissent facilement cliver par des plans menés suivant ces diagonales, perpendiculairement aux bases.

La collection du cabinet particulier du roi, aussi riche dans ce genre que dans tous les autres, possédant un grand nombre de ces cristaux parfaitement limpides, M. le comte de Bournon a bien voulu en mettre quelques-uns à ma disposition ; et je me suis empressé de les étudier : car l'inégalité des côtés de la forme indiquant l'existence de deux axes, et en même temps la double réfraction étant très-énergique, il en résultait l'occasion d'une épreuve très-importante pour la théorie.

En examinant d'abord les effets que des lames minces obtenues par le clivage exerçaient sur la lumière polarisée, je me suis assuré que le minéral avait en effet deux axes de double réfraction situés dans une des faces de clivage naturel, laquelle m'a paru être la base même de la forme pri-

mitive. La ligne qui divise l'angle aigu des axes en deux parties égales est parallèle à un des côtés de cette forme. Ces conditions reconnues, comme je ne voulais, pour le moment, rien tirer de plus de la polarisation de la lumière, j'ai fait tailler divers prismes dont les faces avaient des directions connues par rapport aux axes. Les clivages rectangulaires parallèles aux côtés de la forme primitive offraient pour cela un grand secours. Mais le peu de volume des cristaux bien limpides fait qu'on ne peut jamais, en les polissant, conserver rigoureusement leur rectangularité ; et la grande énergie de la double réfraction rend le plus petit écart de direction intolérable. On est donc inévitablement obligé de mesurer exactement tous les angles par la réflexion de la lumière après le travail, pour les employer avec leur véritable valeur. Alors, n'étant plus tout-à-fait droits, ils n'offrent plus autant de simplicité pour la détermination des éléments de la double réfraction. C'est pourquoi j'ai tiré cette détermination d'un autre sens de coupe. J'ai fait tailler un prisme triangulaire CSF (*fig.* 35), dont les arêtes étaient parallèles à la ligne qui divise l'angle aigu des axes en deux parties égales. Les faces SF, SS', d'abord obtenues par le clivage, ayant été polies, j'ai mesuré les angles S, F, C, par la réflexion de la lumière, et j'ai trouvé l'angle F de 41°.20'.30", l'angle C de 47°.41'.10", et l'angle S de 91°. De plus, en comparant par le même procédé les faces SF, SS', avec une petite face de clivage PP que j'avais mise à nu après le travail du prisme, j'ai trouvé que leur intersection commune était bien parallèle à la commune section des faces primitives ; de sorte que l'arête S du prisme, qui est supposée perpendiculaire au plan de la figure, divisait effectivement l'angle aigu des axes du cristal en deux parties égales. J'ai reconnu ensuite

que la face SS′ formait un angle de 1° avec le plan de ces axes, d'où il résultait que la face SF était exactement perpendiculaire à ce même plan.

Ces déterminations prises, j'ai collé à mon prisme de cristal un prisme de crown dont les angles étaient à-peu-près égaux aux siens; puis j'ai placé la face PP sur le support de mon appareil, de manière que la face antérieure SS′ devînt exactement parallèle à la division verticale AY, et j'ai observé l'écart des traits OE dont les images coïncidaient dans leur émergence, en ayant soin que le rayon extraordinaire EI fût perpendiculaire à la face antérieure SS′. Cette condition rendait insensible la petite inclinaison de cette face sur le plan des axes, et permettait de calculer la marche du rayon, comme s'il eût été rigoureusement perpendiculaire à ce plan. Or, dans ce cas, si l'on nomme c l'angle réfringent du prisme, et ${}_{,}\theta'$ l'angle d'incidence intérieur du rayon ordinaire II′ sur la seconde face, nous avons vu que l'on a

$$sin.\,{}_{,}\theta' = \frac{n'}{n}\,sin.\,c;$$

n' et n étant les coëfficients des deux réfractions. Maintenant n est connu par les observations de la réfraction ordinaire; et, en suivant le rayon ordinaire EI dans le prisme, on peut calculer ${}_{,}\theta'$ d'après l'observation même des coïncidences. Il ne reste donc plus d'inconnue que n' dans cette équation, et par conséquent on peut l'en déduire. Pour le faire avec exactitude, je lui donne la forme suivante :

$$n' - n = \frac{2n\,sin.\,\frac{1}{2}({}_{,}\theta' - c)\,cos.\,\frac{1}{2}({}_{,}\theta' + c)}{sin.\,c}.$$

De-là je commence par déduire $n' - n$; et, en y ajoutant n, j'obtiens n', c'est-à-dire le coëfficient de la réfraction extraordinaire.

Cette observation faite, j'ai changé la position de mon

prisme de cristal; et, cette fois, j'ai placé la face SS′ sur mon appareil (*fig.* 38) de manière que la face SF se trouvât exactement parallèle à la division verticale AY. Alors j'ai observé, comme précédemment, les traits OE qui, vus à travers l'angle SFF′, coïncidaient dans leur émergence, en choisissant le trait E, de manière que le rayon extraordinaire EI fût perpendiculaire à la face d'incidence SF. Alors ce rayon entrait dans le cristal parallèlement au plan des axes, et perpendiculairement à la ligne moyenne qui divise leur inclinaison mutuelle en deux parties égales; de sorte qu'en représentant toujours par $2a$ cette inclinaison, il forme avec chacun d'eux un angle égal à $90-a$. Le rayon étant ainsi symétriquement dirigé par rapport aux deux axes, ne se dévie ni vers l'un ni vers l'autre. Il traverse le cristal avec une vîtesse dont le quarré est

$$v_1^2 = n^2 + (n'^2 - n^2).\cos.^2 a.$$

Et quand il arrive à la seconde surface du prisme, la même disposition symétrique de cette face autour des axes fait que son émergence s'opère dans le même plan que son incidence intérieure, et suivant les proportions des sinus indiquées par les vîtesses au-dedans et au-dehors; c'est-à-dire qu'en nommant θ_1 l'angle d'émergence, et c l'angle réfringent du prisme, on a

$$\sin.\ \theta_1 = v_1 \sin.\ c.$$

Ce résultat, fondé sur la nature de ce genre d'action, est facile à conclure de nos formules générales. Or si l'on nomme, comme précédemment, ${}_1\theta'$ l'angle d'incidence intérieure du rayon ordinaire qui coïncide avec le précédent dans son émergence, $\sin.\theta_1$ sera égal à $n \sin.\ {}_1\theta'$; substituant donc cette valeur et celle de v_1, on aura, après avoir élevé au quarré,

$$n^2 \sin.^2\ {}_1\theta' = \left(n^2 + (n'^2 - n^2) \cos.^2 a\right) \sin.^2 c.$$

Or, n et n' sont connus par ce qui précède. On connaît aussi l'angle c du prisme, et l'on peut tirer ${}_{,}\theta'$ de l'observation même des coïncidences, en conduisant le rayon ordinaire par la loi de Descartes à travers le prisme. Alors il ne reste plus que $\cos.^2 a$ d'inconnu, et en le dégageant on a

$$\cos.^2 a = \frac{n^2 \sin.({}_{,}\theta' + c)\sin.({}_{,}\theta' - c)}{(n'^2 - n^2)\sin.^2 c}:$$

c'est ainsi que j'ai déterminé l'inclinaison des deux axes.

Tous les éléments de l'action du cristal sur la lumière étant ainsi connus, j'ai repris le même prisme cristallisé CFS; mais, cette fois, j'ai observé les coïncidences à travers le grand angle S, après avoir collé à la face SS′ un parallélipipède de crown qui déterminât l'émergence des rayons (*fig.* 39). Alors ceux-ci entraient par la face SF perpendiculaire aux axes, et sortaient par la face SS′, qui, s'écartant de 91° de la première, formait avec le plan des axes un angle de 1°. De plus, la ligne moyenne entre les axes étant parallèle aux arêtes du prisme, se trouvait horizontale; et ainsi le rayon extraordinaire, en traversant le cristal, lui était perpendiculaire. D'après ces dispositions symétriques, les formules de la page 326 sont parfaitement applicables aux réfractions sur les deux faces de l'angle S′SF : si l'on nomme, conformément à nos notations, λ' la distance zénithale d'un des axes comptée à partir de la normale extérieure, et a' son azimuth compté de la ligne moyenne, on aura, pour la face d'incidence SF, $\lambda' = 90°$, $a' = 0$; et, pour la face d'émergence SS′ inclinée de 1° sur le plan des axes, il viendra

$$-\cos.\lambda' = \sin.\,1°.\sin.a; \qquad \text{tang}.\,a' = \cos.\,1°.\,\text{tang}.\,a.$$

Il ne reste plus qu'à introduire ces valeurs dans la formule générale de la pag. 326. Pour cela j'ai d'abord emprunté de

l'observation l'incidence θ_1 du rayon extraordinaire sur la face SF; et j'en ai déduit l'angle de réfraction extraordinaire θ'_1 par la formule citée. De-là, conduisant le rayon à la seconde surface SS' du prisme, dont l'angle réfringent était de 91°, j'en ai conclu l'incidence intérieure θ'_2 sur cette face; puis, par la même formule, j'ai calculé le sinus d'émergence $sin.\,\theta_2$, ou plutôt son égal, $n\,sin.\,{}_2\theta'$, puisque l'émergence θ_2 appartient aussi au rayon ordinaire. Ramenant alors ce rayon vers la première surface SF du prisme, j'ai calculé sa réfraction ${}_1\theta'$ sur cette face, et, en lui appliquant la loi de Descartes, j'en ai conclu son incidence extérieure ${}_1\theta$; d'où j'ai tiré $tang.\,{}_1\theta$ qui, multipliée par la distance z de la division verticale, m'a donné la position du trait d'où le rayon ordinaire devait émaner. J'ai ainsi connu l'écart théorique des deux traits qui devaient former la coïncidence, et je l'ai comparé à l'observation. Voici maintenant le détail des expériences; je commence par la mesure de la réfraction ordinaire, observée à travers l'angle F de 41°.20'.80".

DISTANCE de LA FACE antérieure DU PRISME à la division verticale IN.	HAUTEUR DU POINT d'incidence I au-dessus de la division horizontale HI.	HAUTEUR du POINT R duquel émane le rayon réfracté AR.	HAUTEUR du POINT D auquel tend le rayon émergent AD.	ANGLE D'INCIDENCE RIN, conclu θ.	DÉPRESSION DU RAYON ÉMERGENT au-dessous de l'horizontale menée par le point d'émergence, conclue, N'I'D ou δ_1	DÉVIATION du RAYON par la réfraction du prisme, conclue, Δ.	RAPPORT de RÉFRACTION ordinaire, conclu, n.	ÉCARTS des RÉSULTATS PARTIELS autour de la moyenne.
mm	mm	mm	mm					
157,3	398	315	395	27° 45' 51"	— 1° 5' 33"	26° 40' 18"	1,57890	+ 0,00170
195,0	398	265	370	34.17.46	— 8 10.16	26. 7.30	1,57313	— 0,00407
195,0	398	315	413	23. 3.24	+ 4.23.55	27.27 19	1,57872	+ 0,00152
197,5	398	295	395	27.32.34	— 0.52.13	26.40.21	1,57748	+ 0,00028
296,5	398	245	395	27.17.41	— 0.34.47	26.42.54	1,57778	+ 0,00058

Valeur moyenne du rapport de réfraction ordinaire $n = 1,577203$

Expériences pour la détermination de n′. *L'angle réfringent* SCF *du prisme est* 47°.41′.10″. *Les coïncidences observées par le tranchant même donnent*

Distances...	200^{mm}	300^{mm}	400^{mm}	500^{mm}
Écarts OE..	10	15	20	25.

Toutes ces expériences s'accordent à donner la tangente de l'incidence $_{,}\theta$ égal à $\frac{1}{20}$, d'où l'on tire $_{,}\theta'=49°.30'.1''.88$, en le comptant de la normale intérieure. On a, de plus, $c=47°.41'.10''$. De-là on tire $n'-n=0{,}04467194$, et par suite $n'=1{,}621875$; $n'^2-n^2=0{,}1429090$. Ce dernier élément est cinq fois aussi fort que celui que nous avons trouvé pour le cristal de roche. Son signe positif montre que la chaux sulfatée anhydre exerce la double réfraction attractive.

Expériences pour la détermination de l'angle des axes. L'angle réfringent SFC *du prisme est* 41°20′.30″. *Les coïncidences observées donnent*

Distances...	292^{mm}	441^{mm}	587^{mm}	735^{mm}
Écarts OE..	10	15	20	25.

Les trois dernières, employées comme plus exactes, donnent, pour la valeur moyenne de $_{,}\theta$, 1°.56′.57″. De-là on tire $_{,}\theta'=42°.34'.40''.5$, en le comptant de la normale intérieure. Et, achevant le calcul par la formule de la page 380, on trouve enfin : $a=22°.20'.41''$; par conséquent l'inclinaison des axes : $2a=44°.41'.22''$.

Le docteur Brewster, dans son mémoire, assigne à cette inclinaison une valeur de 28°.7′ (pag. 230). Si son résultat est exact, il faut qu'il ait observé une substance différente de la chaux sulfatée anhydre; ou que celle-ci présente, dans l'angle de ses axes, des variations dépendantes de sa compo-

sition accidentelle; ce que mes expériences sur les diverses variétés de mica, le béril et les topazes rendent très-vraisemblable.

Voici maintenant l'application de ces éléments au calcul des déviations opérées par le grand angle de 91° (*fig.* 39). Ces déviations étaient énormes; et la dispersion de l'image extraordinaire était fort sensible, malgré l'opposition du prisme de crown par lequel la dispersion ordinaire était compensée:

DISTANCE de LA FACE d'incidence à la division verticale IN, observée : x.	ORDONNÉES DES TRAITS dont les images coïncident dans leur émergence, observées :		INCIDENCE		ORDONNÉE DU POINT de départ du RAYON ordinaire N.O, calculée.	ÉCART DES DEUX TRAITS OE,		EXCÈS des ÉCARTS, calculés.
	NO, y.	NE y_1.	DU RAYON extraordinaire, conclue de l'observation : θ_1.	DU RAYON ordinaire, déduite de la théorie : θ.		observé.	calculé.	
mm	mm	mm			mm	mm	mm	mm
170,00	123	86	63° 9′ 57″4	54° 34′ 44″	120,907	35	34,907	— 0,093
206,25	181	136	56.35.57,8	48.44.17	180,953	45	44,953	— 0,047
250,80	221	166	56.30. 0,5	48.39.21	220,676	55	54,676	— 0,324
287	216	156	61.28.24,7	53. 7.22	215,307	60	59,307	— 0,693
325,5	276	206	57.40.17	49.43.54	275,735	70	69,735	— 0,265

La somme des écarts observés est 265^{mm}; celle des erreurs est 1^{mm},422; elle est donc $\frac{1}{187}$ de l'observation. Maintenant, si l'on veut considérer que ces expériences ne sont point entrées dans la détermination des éléments de l'action du cristal, et qu'elles sont nécessairement influencées par toutes les erreurs que peuvent occasionner les évaluations des incidences, les imperfections du sens des coupes, et la dispersion très-sensible de l'image extraordinaire, on jugera, je crois, que cette épreuve confirme suffisamment la solidité de la théorie.

L'euclase soumise aux mêmes expériences a aussi parfaitement satisfait à la loi des sinus. J'ai trouvé dans ce minéral le rapport de réfraction ordinaire $n = 1,642912$; l'extraordinaire $n' = 1,663004$; le maximum de différence des quarrés des vîtesses, $n'^2 - n'^2 = 0,0664223$. Les deux axes sont situés dans le plan de la face qui s'obtient par le clivage le plus facile; ils font entre eux un angle de 59°. 4'. 12". La ligne qui divise les angles en deux parties égales est parallèle à la direction du clivage oblique découvert par M. de Bournon; et elle forme avec les arêtes des prismes un angle d'environ 130°.

ADDITION.

Je suis heureux de pouvoir terminer ce Mémoire en annonçant une découverte remarquable faite récemment par M. Herschell fils; c'est que, dans les cristaux qui ont deux axes de double réfraction, la position de ces axes et leur inclinaison sont en général différentes pour les rayons inégalement réfrangibles. Cette différence est fort petite pour le plus grand nombre d'entre eux; mais, dans quelques-uns, elle devient très-considérable, de sorte qu'on doit désormais en tenir compte en général comme d'un élément essentiel de la double réfraction. M. Herschell a reconnu que, quelle que soit la dispersion des axes, ils sont tous constamment compris dans un même plan; et en étudiant, par des moyens très-précis, la configuration des anneaux qui en résultent avec la lumière polarisée, il a trouvé qu'elle était exactement conforme aux règles de la polarisation alternative et à la loi des sinus que je lui avais communiquée antérieurement. Le travail de M. Herschell renferme encore plusieurs autres résultats importants sur les propriétés de la lumière polarisée; mais je dois me borner ici à mentionner les précédents comme offrant, dans le fait jusqu'ici non soupçonné de la dispersion des axes, une épreuve inattendue de la loi des vitesses que j'ai donnée dans ce Mémoire, et en même temps une particularité physique qui complète la théorie de la double réfraction. *(Note ajoutée pendant l'impression du Mémoire.)*

ERRATA.

Pag. 182, ligne 9 en remontant : et; *lisez :* ou.
Pag. 204, ligne 13 : AX; *lisez :* AZ.
Pag. 258, ligne 5 en remontant : R*rn*, *lisez :* R*in*; R*r*, lisez : *Ri*.
Pag. 273, ligne 8 en remontant : $\frac{NO}{NI}$; *lisez :* $\frac{NI}{NO}$.
Pag. 309, ligne 4 : AB; *lisez :* CD.
Pag. 314, ligne 13 : AI, A*i*; *lisez :* CI, C*i*.
Pag. 332, ligne 11 en remontant : 23; *lisez :* 33.
Pag. 335, ligne 11 en remontant : parallèle; *lisez :* perpendiculaire.
Pag. 335, ligne 4 en remontant : second; *lisez :* premier.
Pag. 320, ligne 5 en remontant : ordinaire; *lisez :* extraordinaire.

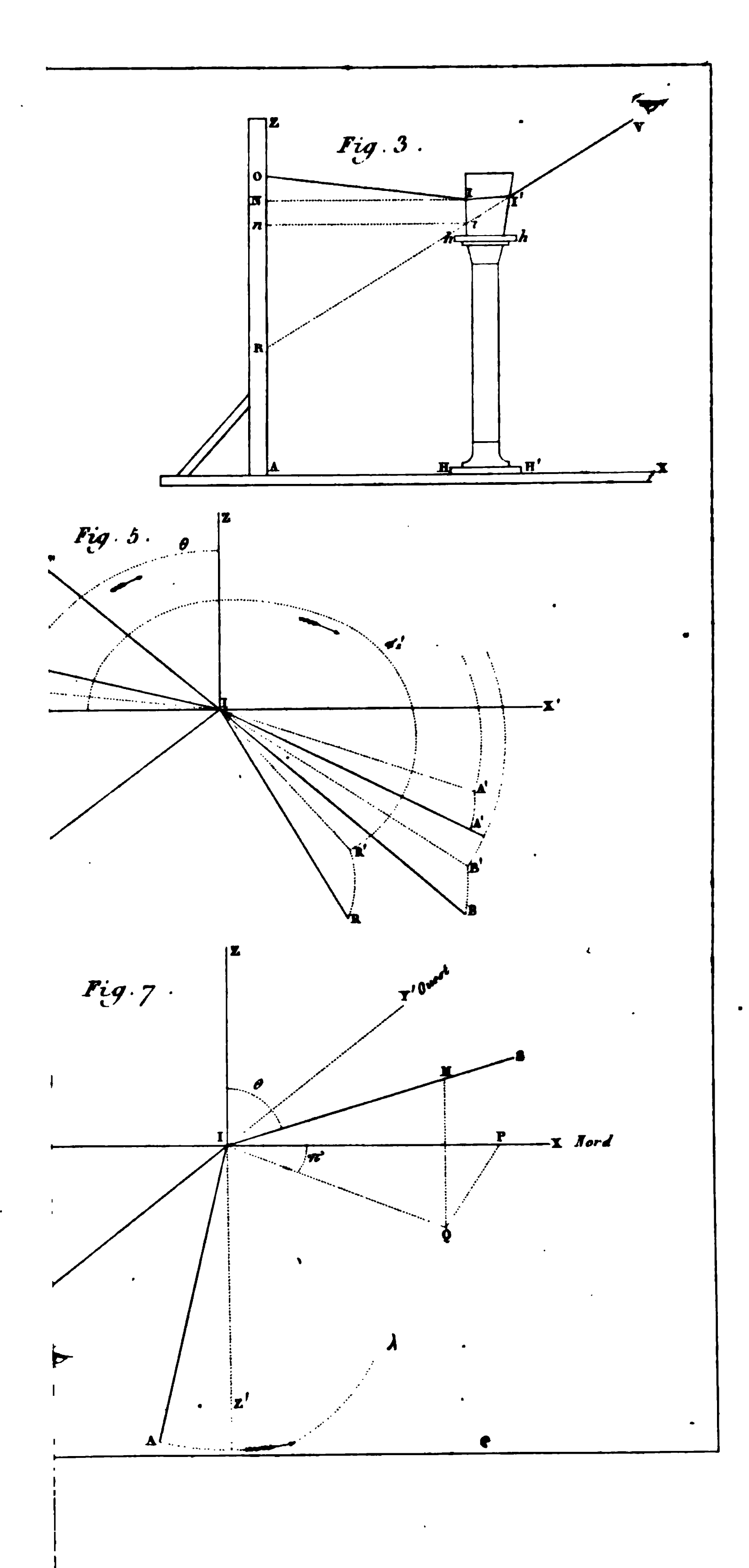


Fig. 3.
Z
O
N
n
R
A
I
I'
i
h
h
H
H'
X
V
Fig. 5.
Z
θ
X'
I
A'
A'
R'
B'
R
B
Fig. 7.
Z
Y' Ouest
θ
S
M
I
P
X Nord
Q
λ
Z'
A

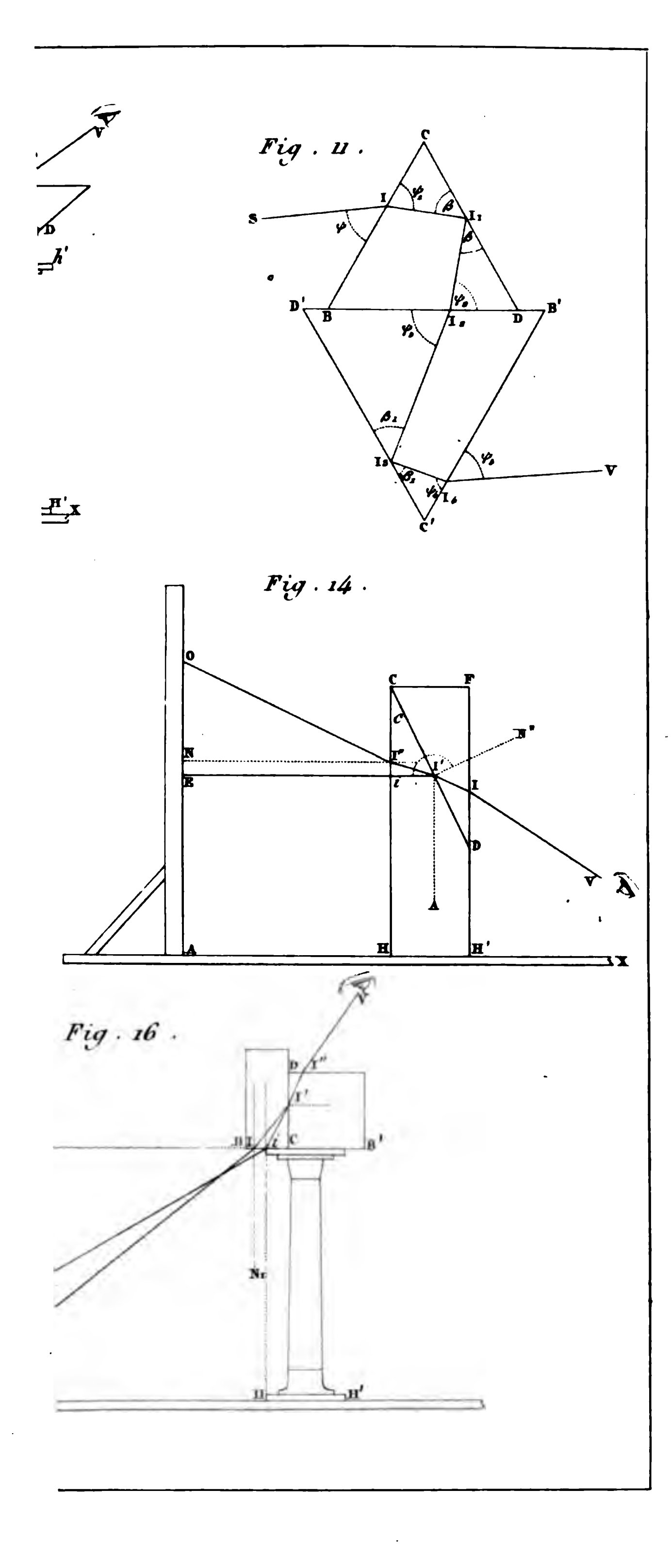
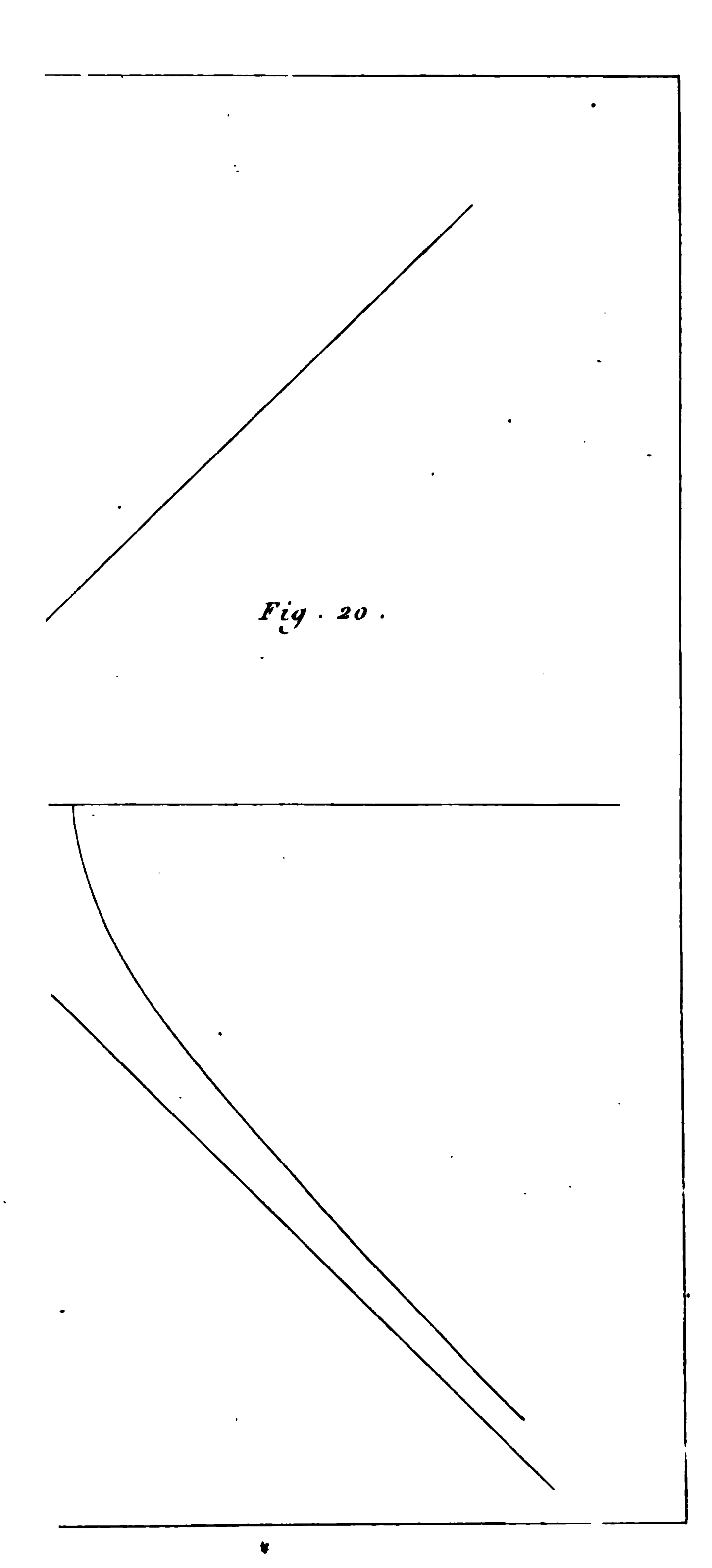
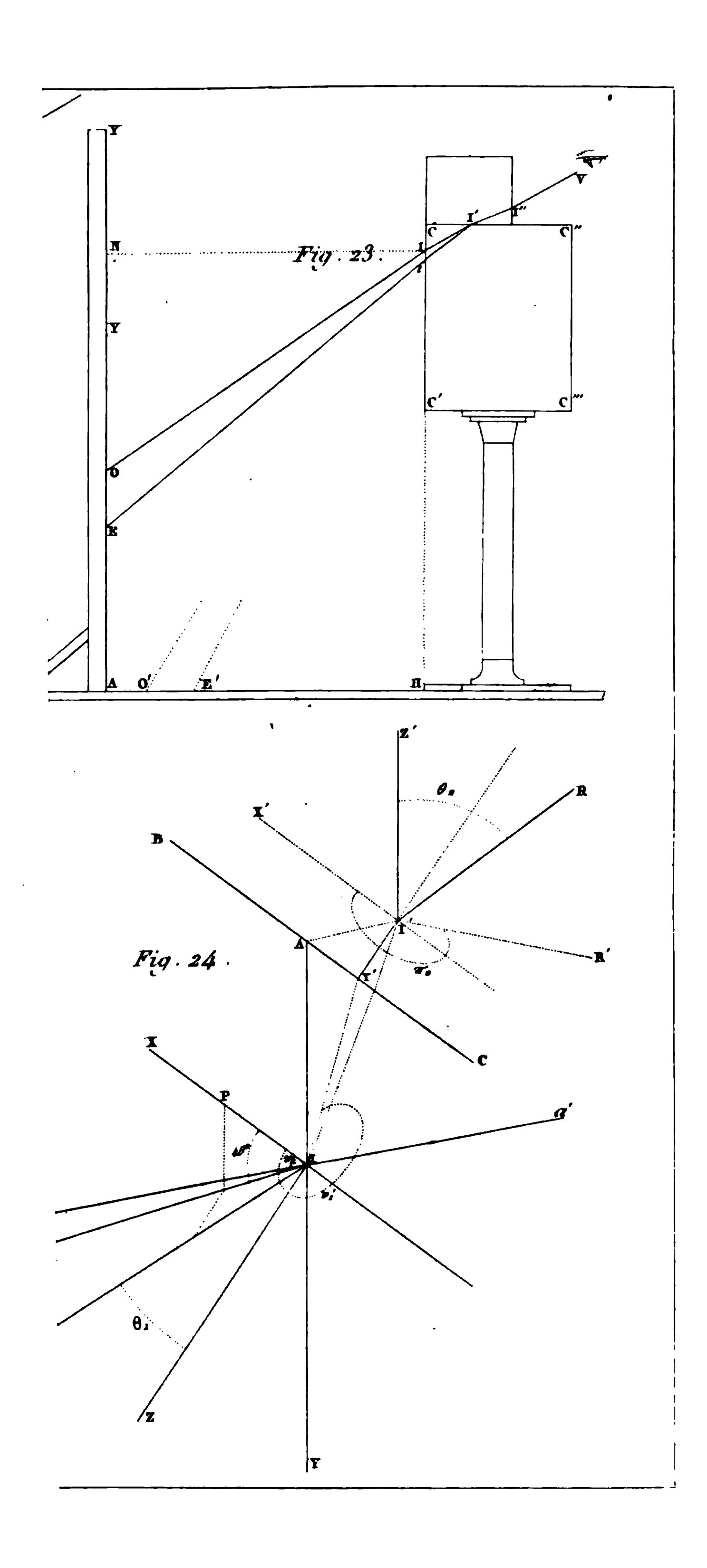


Fig. 11.
C
I
I1
S
D'
B
I2
D
B'
V
C'
Fig. 14.
O
C
F
N
E
I
D
V
A
H
H'
X
Fig. 16.
D
C
B'
H'


Fig. 20.


Fig. 23.
Y
N
Y
O
E
A
O'
E'
H
I
I'
I''
C
C''
C'
C'''
V
Fig. 24.
Z'
θ
R
X'
B
I'
A
Y'
R'
C
X
P
a'
Z
Y
θ

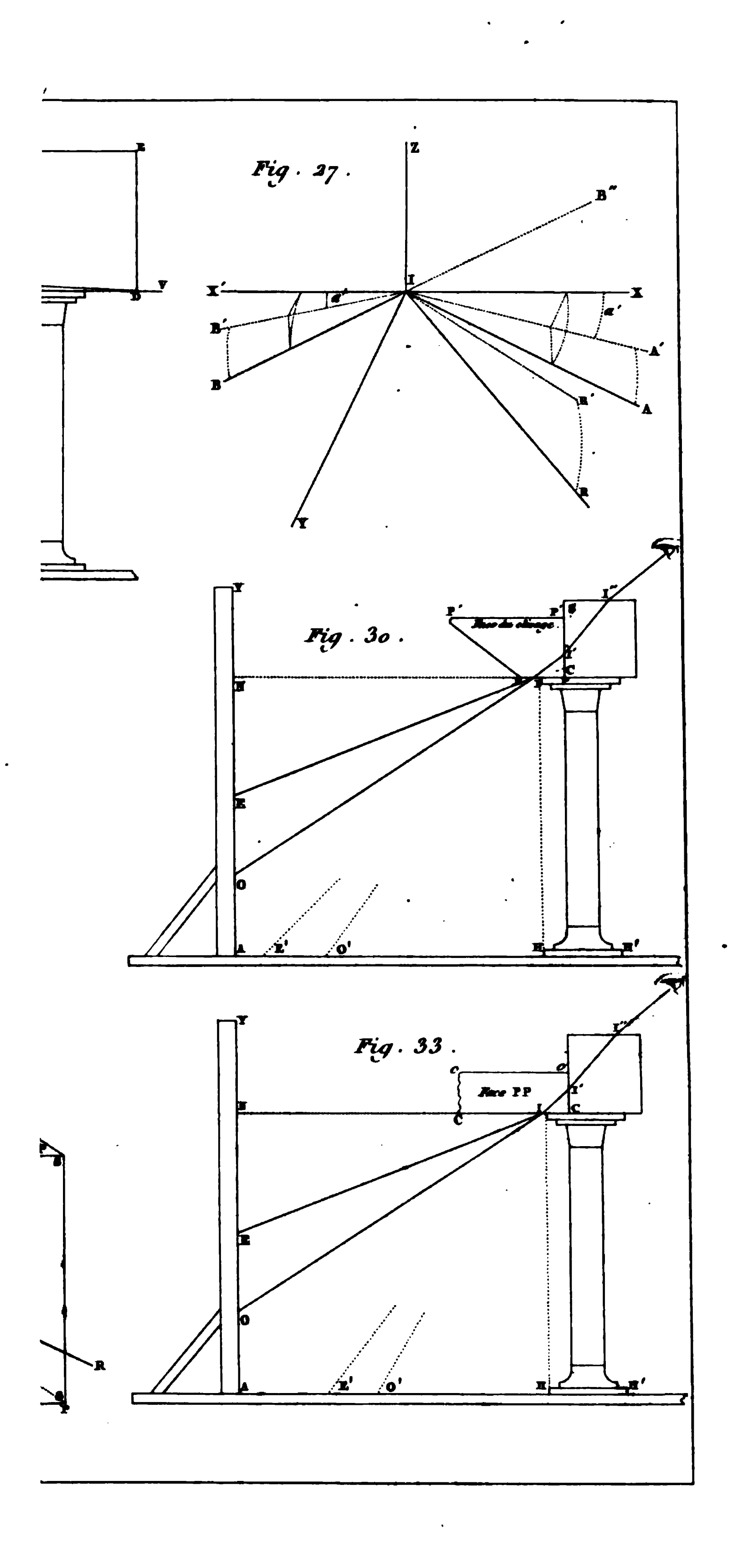

Fig. 27.
Z
B''
X'
I
X
a'
B'
A'
B
A
R'
R
Y
Fig. 30.
Y
P'
P'
I''
H
C
E
O
A
E'
O'
H
H'
Fig. 33.
Y
I'''
Face PP
I'
H
C
I
C
E
O
A
E'
O'
H
H'
R

Fig. 34.

Fig. 36.

Fig. 35.

Fig. 39.

Fig. 37.

Fig. 38.

MÉMOIRE

Sur la combinaison de l'oxigène avec l'eau, et sur les propriétés extraordinaires que possède l'eau oxigénée;

PAR M. THÉNARD.

Lu à l'Académie royale des Sciences.

---

1. J'AI déja fait conaître, dans les Annales de chimie et de physique, tom. 8, 9, 10 et 11, les principaux phénomènes dont je vais parler; mais comme je n'en ai, pour ainsi dire, annoncé que l'existence, je crois qu'il est nécessaire de les exposer avec tout le soin possible, et d'y joindre les nouvelles observations que j'ai faites : tel est l'objet de ce Mémoire.

Le sujet que je traite est tout neuf; car, par eau oxigénée, je n'entends point désigner la dissolution du gaz oxigène dans l'eau; je désigne, provisoirement, par cette expression, une toute autre combinaison, dont, jusqu'à-présent l'on n'a point observé d'analogue, en la considérant du moins sous le rapport des propriétés qui la caractérisent.

Je suivrai la marche qui me paraît la plus simple : je décrirai d'abord la préparation de l'eau oxigénée; je m'occuperai en second lieu de son analyse; après quoi, je traiterai de ses propriétés et de celles des nouveaux produits qu'elle forme

de grès, parce que celle-ci contient trop d'oxide de manganèse : l'on doit se servir d'une cornue de porcelaine bien blanche. L'opération peut avoir lieu sur deux kilogrammes à deux kilogrammes et demi de nitrate à-la-fois; elle dure environ trois heures, ou plutôt n'est terminée que quand à une haute température il ne se dégage plus d'oxigène; ce qu'il est facile de reconnaître en introduisant une allumette dans le col de la cornue. La baryte qui en provient est à la vérité unie à une quantité assez forte de silice et d'alumine; mais du moins il ne s'y trouve que des traces d'oxide de manganèse, et c'est un point essentiel; car cet oxide possède, comme on le verra par la suite, la propriété de chasser avec une grande énergie l'oxigène de l'eau oxigénée.

5. La baryte réduite promptement, au moyen d'un couteau, en morceaux de la grosseur de l'extrémité du pouce, est placée ensuite dans un tube de verre luté. Ce tube peut être assez long et d'un diamètre assez large pour contenir un kilogramme de matière; on l'entoure de feu, de manière à le faire rougir légèrement, et l'on y fait arriver un courant de gaz oxigène, que l'on fait passer au travers de fragments de chaux vive, afin de le dessécher. Quelque rapide que soit le courant, le gaz est complètement absorbé, si bien que, quand il se dégage par le petit tube, qui doit faire suite à celui qui contient la base, l'on peut en conclure, que le deutoxide de Barium est fait : il est bon pourtant de soutenir encore le courant pendant douze à quinze minutes. Le tube étant en grande partie refroidi, on en retire le deutoxide et on le conserve dans un flacon bouché.

Son caractère distinctif est de se déliter par quelques gouttes d'eau, sans s'échauffer. Sa couleur est le blanc-gris;

il a pour objet de séparer l'acide hydrochlorique et de le remplacer par de l'acide sulfurique. Celle de la baryte ne l'est pas moins; cette base s'empare de tout l'acide sulfurique et le sépare de la liqueur. L'on voit donc que, si l'opération était faite avec des matières pures, et employées en proportion convenable, on n'aurait en dernier résultat que de l'eau plus ou moins oxigénée. Mais il est difficile, pour ne pas dire impossible, de se procurer du deutoxide de Barium parfaitement pur : de-là la nécessité de prendre beaucoup de précautions, sans lesquelles on ne réussirait qu'imparfaitement. Pour n'en omettre aucune, je vais décrire le procédé dans le plus grand détail.

3. L'on doit commencer par se procurer du nitrate de baryte, exempt de toutes matières étrangères : le plus sûr moyen d'y parvenir, est de dissoudre le nitrate dans l'eau, d'y ajouter un petit excès d'eau de baryte, de filtrer la liqueur et de la faire cristalliser dans des vases de platine, d'argent, ou de porcelaine. Ce procédé de purification offre même un avantage, c'est de pouvoir traiter le sulfure de baryte par l'eau et l'acide nitrique, dans une chaudière de fonte, et d'obtenir promptement le nitrate impur. A cet effet, l'on verse un petit excès d'acide sur le sulfure, en brûlant à la manière ordinaire le gaz hydrogène sulfuré qui se dégage, on porte la liqueur à l'ébullition, on la filtre et on l'évapore jusqu'à siccité dans la chaudière même. Le nitrate ainsi obtenu est chargé d'oxide de fer ; mais cela ne fait rien, puisque la baryte le précipite tout entier.

4. L'orsqu'on s'est procuré du nitrate bien pur, il faut le décomposer par la chaleur, pour en extraire la baryte. Cette décomposition ne doit point être faite dans une cornue

12 grammes de deutoxide; on les humecte à peine, et on les broie successivement dans un mortier d'agate ou de verre. A mesure qu'ils sont réduits en pâte fine, on les enlève avec un couteau de buis, et on les verse dans la liqueur: bientôt ils s'y dissolvent sans effervescence, sur-tout par l'agitation. Lorsque la dissolution est opérée, tout en la remuant avec une baguette de verre, l'on y fait tomber de l'acide sulfurique pur et concentré, goutte à goutte, jusqu'à ce qu'il y en ait un léger excès, lequel se manifeste par la propriété qu'a le sulfate de baryte qui se forme tout à coup, de se déposer facilement en flocons. Alors on dissout, comme la première fois, une nouvelle quantité de deutoxide dans la liqueur, et de nouveau on en précipite la baryte par l'acide sulfurique. Le deutoxide est toujours facile à distinguer du sulfate.

Il est important de mettre assez d'acide sulfurique pour précipiter toute la baryte, et de ne pas en mettre trop: si l'on n'en mettait pas assez, la liqueur filtrerait trouble et lentement; si l'on en mettait trop, la filtration se ferait aussi très-mal. En atteignant le point convenable que nous venons d'indiquer, la filtration se fait avec la plus grande facilité. Lorsqu'elle est faite, il faut verser sur le filtre une petite quantité d'eau distillée que l'on réunit à la liqueur primitive: de cette manière, celle-ci ne change pas sensiblement de volume; puis, pour ne rien perdre, il est nécessaire d'étendre le filtre égoutté sur un plan de verre, d'enlever la matière, de la délayer dans une nouvelle quantité d'eau toujours très-petite, et de filtrer le tout. Les eaux que l'on obtiendra ainsi seront peu chargées: l'on s'en servira pour laver les filtres suivants.

Cette opération étant terminée, l'on en fait une toute semblable, c'est-à-dire que l'on dissout du deutoxide de Barium dans la liqueur, qu'on y ajoute de l'acide sulfurique pour en précipiter la baryte, etc., et que l'on ne filtre qu'après avoir fait deux dissolutions et deux précipitations. C'est sur le nouveau filtre que l'on verse les eaux de lavage de l'opération précédente : après quoi l'on en obtient de nouvelles avec la matière de ce filtre égoutté, ou plutôt on le comprime dans un double linge d'un tissu bien serré.

La seconde opération est suivie d'une troisième, la troisième d'une quatrième, et ainsi de suite, jusqu'à ce que la liqueur soit assez chargée d'oxigène.

En employant la quantité d'acide hydrochlorique indiquée, l'on peut traiter environ 90 à 100 grammes de deutoxide de Barium : il en résulte une liqueur chargée de vingt-cinq à trente fois son volume d'oxigène. Si l'on voulait l'oxigéner davantage, il faudrait y ajouter de l'acide hydrochlorique.

Plusieurs fois je suis parvenu, par ce moyen, à charger la liqueur de 125 volumes d'oxigène : seulement je l'acidifiais assez tout de suite, pour pouvoir y dissoudre trente grammes de deutoxide, en ayant soin d'ailleurs de maintenir l'acidité à tel point qu'à la suite de l'opération je pouvais encore dissoudre une vingtaine de grammes de deutoxide sans l'intermède de l'acide sulfurique; mais j'ai reconnu que, quand la liqueur renfermait à-peu-près cinquante volumes d'oxigène, elle laissait dégager assez de gaz, du jour au lendemain, pour qu'il n'y eût point d'avantage à continuer de l'oxigéner par le deutoxide.

7. Lorsque la liqueur est oxigénée au point que l'on désire, on la sursature du deutoxide en la tenant toujours

dans la glace. Bientôt il s'en sépare d'abondants flocons de silice et d'alumine, ordinairement colorés en jaune par un peu d'oxide de fer et d'oxide de manganèse. Le tout doit être promptement jeté sur une toile; on y enveloppe la matière et on finit par l'y comprimer fortement. Cette opération ne peut être bien faite qu'à deux; il faut l'exécuter en peu de temps; car, quoiqu'il n'y ait que peu d'oxide de manganèse, il suffit pour produire un dégagement assez considérable d'oxigène.

8. Comme, dans la liqueur filtrée à travers la toile, il serait possible qu'il restât encore un peu de silice, d'oxide de fer, d'oxide de manganèse, et qu'il est nécessaire de précipiter toutes ces matières, on reprend la liqueur et on y ajoute, en l'agitant, toujours entourée de glace, de l'eau de baryte goutte à goutte. Si, la baryte étant en excès légèrement sensible au papier de curcuma, il ne se produit point de précipité, c'est une preuve que tout l'oxide de fer et tout l'oxide de manganèse sont séparés. S'ils ne l'avaient point été complètement dans l'opération précédente, ils le seraient dans celle-ci.

A peine le seraient-ils, qu'il faudrait tout de suite verser la liqueur sur plusieurs filtres (deux ou trois): l'oxide de manganèse en dégage tant de gaz, qu'on ne saurait l'isoler trop vîte. Quelquefois même l'on est obligé d'employer des filtres doubles, parceque le gaz soulevant les fibres du papier, déchire ceux qui sont simples. Quelquefois aussi, pour éviter les pertes, il faut remettre sur un autre filtre les petites portions de liqueur qui restent sur les filtres primitivement employés. D'ailleurs tous les filtres doivent être comprimés dans une toile pour les égoutter. Ceux qui contiennent des

quantités notables d'oxide de manganèse s'échauffent au point de brûler la main.

9. La liqueur ne contenant plus que de l'acide hydrochlorique, de la baryte, de l'eau et de l'oxigène, est remise dans le même vase, et maintenue à zéro, comme à l'ordinaire, par de la glace. L'on en précipite d'abord toute la baryte par un petit excès d'acide sulfurique; puis, après l'avoir filtrée et entourée de nouveau de glace, l'on y verse peu-à-peu, en l'agitant, du sulfate d'argent pur, que l'on se procure au moyen de l'oxide d'argent et de l'acide sulfurique. Il est indispensable que ce sel ne contienne point d'oxide libre. Il est décomposé par l'acide hydrochlorique; et de cette décomposition résulte de l'eau, du chlorure d'argent, qui se précipite, et de l'acide sulfurique, qui remplace l'acide hydrochlorique. Quand la quantité de sulfate d'argent est assez grande pour que la décomposition de l'acide hydrochlorique soit complète, la liqueur devient limpide tout-à-coup : jusque-là, elle reste trouble. S'il faut qu'il n'y reste point d'acide hydrochlorique, il est nécessaire aussi qu'elle ne contienne point un excès de sulfate d'argent : on l'éprouvera donc successivement par le nitrate d'argent et par l'acide muriatique : ces épreuves se font en mettant un peu de ces réactifs dans des tubes, et y ajoutant une goutte de la liqueur.

Dès que la liqueur est bien préparée, on la jette sur un filtre qu'on laisse égoutter et que l'on comprime dans une toile. Le liquide provenant de la compression est versé sur un nouveau filtre, parce qu'il est un peu trouble.

Peut-être trouvera-t-on extraordinaire qu'au lieu de traiter la liqueur par le sulfate d'argent, on ne la traite pas tout de suite par l'oxide d'argent : c'est qu'en se servant de cet oxide,

il est impossible d'obtenir de l'eau oxigénée. En effet, que l'on mette peu-à-peu de l'oxide d'argent dans la liqueur, et qu'on l'emploie même de manière que l'acide hydrochlorique soit complètement détruit, sans que pour cela il y ait excès d'oxide, l'on verra que, chaque fois que l'on ajoutera une portion de celui-ci, il se produira une efferverscence très-sensible, et qu'en dernier résultat la liqueur filtrée ne retiendra pas d'oxigène.

10. Les opérations précédentes ont eu pour objet d'obtenir une liqueur composée d'eau, d'oxigène, et d'acide sulfurique. Il faut actuellement en séparer cet acide : à cet effet, on la verse dans un mortier de verre entouré de glace, et l'on y ajoute peu-à-peu de la baryte éteinte, bien délitée et réduite en poudre fine, ou plutôt de la baryte cristallisée, desséchée par l'acide sulfurique dans le vide et bien broyée; on la broie de nouveau dans le mortier de verre; et lorsqu'on juge qu'elle est unie à l'acide, on en ajoute une autre partie, etc. Enfin, lorsque la liqueur fait à peine virer au rouge le papier de tournesol, on la filtre; on comprime le filtre dans une toile; puis, après avoir réuni les deux liqueurs, on les agite, et l'on en achève en même temps la saturation par de l'eau de baryte.

Il faut même verser un très-petit excès d'eau de baryte, pour achever de séparer des traces de fer et sur-tout de manganèse que la liqueur pourrait encore contenir; bien entendu que la filtration devra être faite aussitôt après, en prenant les précautions précédemment indiquées. L'excès de baryte sera ensuite précipité par quelques gouttes d'acide sulfurique faible, et l'on s'arrangera de manière que la liqueur contienne plutôt un peu d'acide qu'un peu de base :

celle-ci tend à dégager l'oxigène, tandis que l'acide rend la combinaison plus stable.

11. Enfin l'on mettra dans un verre à pied bien propre la liqueur très-claire, qui devra être regardée comme de l'eau oxigénée étendue d'eau pure; le verre sera placé dans une large capsule aux deux tiers pleine d'acide sulfurique concentré : l'appareil sera introduit sous la cloche pneumatique, et l'on fera le vide. L'eau pure, ayant beaucoup plus de tension que l'eau oxigénée, se vaporisera bien plus rapidement; de telle sorte, par exemple, qu'au bout de deux jours, la liqueur contiendra peut-être deux cent cinquante fois son volume d'oxigène. Les observations suivantes ne doivent point être négligées.

Il faut agiter l'acide de temps en temps.

Il arrive quelquefois que, sur la fin de l'évaporation, la liqueur laisse dégager un peu de gaz; ce dégagement, qui fait monter le mercure dans l'éprouvette, est dû sans doute à des traces de matière étrangère qui reste dans la liqueur : on l'arrête par l'addition de deux à trois gouttes d'acide sulfurique extrêmement faible.

Quelquefois aussi la liqueur laisse déposer quelques flocons blanchâtres de silice; il est bon de les séparer; la décantation au moyen d'une pipette très-pointue, réussit bien : on perd à peine de la liqueur.

Tant que la liqueur n'est pas très-concentrée, l'évaporation a lieu tranquillement; mais lorsque l'eau oxigénée ne contient presque plus d'eau, il se produit souvent des bulles qui ne crèvent que difficilement. Au premier coup-d'œil, on croirait qu'il se dégage beaucoup de gaz oxigène : en examinant l'éprouvette, on verra qu'il n'en est rien. A peine

montera-t-elle sensiblement dans l'espace de vingt-quatre heures; et encore cette ascension proviendra d'une petite quantité de gaz dégagé de l'acide sulfurique et appartenant à une portion d'eau oxigénée vaporisée.

On reconnaît que la liqueur est concentrée le plus possible, lorsqu'elle donne 475 fois son volume de gaz, sous la pression de $0^{m}.76$ et à la température de 14°. A cette époque, en effet, elle ne se concentre plus, quel que soit le temps qu'on la tienne dans le vide. L'épreuve s'en fait promptement en prenant une très-petite pipette dont la tige est marquée d'un trait de lime et étranglée en ce point, la remplissant de liqueur jusqu'au trait, étendant de douze volumes d'eau cette liqueur qui, dans mes expériences, était toujours de 5 centièmes de centilitre, et décomposant par l'oxide de manganèse une quantité déterminée de cette même liqueur ainsi étendue. Cette dernière expérience consiste à prendre un tube de verre fermé à la lampe par un bout, long de 40 à 45 centimètres, large de 15 à 18 millimètres; à le remplir de mercure à 12 millimètres près; à le renverser, à y introduire la portion de liqueur étendue sur laquelle l'analyse doit être faite, en se servant, pour cela, d'une pipette plus grande que la première, et dont la capacité bien connue sera d'environ 11 centièmes de centilitre; à remplir ensuite exactement le tube avec de l'eau qui servira à laver la pipette même, ou bien en partie avec du mercure; à boucher le tube avec un obturateur enduit de suif, à le retourner, et à y faire passer un peu d'oxide de manganèse délayé dans l'eau. L'oxigène se dégagera à l'instant. Il ne s'agira plus ensuite que de fermer le tube avec la main, de l'agiter en divers sens, pour multiplier les points de contact entre la liqueur et l'oxide, et de mesurer le gaz. Nous ne devons

point rechercher ici comment l'oxide de manganèse peut dégager l'oxigène de l'eau oxigénée; qu'il suffise de savoir qu'il le dégage tout entier, sans en absorber, et sans abandonner une partie du sien.

12. L'acide hydrochlorique n'est pas le seul acide capable d'agir sur le deutoxide de Barium, de manière à former un sel de baryte et de l'eau oxigénée. Tous les acides qui peuvent dissoudre la baryte possèdent encore cette propriété; mais, comme il n'en est aucun qui attaque le deutoxide de Barium si bien que l'acide hydrochlorique, et que presque tous seraient très-difficiles à séparer complètement de l'eau oxigénée, il s'ensuit que l'acide hydrochlorique doit être employé de préférence.

Outre le deutoxide de Barium, il est aussi d'autres oxides qui, mis en contact avec les acides, produisent de l'eau oxigénée : tels sont les peroxides de *potassium*, de *sodium*, de *strontium*, de *calcium*, et quelques autres encore. Toutefois, il est impossible de s'en servir, non-seulement parce qu'on ne saurait les séparer complètement de la liqueur oxigénée, mais encore parce que leur préparation présente de grandes difficultés.

Ainsi, jusqu'à-présent, le procédé qui vient d'être décrit est le seul qui permette de se procurer une quantité très-notable d'eau oxigénée.

13. L'eau oxigénée, pour être conservée le plus long-temps possible, doit être versée dans un long tube de verre fermé à l'une de ses extrémités; on le bouche par l'autre avec du liége, et on l'entoure de glace. Pourvu qu'on mette les vases à la cave, dans l'été, et qu'on les recouvre d'une cloche, la quantité de glace fondue en un jour est très-petite.

De l'analyse de l'eau oxigénée.

14. Lorsqu'on soumet l'eau oxigénée à l'action de la chaleur, elle se décompose et se transforme en eau et en gaz oxigène pur : de-là le moyen d'en faire l'analyse. Il ne faudrait pas la tenter sur de l'eau saturée d'oxigène. Le dégagement du gaz serait si brusque et si considérable, pour peu qu'on employât de liquide, que l'expérience ne serait pas sans danger. Tous les obstacles disparaissent, au contraire, en étendant l'eau oxigénée d'une certaine quantité d'eau distillée. Voici comment l'opération fut faite.

15. Je pris une petite ampoule bien sèche, à deux pointes, et je la pesai avec une bonne balance; j'y introduisis de l'eau oxigénée pure, en faisant plonger dans celle-ci l'une des pointes de l'ampoule, et aspirant lentement l'air par l'autre. Cela étant fait, je fermai, à la flamme d'une allumette, l'extrémité de la pointe inférieure, et je pesai de nouveau l'ampoule : la différence des deux poids me donna exactement celui de l'eau oxigénée.

16. De l'eau distillée ayant été versée dans un verre, j'y brisai l'extrémité de la pointe inférieure de l'ampoule; l'eau oxigénée ne tarda point à s'écouler. Dès-lors je lavai, par aspiration, l'ampoule elle-même, d'abord avec l'eau du verre, puis avec d'autre eau; ensuite je versai le tout dans un flacon dont le poids m'était connu. Je lavai le verre à plusieurs reprises; je réunis les eaux de lavage à la liqueur, et, pesant le flacon qui était en partie plein, j'en conclus le poids de celle-ci, en retranchant du poids du flacon presque plein celui du flacon vide. Retranchant, après cela, le poids

de l'eau oxigénée du poids total de la liqueur, j'eus celui de l'eau unie à l'eau oxigénée.

17. Après avoir pesé dans une ampoule à deux pointes une certaine quantité de l'eau oxigénée étendue d'eau, en m'y prenant comme je viens de l'indiquer pour l'eau oxigène pure, je fis passer l'ampoule, dont les deux pointes étaient fermées hermétiquement, dans un tube de verre renversé, bouché à son extrémité supérieure et plein de mercure. La longueur de ce tube était d'environ 48 centimètres, et son diamètre intérieur de 2 centimètres. Au moyen d'une longue baguette de verre qui resta dans le tube, je brisai l'ampoule, et tout de suite je chauffai peu-à-peu la liqueur en l'entourant de charbons maintenus à une certaine distance dans une galerie circulaire de fil de fer, qu'un manche, formé de fil de fer lui-même, permettait d'élever ou d'abaisser à volonté. Tout l'oxigène reprit promptement l'état gazeux. Tantôt j'élevais le grillage au-dessus du tube, pour permettre à la vapeur aqueuse de se condenser; et tantôt, au contraire, je l'abaissais pour porter la liqueur à l'ébullition. Je ne cessai de la chauffer qu'à l'époque où non-seulement elle ne laissa plus dégager de gaz, mais encore où je l'eus fait bouillir à plusieurs reprises. Dans quelques expériences (car celle que je viens de décrire a été répétée plusieurs fois), je fis même passer dans le tube, après le refroidissement de la liqueur, un peu d'oxide noir de manganèse délayé dans l'eau, afin de m'assurer si tout l'oxigène était dégagé. Jamais la moindre bulle ne s'est manifestée, d'où il est évident que la chaleur seule suffit pour opérer l'entier dégagement de l'oxigène. Il fallait enfin mesurer le gaz obtenu; c'est ce que je fis à la manière ordi-

naire; j'allai même souvent plus loin, je l'essayai par l'h ydrogène, et je le trouvai constamment pur, à $\frac{1}{3}$ centième près.

18. L'analyse de l'eau oxigénée me semblait si importante, que je crus devoir la faire par un autre procédé que celui que je viens de décrire. Sachant que l'oxide noir de manganèse possédait la propriété de dégager l'oxigène de cette eau sans en absorber et sans en abandonner la plus petite portion, je m'en servis, au lieu de chaleur, pour opérer ce dégagement. Je fis donc l'expérience de la même manière : seulement, lorsque l'ampoule fut brisée, j'introduisis successivement, au haut du tube, quelques gouttes de dissolution de potasse caustique faible, et un peu d'oxide de manganèse délayé dans l'eau; quelque temps après, je fermai le tube avec la main, je l'agitai en divers sens pour multiplier les points de contact entre la liqueur et l'oxide, et je mesurai le gaz. L'addition de la potasse n'a pour objet que de saturer la très-petite quantité d'acide que peut contenir la liqueur oxigénée acide, qui, s'il restait libre, dégagerait un peu d'oxigène de l'oxide de manganèse lui-même (49 et 50).

Je vais actuellement rapporter les résultats auxquels je suis parvenu, avec les données de chaque expérience.

Analyse d'une eau oxigénée, dont la densité était de 1,415.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Poids de l'ampoule de verre, en partie pleine d'eau oxigénée..................................	1$^{gram.}$,571
Poids de la même ampoule vide et sèche....	0 ,421
Donc, poids de l'eau oxigénée.............	1 ,150

Poids du flacon en partie plein de l'eau oxigénée précédente, et de l'eau qui a servi à étendre celle-ci. . 122$^{\text{gram.}}$,603.
Poids du flacon vide et sec . . . . 100 ,529.

Donc, poids de l'eau oxigénée et de l'eau. . . 22$^{\text{gram.}}$,074.
Mais le poids de l'eau oxigénée est de . . . . . . 1 ,150.

Par conséquent, celui de l'eau ajoutée est de. . 20 ,924.

Poids de l'ampoule de verre, en partie pleine d'eau oxigénée étendue d'eau distillée. . . . . 2$^{\text{gram.}}$,121.
Poids de la même ampoule, vide et sèche. . 0 ,307.

Donc, poids de l'eau oxigénée étendue d'eau distillée . . . . 1 ,814.

Gaz dégagé, par la chaleur, des 1$^{\text{gram.}}$,814 d'eau oxigénée étendue d'eau distillée; pression, 76 centimètres; température centigrade, 13°,5 . . . . 3$^{\text{centilitres.}}$

Donc, gaz oxigène contenu à la pression et à la température précédentes, dans les 22$^{\text{gram.}}$,074 d'eau oxigénée étendue d'eau distillée, et par conséquent dans 1$^{\text{gram.}}$,150 d'eau oxigénée pure. 36$^{\text{centil.}}$,506.

Or, 36$^{\text{centil.}}$,506 de gaz oxigène, sous la pression de 76 centimètres et à la température de 13°,5, pèsent. . . 0$^{\text{gram.}}$,498.

Par conséquent, les 1$^{\text{gram.}}$,150 d'eau oxigénée pure sont formés de 0,660 d'eau et de 0,490 d'oxigène.

Mais, dans 0$^{\text{gram.}}$,660 d'eau, il y a 0$^{\text{gram.}}$,582 d'oxigène, en supposant que le poids de l'oxigène soit à celui de l'hydrogène comme 88,29 est à 11,71. Ainsi l'eau oxigénée qu'on

vient d'examiner contiendrait 0gram.,582 d'oxigène naturel, et 0gram.,490 d'oxigène combiné.

SECONDE EXPÉRIENCE.

Cette expérience a été faite sur la même liqueur étendue d'eau que la précédente, mais en se servant d'oxide de manganèse pour dégager l'oxigène.

Poids de l'eau oxigénée étendue d'eau..... 1gram.,014.

Gaz dégagé par l'oxide de manganèse de cette quantité d'eau, sous la pression de 76 centimètres et à la température de 13°,5.......................... 1centil.,690.

Donc, gaz oxigène contenu dans les 22gram.,074 du mélange d'eau oxigénée et d'eau distillée, et par conséquent dans 1gram.,150 d'eau oxigénée pure.............. 36centil.,790.

Dans la première expérience, on a retiré de la même quantité d'eau oxigénée.................. 36centil.,506.

Par conséquent, il n'y a qu'une différence de 0centil.,284, ou $\frac{1}{129}$.

Analyse d'une eau oxigénée dont la densité se trouvait comprise entre 1,415 *et* 1,452.

18 *bis*. L'analyse de cette eau a été faite de même que les précédentes, en employant seulement l'oxide de manganèse. En conséquence, je n'entrerai dans aucun détail sur les opérations que l'on a été obligé de faire pour arriver à des résultats exacts. Je ne rapporterai que les nombres qu'il est indispensable de connaître.

Poids de l'eau oxigénée pure............. 0gram.,947.

Poids de l'eau ajoutée à l'eau oxigénée..... 23 ,564.

Poids du mélange de ces deux quantités d'eau. . 24$^{gram.}$,511.

Poids de la portion de mélange, mise en contact avec l'oxide de manganèse. . . . . 1$^{gram.}$,210.

Gaz oxigène dégagé de cette portion du mélange par l'oxide de manganèse, sous la pression de 0^{m},7647, et à la température de 14° centigrades. . . . . 1$^{centil.}$,55.

Donc, gaz oxigène qui pourrait être dégagé de tout le mélange, et par conséquent des 0$^{gram.}$,947 d'eau oxigénée pure, à la température de 14° centigrades, et sous la pression de 0^{m}7647. . . . . 31$^{centil.}$,398.

Poids de 31$^{centil.}$,398 d'oxigène, sous la pression de 0^{m},7647, et à la température de 14° centigr. . . . . 0$^{gram.}$,424.

Par conséquent, les 0$^{gram.}$,947 d'eau oxigénée pure doivent être regardés comme composés de { oxigène. . 0$^{gram.}$,424. eau pure. 0 ,523.

Mais 0$^{gram.}$,523 d'eau pure contiennent 0$^{gram.}$,462 d'oxigène, dans la supposition où le poids de l'oxigène de l'eau est à celui de l'hydrogène comme 88,29 à 11,71.

L'oxigène ajouté serait donc à l'oxigène constituant de l'eau :: 424 : 462, ou :: 21 à 23 environ.

Analyse d'une eau oxigénée dont la densité était de 1,452.

19. Cette eau est la plus dense, et, par conséquent, la plus chargée d'oxigène que j'aie pu obtenir. En effet, lorsqu'elle pesait 1,452, je la tins encore sous la machine pneumatique pendant deux jours; et au bout de ce temps, elle avait la même densité, quoique son volume fût diminué d'une manière très-sensible. J'en fis l'analyse et par la

chaleur et par l'oxide de manganèse, comme je l'ai dit précédemment.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Poids de l'eau oxigénée pure..............	0$^{gram.}$,864.
Poids de l'eau ajoutée à l'eau oxigénée......	19 ,337.
Poids du mélange de ces deux quantités d'eau.	20 ,201.
Poids de la portion du mélange, soumise à l'analyse..................................	2 ,468.
Gaz oxigène dégagé de cette portion du mélange par la chaleur, sous la pression de 0^{m},7625, et à la température de 14° centigrades..........................	3$^{centil.}$,62.
Donc, gaz oxigène qui pourrait être dégagé de tout le mélange, et par conséquent des 0$^{gram.}$,864 d'eau oxigénée pure, à la température de 14° centigrades, et sous la pression de 0^{m},7625....	29 ,63.
Poids de 29$^{centil.}$,63 d'oxigène, sous la pression de 0^{m},7625, et à la température de 14° centigrades.........	0$^{gram.}$,398.
Par conséquent, les 0$^{gram.}$864 d'eau oxigénée pure doivent être regardés comme composés de.......................... { oxigène...	0 ,398.
eau pure..	0 ,466.

Mais 0$^{gram.}$,466 d'eau pure contiennent 0$^{gram.}$,411 d'oxigène, en admettant que dans l'eau le poids de l'oxigène soit à celui de l'hydrogène comme 88,29 à 11,71.

D'où il suit que dans cette eau oxigénée, la quantité d'oxigène ajouté serait à la quantité d'oxigène constituant de l'eau, à-peu-près comme 40 à 41, c'est-à-dire que ces quantités seraient, pour ainsi dire, égales.

SECONDE EXPÉRIENCE.

L'expérience a été faite sur une portion du mélange d'eau oxigénée et d'eau de l'expérience première.

Poids de la portion du mélange, soumise à l'analyse 1gram.,325

Gaz oxigène dégagé de cette portion du mélange, par l'oxide de manganèse, sous la pression de 0m,7625, et à la température de 14° 1centil.,970

Donc le gaz oxigène qui pourrait être dégagé de tout le mélange, et par conséquent des 0gram.,864 d'eau oxigénée pure de l'expérience précédente, à la température de 14°, et sous la pression de 0m,7625 .... 30centil.,034

Résultat qui s'accorde avec celui de la précédente expérience, à moins de $\frac{1}{74}$.

Ayant répété ces deux expériences, j'ai obtenu des résultats semblables, et un peu plus rapprochés. Je regarde donc ces résultats comme bons.

J'ai admis dans les expériences précédentes que l'eau était formée de 88,29 d'oxigène et de 11,71 d'hydrogène; mais comme MM. Berzelius et Dulong viennent de démontrer qu'elle contenait un peu plus d'oxigène, et que le véritable rapport entre ses deux principes était celui de 88,90 à 11,10, il en résultera un peu plus de différence que je ne l'ai dit, entre la quantité de l'oxigène de l'eau et celle d'oxigène dont elle peut se charger.

19 *bis*. Quoi qu'il en soit, il me semble que, d'après ces analyses et sur-tout celle de l'eau oxigénée, dont la densité est de 1,452, l'on peut conclure que l'eau la plus oxigénée est

en ayant soin de briser la glace et de la comprimer fortement dans un linge : c'était une erreur; la glace même après la compression retient trop d'oxigène pour être abandonnée.

L'une des propriétés physiques du peroxide d'hydrogène que je tenais le plus à bien connaître, c'était sa densité; comme je n'avais que peu de liqueur, je me servis pour cela d'une pipette dont la tige était marquée d'un trait et étranglée en ce point. Après avoir pesé cette pipette bien sèche et un petit vase bien sec lui-même, avec beaucoup de soin, je remplis la pipette de peroxide jusqu'au trait; je mis ensuite la pipette dans le vase, et je fis une nouvelle pesée; puis je retirai le peroxide, je lavai les vases, les fis sécher, remplis la pipette d'eau jusqu'au trait déja indiqué, et pesai le tout de nouveau. Au moyen de ces données, j'avais tout ce qu'il fallait pour connaître la densité du peroxide d'hydrogène : je l'ai trouvée de 1,452. Voici les nombres d'où je l'ai conclue.

Poids des vases et du peroxide d'hydrogène..	93^{gram},127.
Poids des vases et de l'eau distillée..........	91 ,395.
Poids des vases vides et secs................	87 ,562.
Donc, poids du peroxide..................	5 ,565.
Donc, poids d'un même volume d'eau distillée.	3 ,833.

ce qui donne le résultat indiqué.

En répétant l'expérience, je suis tombé sur le même nombre à un demi-millième près.

L'on voit, d'après cela, que le peroxide d'hydrogène est bien plus dense que l'eau. Pour s'en convaincre, il n'est même pas nécessaire d'en prendre la densité; il suffit de le verser

dans l'eau : en effet, quoiqu'il y soit très-soluble, il coule à travers, comme une sorte de sirop.

De l'action de la plupart des corps sur le peroxide d'hydrogène.

21. Parmi les différents corps, les uns sont sans action sur le peroxide d'hydrogène; d'autres le rendent plus stable; d'autres le décomposent en s'appropriant une partie de son oxigène; mais, ce qui est bien digne de remarque, c'est qu'il en est un assez grand nombre qui opèrent la décomposition du peroxide à la température ordinaire, sans s'unir ni à l'eau, ni au gaz oxigène, qui en résultent; quelquefois même cette décomposition se fait en donnant lieu à une sorte de détonation, tant le dégagement du gaz est subit; et alors la température, loin de s'abaisser, comme on aurait pu le croire, puisque l'oxigène passe de l'état liquide à l'état gazeux, s'élève au point qu'il y a production de lumière, c'est-à-dire au moins de 550 à 600°. Quelquefois aussi le corps, tout en décomposant le peroxide, se décompose lui-même. Tel est, par exemple, l'oxide d'argent : à peine est-il en contact avec le peroxide même très-étendu d'eau, qu'il en dégage tout l'oxigène, et qu'il se réduit. Mais n'anticipons point sur l'exposé des phénomènes ; suivons-les avec ordre; et quand nous les aurons décrits, nous verrons s'il est possible d'en assigner la cause.

Action des fluides impondérables.

22. La chaleur décompose promptement le peroxide d'hydrogène ; la décomposition devient d'autant moins

facile, qu'elle est plus avancée. L'eau, à mesure qu'elle se trouve mise en liberté, se combine sans doute avec la portion de peroxide non décomposé, et le rend plus stable. On en jugera par les expériences suivantes.

Que l'on mette du peroxide d'hydrogène dans un petit tube de verre; qu'on l'expose, en plongeant le tube dans l'eau, à une chaleur progressive de 10 à 100°, et l'on verra que la décomposition sera très-sensible à 20°. Elle se ferait avec un bouillonnement des plus considérables, si le peroxide était soumis de suite à 100°, et l'épreuve serait dangereuse à tenter dans un vase à col étroit et sur un demi-gramme de liquide. Néanmoins, en jetant celui-ci sur une plaque incandescente, il ne détone pas.

Que l'on répète cette expérience après avoir étendu d'eau le peroxide, de manière que la liqueur ne contienne que sept à huit fois son volume d'oxigène, le dégagement du gaz ne sera pas sensible, même à 50°; il le deviendra bientôt après, augmentera de plus en plus, et ne tardera point à diminuer et à cesser. Dès-lors la liqueur ne sera plus oxigénée, et, par conséquent, ne produira plus d'effervescence avec l'oxide de manganèse.

Exposé à la lumière diffuse, le peroxide d'hydrogène se comporte, toutes circonstances égales d'ailleurs, de même que dans l'obscurité. Dans les deux cas, il laisse dégager quelques petites bulles de temps à autre, et finit, au bout de quelques mois, à la température ordinaire, par être désoxigéné en grande partie. Cette désoxigénation, qui dépend probablement de plusieurs causes, me semble être produite sur-tout par quelques parcelles de matière que retient le

peroxide. Pour le conserver autant que possible, il faut l'entourer de glace, comme il a été dit (pag. 397).

Traversé par la lumière directe, le peroxide n'éprouve d'altération qu'au bout de quelque temps.

Quand on soumet le peroxide à l'action de la pile, comme on y soumet l'eau ordinairement, il en résulte des effets analogues à ceux que l'on observe avec ce dernier liquide : seulement, le dégagement du gaz oxigène est beaucoup plus considérable. Je dois observer toutefois que je n'ai point recueilli les gaz pour les examiner.

Action des métaux à la température ordinaire.

23. Les métaux tendent en général à décomposer le peroxide d'hydrogène, et à le ramener à l'état de protoxide ou d'eau; je n'en connais que quatre qui ne possèdent point d'une manière sensible cette propriété, le fer, l'étain, l'antimoine, et le tellure. Les plus oxigénables s'oxident et produisent en même temps un dégagement d'oxigène ; les autres, au contraire, conservent leur état métallique, de sorte que tout l'oxigène avec lequel l'eau se combine pour devenir peroxide, est mis en liberté.

Une ténuité extrême dans la matière métallique est une condition indispensable pour une prompte décomposition. Tel métal, qui en poudre très-fine dégagera rapidement l'oxigène du peroxide, n'en opérera que très-lentement le dégagement s'il est en poudre grossière, et à plus forte raison en masse.

Les mêmes phénomènes auraient lieu, quand bien même le peroxide serait étendu d'eau ; seulement ils seraient moins

prononcés et dureraient plus long-temps : c'est ce que l'on va voir dans l'examen que nous allons faire de l'action des métaux sur le peroxide pur et affaibli.

L'on a toujours procédé aux expériences de la même manière. La liqueur a été mise d'abord, avec une pipette, dans un petit tube de verre fermé par un bout; après quoi le métal a été introduit dans le verre avec une carte.

La quantité de peroxide employée dans chaque essai n'était, au plus, que de quelques gouttes; celle de peroxide étendu d'eau était un peu plus grande. On regardait l'action comme terminée, lorsqu'il ne se dégageait plus de gaz: on s'assurait alors, par l'addition d'un peu d'oxide de manganèse, si la liqueur était complètement désoxigénée.

Tous les métaux ont été éprouvés de cette manière, excepté l'urane, le titane, le cerium, le barium, le strontium, le calcium, le lithium, et les métaux des terres, sur lesquels on n'a fait aucun essai.

Des métaux qui décomposent le peroxide d'hydrogène, et qui en dégagent l'oxigène sans s'altérer.

Argent très-divisé (provenant de la décomposition récente du nitrate d'argent par le cuivre), *et peroxide pur.* — Action subite, violente; dégagement de calorique si grand, que le tube de verre devient brûlant; l'argent conserve son état métallique, et tout l'oxigène se dégage à l'instant.

Argent fin divisé, et liqueur ne contenant que neuf fois son volume d'oxigène. — Effervescence subite, vive, point de chaleur sensible; l'argent ne s'oxide pas; l'action se termine assez promptement; tout l'oxigène se dégage.

Le tube ne s'échauffe qu'autant que la liqueur contient au moins trente fois son volume d'oxigène.

Argent précipité de la dissolution de nitrate d'argent par le cuivre, mais dont les parties étaient devenues moins ténues par la dessiccation. — Action beaucoup moins forte sur le peroxide qu'avec l'argent très-divisé des deux expériences qui précèdent.

Argent limé. — Action beaucoup moins forte encore que celle dont nous venons de parler.

Argent en masse. — Action faible, relativement à celle de l'argent divisé.

Platine en poudre fine (extrait de l'hydrochlorate-ammoniaco de platine, calciné avec le sel marin), *et peroxide pur.* — Mêmes phénomènes qu'avec argent; peut-être l'action est-elle encore un peu plus forte. Je n'en conclurai pas, pour cela, que le platine par lui-même agit plus sur le peroxide que l'argent; car, pour que cette conséquence fût juste, il faudrait être certain que la ténuité des parties métalliques, qui a tant d'influence sur l'action, fût la même.

Platine en poudre fine, et liqueur ne contenant que neuf fois son volume d'oxigène. — Mêmes phénomènes qu'avec argent.

Platine limé et platine en masse. — Même action sur le peroxide qu'avec argent limé et argent en masse.

Or très-divisé (provenant de l'hydrochlorate d'or, réduit par le sulfate de fer), *et peroxide pur ou étendu d'eau.* — Mêmes phénomènes qu'avec argent et platine, pourvu que la liqueur ne soit pas sensiblement acide. (Voyez ce que j'ai dit à ce sujet, 36.)

Or limé et or en masse. — Même action sur le peroxide qu'avec argent limé et argent en masse.

Osmium en poussière noire, et peroxide pur. — Action plus violente qu'avec les métaux précédents ; ce qui peut dépendre de ce que le métal était plus divisé : du reste, mêmes phénomènes.

Mêmes phénomènes aussi, peut-être à l'intensité près, entre l'osmium et le peroxide étendu d'eau, qu'entre celui-ci et le platine, l'argent,...

Palladium en poudre (provenant de la calcination de l'hydrochlorate-ammoniaco de palladium (*)), *et peroxide pur.* — Action prompte, très-vive, moins vive cependant que celle du platine, de l'argent, de l'or et de l'osmium : grand dégagement de calorique. Tout l'oxigène est dégagé presque aussitôt que l'action se manifeste; le métal ne paraît pas s'oxider. Si le peroxide était sensiblement acide, il agirait beaucoup moins promptement. (Voyez ce qui est dit à ce sujet, 36 et 37.)

Palladium en poudre, et liqueur ne contenant que neuf volumes d'oxigène. — Mêmes phénomènes qu'avec argent, si ce n'est que le dégagement d'oxigène est un peu moins rapide.

Rhodium en poudre (provenant de la calcination de l'hydrochlorate-ammoniaco de rhodium (*)), *et peroxide pur ou étendu d'eau.* — L'action de ce métal est à-peu-près la même que celle du palladium.

Iridium en poudre (provenant de la calcination de l'hydro-

(*) Cet hydrochlorate m'avait été donné par M. Barruel, chef du laboratoire de l'Ecole-de-Médecine.

forme, en outre, une substance rouge ou briquetée, qui est peut-être un sous-sulfate.

Mercure, et liqueur ne contenant que neuf volumes d'oxigène. — Dégagement très-sensible de gaz, sur-tout quand la liqueur est plutôt alcaline qu'acide; le mercure ne s'oxide pas; une goutte d'un acide très-faible suffit pour arrêter le dégagement.

Cobalt réduit en poudre fine (provenant d'un globule qui, pendant la réduction, s'était vaporisé (*)), *et peroxide pur.* — Effervescence très-sensible, qui se soutient pendant assez long-temps, et qui se termine sans que l'action devienne violente, et sans qu'il se produise sensiblement de chaleur; dégagement de tout l'oxigène en vingt heures, quand la liqueur n'est pas acide; dégagement d'une portion seulement, quand le peroxide contient un peu d'acide sulfurique libre, et formation alors d'une petite quantité de sulfate de cobalt qui rend la liqueur rose.

Cobalt réduit en poudre, et liqueur ne contenant que neuf volumes d'oxigène. — Effervescence assez forte pour soulever en peu de temps toutes les petites particules de métal; dégagement de tout l'oxigène en vingt heures, pourvu que la liqueur ne contienne pas la moindre trace d'acide.

Nickel réduit en poudre avec une lime fine (provenant d'un globule bien fondu (*)), *et peroxide pur.* — Effervescence très-sensible; dégagement de tout l'oxigène en vingt heures; le métal ne s'oxide pas.

(*) Ce métal m'avait été donné par M. Laugier, et avait été extrait de l'oxalate pur.

Nickel réduit en poudre, et liqueur ne contenant que neuf volumes d'oxigène. — Mêmes phénomènes qu'avec cobalt.

Cadmium limé très-fin (*), *et peroxide pur.* — Mêmes phénomènes qu'avec cobalt, si ce n'est que l'action de celui-ci est un peu plus marquée, et que la liqueur dans tous les cas reste incolore.

Cadmium limé très-fin, et liqueur ne contenant que neuf fois son volume d'oxigène. — Effervescence très-sensible, formation d'oxide blanc qui rend la liqueur laiteuse; au bout de vingt heures, plus de dégagement de gaz; cependant la liqueur était encore oxigénée, mais aussi le métal semblait entièrement oxidé.

Il y a donc une différence bien marquée entre l'action du cadmium sur la liqueur concentrée, et celle qu'il exerce sur la liqueur étendue d'eau, puisqu'il conserve son état métallique dans l'une, et qu'il s'oxide dans l'autre.

Cuivre en poudre (précipité du sulfate de cuivre par le fer), *et peroxide pur.* — Action sensible, mais très-lente; ce n'est qu'au bout de plusieurs jours que tout l'oxigène est dégagé.

Cuivre en poudre, et liqueur ne contenant que neuf volumes d'oxigène. — Effervescence très-lente d'abord; elle a augmenté peu-à-peu au point de soulever tout le cuivre; au bout de quinze heures, la liqueur était complètement désoxigénée. Observons que s'il y a eu cette différence entre l'action de la liqueur concentrée et la liqueur affaiblie, c'est que celle-ci contenait peut-être un peu d'alcali, tandis que l'autre contenait des traces d'acide.

(*) Ce cadmium m'avait été remis par M. Gay-Lussac, qui le tenait de M. Stromeyer.

Des métaux qui décomposent le peroxide d'hydrogène en absorbant une partie de son oxigène et dégageant l'autre.

Arsenic en poudre, et peroxide pur. — Action subite des plus violentes; flamme produite par la combustion de l'arsenic qui, en s'acidifiant, empêche que tout l'oxigène ne soit dégagé ou absorbé, du moins instantanément; par conséquent très-grand dégagement de calorique. Lorsque la liqueur est en excès, tout l'arsenic passe à l'état acide et se dissout.

Arsenic en poudre, et liqueur ne contenant que neuf fois son volume d'oxigène. — Point d'effervescence; la liqueur devient acide sur-le-champ : cet acide rendant le peroxide plus stable, il en résulte qu'elle reste long-temps plus ou moins oxigénée.

Molybdène réduit en poudre, et peroxide pur. — Action très-violente; combustion du métal avec lumière; grand dégagement de calorique; production d'un acide très-soluble, dont la saveur est assez forte, et qui colore l'eau en jaune. Tout le molybdène disparaît quand le peroxide est en excès.

Molybdène réduit en poudre, et liqueur ne contenant que neuf volumes d'oxigène. — Effervescence subite assez vive, production d'acide; absorption ou dégagement de tout l'oxigène; au bout de quinze heures, la liqueur était d'un bleu superbe.

Sélénium en poudre (*), *et peroxide pur.* — Action subite et très-violente; grand dégagement de chaleur sans lumière;

(*) Ce métal m'avait été donné par M. Berzélius.

acidification complète du sélénium qui, par ce moyen, se dissout tout-à-coup.

Sélénium, et liqueur ne contenant que neuf fois son volume d'oxigène. — Point de chaleur; à peine voit-on, de temps à autre, quelques bulles se dégager; mais la liqueur s'acidifie en quelques minutes.

Tungstène en poudre (*), *et peroxide pur.* — Action faible d'abord, mais qui va en augmentant, de manière à devenir violente, et à donner lieu, par conséquent, à un grand dégagement de calorique. Au bout de quinze heures, il n'y avait plus dans le tube qu'une matière laiteuse, demi-transparente, d'un vert un peu jaunâtre, qui sans doute était un mélange d'acide tungstique jaune et d'oxide bleu. Du reste, cette matière ne laissait pas dégager la plus petite quantité d'oxigène par l'oxide de manganèse.

Tungstène en poudre, et liqueur ne contenant que neuf volumes d'oxigène. — Dégagement très-sensible d'oxigène : au bout de quinze heures, il n'en restait plus dans la liqueur.

Chrôme réduit en poudre (*), *et peroxide pur.* — Effervescence sensible, mais faible; la liqueur est devenue purpurine en quelques minutes : au bout de quinze heures, elle était verdâtre et n'était plus oxigénée.

Chrôme réduit en poudre, et liqueur ne contenant que neuf volumes d'oxigène. — Effervescence très-faible; liqueur verdâtre au bout de quinze heures, et encore un peu oxigénée.

(*) Ce métal m'avait été donné par M. Vauquelin.

Potassium, et peroxide pur. — Action subite et violente, combustion vive, dégagement d'oxigène et formation d'alcali : l'expérience ne doit être faite que dans un verre à pied, car quelquefois il y a explosion.

Sodium, et peroxide pur. — Mêmes phénomènes qu'avec potassium.

Manganèse, et peroxide pur. — Le métal, sous forme de petits globules, produit une vive effervescence et désoxigène promptement la liqueur : ne pourrait-on pas penser qu'il s'oxide d'abord, et que c'est l'oxide qui chasse l'oxigène? Cependant les globules, au nombre de deux, ne semblaient point altérés. En poudre, il agit bien plus fortement encore; son action devient bientôt violente; il en résulte, en même temps qu'un dégagement d'oxigène, un grand dégagement de calorique.

Manganèse, et liqueur ne contenant que neuf fois son volume d'oxigène. — Effervescence subite, vive; point de chaleur; désoxigénation complète de la liqueur en peu de temps.

Zinc limé très-fin, et peroxide pur. — Action faible; il se dégage un peu de gaz, en même temps que le métal s'oxide sensiblement : ce n'est que bien long-temps après le contact que la liqueur est désoxigénée.

Zinc limé très-fin, et liqueur ne contenant que neuf volumes d'oxigène. — Dégagement sensible de gaz oxigène, en même temps qu'il se forme de l'oxide de zinc : il a fallu plus de quinze heures pour désoxigéner complètement la liqueur.

Des métaux qui sont sans action sur le peroxide d'h drogène concentré ou étendu d'eau.

Quatre sont dans ce cas : le fer, l'étain, l'antimoine, lure; à la vérité, ils dégagent d'abord quelques bull bientôt le dégagement s'arrête.

Le fer dont je me suis servi provenait de fil l'étain, de la liqueur fumante de Libavius; l'an beurre d'antimoine; et le tellure m'avait ét M. Vauquelin.

Action des combustibles simples, solid liques, sur le peroxide d'hy

24. *Soufre, et peroxide pur ou éter* paraît être sans action sur le peroxi de gaz et il ne s'acidifie pas : la li d'altération que si elle était con de verre.

Phosphore en poudre, et p vescence sensible; au bout d liqueur, on trouva qu'elle manganèse en dégageait ir d'oxigène.

Phosphore en poudr fois son volume d'oxi dans le tube, on a bouché et luté ave tait pas d'air : il gaz; au bout d

mais encore très-chargée d'oxigène ; ce n'est qu'au bout de cinq à six jours qu'elle a été complètement désoxigénée.

Le phosphore décompose donc le peroxide en s'acidifiant lentement.

Iode, et peroxide pur. — Dégagement très-sensible de gaz ; formation lente d'acide iodique ; désoxigénation complète de la liqueur, mais seulement au bout de vingt-quatre heures.

Iode, et liqueur ne contenant que neuf fois son volume d'oxigène. — Action insensible ; à peine l'iode se recouvre-t-il de petites bulles ; il ne se forme point d'acide iodique : aussi, après six jours, la liqueur faisait-elle avec l'oxide de manganèse une effervescence presque aussi vive que si elle eût été conservée seule dans un tube de verre.

Charbon de bois en poudre fine, et peroxide pur. — Action subite et très-vive ; production de chaleur assez grande ; dégagement de tout l'oxigène sans qu'il se forme d'acide carbonique.

Charbon de bois en poudre fine, et liqueur ne contenant que neuf fois son volume d'oxigène. — Effervescence assez vive sans chaleur ; tout l'oxigène se dégage encore sans qu'il se produise d'acide carbonique : en effet, que l'on fasse passer une certaine quantité de liqueur dans un tube renversé, plein de mercure ; qu'on y introduise ensuite du charbon bien pulvérisé, et l'on verra d'une part que le gaz qui se dégagera promptement de la liqueur ne sera que de l'oxigène, et de l'autre qu'elle se désoxigénera en très-peu de temps (*).

(*) Le charbon de bois calciné ou non calciné, avant de s'en servir,

Charbon très-compacte, provenant d'une huile qui, dans la production du gaz hydrogène carboné pour l'éclairage, tombait goutte à goutte sur des plaques de fonte incandescentes. — Ce charbon, bien réduit en poudre, agit tout aussi bien que le précédent : quand il n'est pas bien pulvérisé, son action est presque nulle.

Noir de fumée. — Point d'action, sans doute parce que la liqueur ne le mouille pas.

Action du peroxide d'hydrogène sur les sulfures métalliques à la température ordinaire.

25. La plupart des sulfures métalliques que j'ai essayés ont une action très-marquée sur le peroxide d'hydrogène : assez souvent même cette action est violente, et accompagnée de beaucoup de chaleur, lorsque la liqueur est concentrée. D'ailleurs, qu'elle soit étendue d'eau ou concentrée, il en résulte presque toujours un sulfate, et un dégagement plus ou moins sensible d'oxigène. Toutes les expériences peuvent être faites comme celles qui ont été décrites (23).

---

agit également bien sur la liqueur, pourvu qu'il soit réduit en poudre fine. Cependant il n'est pas toujours dans le même état. Le charbon calciné est très-bon conducteur du fluide électrique, tandis que la majeure partie du charbon ordinaire bien fait, bien préparé, ne possède point la propriété de le conduire, sans doute parce qu'il retient une assez grande quantité d'hydrogène et d'oxigène. L'on voit donc qu'il ne faudrait pas se servir indistinctement de toute espèce de charbon pour garnir, comme on le fait quelquefois, le pied des paratonnerres; il pourrait en résulter des accidents : le mieux est de n'employer que de la braise.

Sulfure jaune d'arsenic réduit en poudre (orpiment), *et peroxide pur.* — Action subite et violente, dégagement de gaz, chaleur forte, lumière, formation d'acide arsenique et d'un peu d'acide sulfurique, désoxigénation instantanée et complète de la liqueur.

Sulfure jaune d'arsenic en poudre, et liqueur ne contenant que douze fois son volume d'oxigène. — Point d'effervescence, point de lumière, point de chaleur, mais production d'acide arsenique sur-tout, qui s'oppose à la désoxigénation complète de la liqueur : du moins, au bout de quinze heures, l'oxide de manganèse en dégageait de l'oxigène, tandis qu'en prenant la précaution de saturer l'acide de temps en temps, la désoxigénation est achevée en quelques heures.

Sulfure de molybdène naturel, réduit en poudre, et peroxide pur. — Mêmes phénomènes qu'avec le sulfure d'arsenic.

Sulfure de molybdène en poudre, et liqueur contenant douze fois son volume d'oxigène. — Dégagement assez vif d'oxigène, qui se soutient pendant long-temps; formation d'un acide de molybdène et d'acide sulfurique; point de lumière, point de chaleur; une goutte de potasse, au bout de quinze heures, a rendu bleuâtre la liqueur qui était un peu jaune-verdâtre.

Sulfure de cuivre très-divisé (fait avec le sulfate de cuivre et l'hydrogène sulfuré), *et peroxide pur.* — Action subite et violente, accompagnée de beaucoup de chaleur sans lumière; dégagement de gaz oxigène; disparition du sulfure; formation de sulfate; désoxigénation instantanée et complète de la liqueur.

Sulfure de cuivre très-divisé, et liqueur ne contenant que douze fois son volume d'oxigène. — Dégagement de quelques bulles d'abord; formation, en huit à dix minutes, de sulfate, qui colore la liqueur, et qui rend l'effervescence plus sensible.

Sulfure d'antimoine du commerce, reduit en poudre fine, et peroxide pur. — Action vive et violente; grand dégagement de chaleur et de gaz; transformation du sulfure en une poudre blanche, qui donnait à l'eau la propriété de rougir le tournesol : c'était probablement un sulfate. Du reste, désoxigénation complète.

Sulfure d'antimoine en poudre, et liqueur ne contenant que douze fois son volume d'oxigène. — Point d'effervescence sensible, mais production d'acide sulfurique, qui rougissait fortement le papier, et s'opposait au dégagement de tout l'oxigène : peut-être s'est-il formé aussi un peu d'oxide d'antimoine.

Sulfure de plomb très-divisé (provenant de la décomposition de l'acétate de plomb par l'hydrogène sulfuré), *et peroxide pur.* — Action subite et très-vive, grand dégagement de chaleur et de gaz; formation de sulfate de plomb; désoxigénation complète de la liqueur.

Sulfure de plomb très-divisé, et liqueur ne contenant que douze fois son volume d'oxigène. — Effervescence vive; transformation du sulfure en sulfate; désoxigénation complète de la liqueur en très-peu de temps.

Galène à grandes facettes, réduite en poudre très-fine. — Son action est à-peu-près la même que celle du sulfure précédent.

Pyrite de fer réduite en poudre fine, et peroxide pur ou étendu d'eau. — Mêmes phénomènes à-peu-près qu'avec sulfure de plomb.

Sulfure de platine très-divisé (provenant de la décomposition de l'hydrochlorate de platine par l'hydrogène sulfuré), *et peroxide pur.* — Action très-vive, grand dégagement de gaz oxigène et de chaleur; point de traces d'acide sulfurique.

Sulfure de platine, et peroxide étendu d'eau. — Effervescence vive; désoxigénation complète de la liqueur en peu de temps, sans qu'il se forme d'acide sulfurique.

Sulfure de platine fait avec muriate-ammoniaco de platine et soufre dans une cornue de verre. — Même résultat qu'avec le sulfure précédent.

Sulfure de bismuth, artificiel, réduit en poudre fine, et peroxide pur. — Point de dégagement de gaz; action lente. Le sulfure ne se transforme que peu-à-peu en sulfate d'un blanc jaunâtre; ce sulfate donne à l'eau la propriété de rougir fortement le tournesol.

Sulfure de bismuth en poudre fine, et liqueur ne contenant que douze fois son volume d'oxigène. — Action lente; quelques bulles de temps à autre; formation d'acide sulfurique qui s'est opposé à la désoxigénation complète de la liqueur : peut-être s'est-il formé aussi un peu d'oxide de bismuth.

Deutosulfure d'étain (provenant de l'or mussif lavé), et *peroxide pur.* — Point de dégagement de gaz ; formation lente d'acide sulfurique, lequel empêche que la liqueur ne soit complètement décomposée.

Deutosulfure d'étain, et liqueur contenant douze fois son

volume d'oxigène. — Même résultat qu'avec la liqueur concentrée.

Protosulfure d'étain en poudre, et peroxide pur ou étendu d'eau. — Action presque insensible; il se forme cependant un peu d'acide sulfurique.

Sulfure d'or (provenant de la décomposition de l'hydrochlorate d'or par l'hydrogène sulfuré), *et peroxide pur ou étendu d'eau.* — Action bien faible. Le sulfure commence par dégager un peu de gaz; une très-petite portion de soufre s'acidifie ensuite, et dès-lors la décomposition s'arrête complètement.

Sulfure d'argent très-divisé (provenant de la décomposition du nitrate d'argent par l'hydrogène sulfuré), *et peroxide pur ou étendu d'eau.* — Point d'action, même dans l'espace de trente heures, quoique l'argent, radical du sulfure, en ait une très-grande sur la liqueur.

Cinnabre pulvérisé. — Pas plus d'action sur le peroxide que le sulfure d'argent; au bout de trente heures, la liqueur était tout aussi oxigénée que si elle eût été conservée dans un tube de verre.

Action du peroxide sur quelques combustibles composés, autres que les sulfures métalliques.

26. *Phosphure de cuivre* (obtenu en faisant passer du phosphore en vapeur sur du cuivre incandescent), *et peroxide pur ou étendu d'eau.* — Formation lente et très-lente de phosphate sans qu'il se dégage de gaz, si ce n'est quelques bulles au commencement de l'expérience. La liqueur s'est

trouvée presque entièrement désoxigénée au bout de trente heures.

Phosphure de soufre. — Si ce phosphure agit sur le peroxide, ce n'est que dans l'espace d'un temps considérable.

Carbure de soufre. — Il en est de ce carbure comme du phosphure qui précède.

Iodure rouge de mercure (obtenu en mêlant ensemble de l'hydriodate de baryte et du sublimé corrosif), *et peroxide pur ou étendu d'eau.* — A peine quelques bulles de gaz. Au bout de quinze heures, la liqueur ne rougissait pas le tournesol, et paraissait être à-peu-près aussi oxigénée qu'une autre portion conservée pour contre-épreuve dans un tube de verre : ainsi point d'action, ou action très-faible.

Chlorure de soufre. — En plongeant un tube imprégné de ce chlorure dans le peroxide pur, il y a eu effervescence, production de chàleur, et formation d'acide sulfurique.

Hydrure de soufre, et peroxide pur. — Point d'effervescence, point de dissolution; mais, au bout de vingt-quatre heures, le soufre de l'hydrure était séparé : il s'était formé de l'eau, sans doute par l'union de l'hydrogène de l'hydrure avec l'oxigène du peroxide.

On verra (40) que l'eau oxigénée possède aussi la propriété de décomposer l'hydrogène sulfuré.

Chlorures métalliques. (Voyez l'action des sels sur le peroxide; 54.)

Je n'ai point recherché l'action des alliages sur le peroxide d'hydrogène ; il serait curieux de voir si quelques-uns ne posséderaient point la propriété de décomposer plus rapi-

dement ce peroxide que les métaux mên
tueraient.

Action des oxides métalliques sur le
gène, à la température o

27. Les oxides métalliques tend
mener le peroxide d'hydrogène à
d'eau. Quelques-uns produisent cet
tage; d'autres sans s'altérer, et en
gaz toute la quantité d'oxigène que
à l'état de peroxide; d'autres, enf
cette quantité d'oxigène, se rédı
sont sans action.

La force décomposante des
sieurs chassent l'oxigène si su
en résulte une sorte d'explos
d'une grande chaleur et m
contraire, dont l'action est
légère effervescence, et ja

Toutes les expériences
qui ont pour objet l'act
peut encore les faire av
tube renversé et plein
sivement la liqueur e

Des oxides qui pev
et le ramene

28. Ces oxides
l'oxide de zinc



l'oxide de nickel; les protoxides de manganèse, de fer, d'étain, de cobalt; l'oxide d'arsenic, et probablement plusieurs autres. Mais il est nécessaire que l'oxide métallique soit en gelée ou en dissolution : autrement l'oxigène se dégagerait, ou resterait en combinaison. Il est évident, d'ailleurs, que, à mesure que le nouvel oxide se produira, il sera possible qu'il chasse une portion d'oxigène de la liqueur, de sorte qu'alors l'action deviendra complexe.

Baryte. — Lorsqu'on verse de l'eau de baryte dans le peroxide pur ou étendu, il se précipite à l'instant une foule de paillettes brillantes, qui ne sont autre chose qu'un hydrate de deutoxide de barium, comme on le verra (67); mais si, au lieu d'eau de baryte, l'on se servait de baryte réduite en poudre, et de peroxide d'hydrogène concentré ou peu étendu, il en résulterait un violent dégagement de gaz oxigène et beaucoup de chaleur. Cette chaleur peut provenir de l'absorption de l'eau du peroxide d'hydrogène par la baryte, et de la décomposition instantanée de ce peroxide. Quant au dégagement d'oxigène, on peut l'attribuer à l'élévation de température produite par l'absorption d'eau, et au deutoxide de barium dont il se forme une petite quantité. Toutefois l'hydrate de baryte possède lui-même la propriété de dégager l'oxigène du peroxide d'hydrogène.

Strontiane. — La strontiane offre, avec le peroxide d'hydrogène, absolument les mêmes phénomènes que la baryte. (Voyez l'hydrate de deutoxidé; 63.)

Chaux. — Cette base produit aussi, avec le peroxide d'hydrogène, des phénomènes analogues à ceux que nous venons d'observer avec les deux bases précédentes : ils n'en

diffèrent même qu'en ce que, pour obtenir en paillettes cristallines l'hydrate de deutoxide de calcium, il faut verser l'eau de chaux peu-à-peu (66).

Hydrate bleu de deutoxide de cuivre. — Cet hydrate, mis en contact avec le peroxide d'hydrogène, passe tout de suite à l'état d'un nouvel oxide qui est d'un jaune d'ocre, et qui fait dégager assez rapidement l'oxigène de la liqueur oxigénée non encore décomposée. Lorsque le peroxide est concentré, l'action est vive; il y a dégagement de chaleur, et il s'en faut beaucoup que tout l'oxide de cuivre se suroxide. Pour que la suroxidation ait lieu, il faut non-seulement que le peroxide d'hydrogène soit étendu d'eau, mais encore satisfaire à diverses conditions qui seront exposées plus tard (68).

Deutoxide de cuivre calciné. — Sous cet état, le deutoxide de cuivre ne possède plus la propriété de se suroxider; il produit, avec le peroxide d'hydrogène, une effervescence très-sensible due à un dégagement d'oxigène. Ce dégagement est même assez fort avec le peroxide concentré.

Hydrate d'oxide de zinc. — De même que celui de cuivre, cet hydrate se suroxide dans son contact avec le peroxide d'hydrogène, mais de telle manière, qu'il ne se dégage que bien peu d'oxigène. (*Voyez* le nouvel oxide de zinc; 70.)

Fleurs de zinc, ou oxide blanc de zinc calciné. — Plus de suroxidation sous cet état; l'oxide donne lieu tout au plus à un dégagement de gaz extrêmement faible.

Hydrate de nickel. — Voici encore un hydrate qui, dans son contact avec la liqueur oxigénée, donne lieu probablement à un nouvel oxide, et qui, en même temps, produit un faible dégagement d'oxigène. (*Voyez* ce nouvel oxide; 71.)

Oxide de nickel calciné. — La dessication fait perdre à cet oxide, comme à ceux de cuivre et de zinc, la propriété de se suroxigéner : mis en contact avec le peroxide d'hydrogène, il en dégage l'oxigène, de manière à y produire une effervescence très-marquée.

Protoxides de manganèse, de fer, d'étain, de cobalt. — Ces protoxides, à l'état d'hydrate, donnent lieu, par leur contact avec l'eau oxigénée, à des peroxides semblables à ceux que nous connaissons : que l'on verse en effet de l'eau oxigénée sur ces hydrates récemment précipités de leur dissolution dans les acides par la potasse, et l'on verra qu'ils s'oxideront tout-à-coup.

Les peroxides de manganèse et de cobalt agiront ensuite sur la liqueur non décomposée, en faisant passer rapidement son oxigène à l'état de gaz; celui de fer ne produira qu'une effervescence qui ne sera pas très-forte, et celui d'étain n'en produira pas de sensible.

Deutoxide d'arsenic. — Quant à celui-ci, il s'acidifiera.

Des oxides qui dégagent l'oxigène du peroxide d'hydrogène sans se suroxider et sans se désoxider.

29. Je connais un assez grand nombre d'oxides qui possèdent cette propriété : j'en parlerai, autant que possible, dans l'ordre de leur plus grande action décomposante.

Peroxide de manganèse naturel, réduit en poudre fine, et peroxide d'hydrogène le plus concentré. — Action subite et très-violente; dégagement de chaleur si grand, que le tube de verre devient brûlant; désoxigénation complète et instantanée.

Le même, et liqueur ne contenant que neuf volumes d'oxigène. — Effervescence subite et très-vive; tout l'oxigène se dégage en très-peu de temps.

Peroxide de manganèse très-divisé (obtenu en ajoutant de l'eau oxigénée à une dissolution de manganèse, et décomposant ensuite la dissolution par la potasse). — L'action de cet oxide est encore plus grande que celle de l'oxide naturel; et même l'expérience peut être faite avec le peroxide concentré, de telle manière qu'il en résulte une sorte d'explosion (60).

Peroxide de cobalt en poudre, et peroxide d'hydrogène. — Mêmes phénomènes à-peu-près qu'avec peroxide de manganèse naturel.

Massicot en poudre, et peroxide le plus concentré. — Action violente, grand dégagement de chaleur; désoxigénation complète et presque instantanée de la liqueur.

Massicot, et liqueur ne contenant que neuf fois son volume d'oxigène. — Effervescence vive, dégagement de tout l'oxigène en quelques minutes.

Minium et tritoxide de plomb. — Ces deux oxides agissent très-fortement aussi sur le peroxide d'hydrogène : l'action du tritoxide est même des plus violentes; mais, comme il passent en même temps à l'état de protoxide, du moins la liqueur concentrée, il n'en sera question que dans pitre suivant.

Hydrate de tritoxide de fer, et peroxide d'' plus concentré. — Action qui devient bientôt t dégagement de chaleur, et désoxigénation queur en très-peu de temps.

Hydrate de tritoxide de fer, et liqueur ne contenant que neuf fois son volume d'oxigène. — L'effervescence est subite, mais n'est pas vive : aussi la désoxigénation ne se fait-elle complètement que dans l'espace de plusieurs heures.

Tritoxide de fer en poudre. — Sous cet état, le tritoxide de fer n'exerce qu'une action assez faible sur le peroxide d'hydrogène concentré ou étendu d'eau : au bout de quinze heures, la désoxigénation n'est point encore terminée.

Deutoxide de fer (provenant de la décomposition de l'eau par le fer incandescent). — Action très-faible sur le peroxide concentré ou étendu. Quinze heures sont loin de suffire pour la désoxigénation complète de la liqueur ; au bout de ce temps, elle est presque aussi chargée d'oxigène que d'abord.

Oxide de nickel en poudre noire, deutoxide de cuivre en poudre brune, oxide de bismuth en poudre jaunâtre. — L'action de ces différents oxides sur la liqueur concentrée n'est point très-forte ; mais elle est assez grande pour en dégager tout l'oxigène dans l'espace de quelques heures.

Ces mêmes oxides finissent aussi par chasser tout l'oxigène de la liqueur affaiblie ; seulement, lorsque cette liqueur ne contient que neuf volumes d'oxigène, il faut près de quinze heures pour que la désoxigénation soit complète.

Oxide de Tantale ou acide colombique. — Cet oxide, qui m'avait été donné par M. Vauquelin, avait une action bien marquée sur le peroxide d'hydrogène concentré : il finissait par en dégager tout l'oxigène ; mais il n'en avait aucune, ou il en avait à peine sur le peroxide étendu de manière à ne contenir que neuf fois son volume d'oxigène : ne serait-ce

Des oxides qui dégagent l'oxigène du peroxide d'hydrogène, en laissant dégagèr le leur en tout ou en partie.

30. Ces oxides sont ceux d'argent, de mercure, de deutoxide et de tritoxide de plomb, d'or, de platine, et probablement d'Iridium, de Palladium et de Rhodium.

Oxide d'argent. — C'est celui de tous les oxides qui me paraît avoir le plus d'action sur le peroxide d'hydrogène : il en dégage tout-à-coup l'oxigène; et ce dégagement est si rapide, qu'il peut en résulter une explosion, quand le peroxide est concentré. De plus, la chaleur produite est telle, que l'on aperçoit des points lumineux en faisant l'expérience dans l'obscurité. Il n'est pas extraordinaire, d'après cela, que l'oxide d'argent soit réduit. L'essai doit être fait dans un verre (60).

La réaction est encore très-grande, lors même que le peroxide d'hydrogène est étendu d'eau. En effet, l'oxide d'argent fait une effervescence très-sensible et subite dans de l'eau qui ne contient que la cinquantième partie de son volume d'oxigène : aussi, en faisant passer dans un tube de verre renversé et plein de mercure, d'abord de l'eau qui renferme douze fois son volume d'oxigène, puis de l'oxide d'argent, le mercure est-il repoussé de manière que l'œil n'en suit qu'avec difficulté l'abaissement. Dans ce cas, il n'y a pas production de chaleur sensible, et cependant il y a réduction de l'oxide d'argent. Cet oxide se réduirait même avec la liqueur la plus étendue. Qu'on n'aille pas en conclure, pour cela, que le dégagement d'oxigène de l'oxide métal-

lique ne soit point un effet de la température : il se pourrait faire qu'au moment de l'action de l'oxide d'argent sur le peroxide d'hydrogène, les molécules qui agiraient les unes sur les autres fussent très-échauffées, et que leur nombre étant très-petit, relativement à la liqueur, elles ne pussent point élever d'un demi-degré la température de celle-ci.

Tritoxide de plomb en poudre. — L'action de cet oxide sur le peroxide d'hydrogène est à-peu-près aussi grande que celle de l'oxide d'argent; et les résultats de part et d'autre sont les mêmes, si ce n'est que le tritoxide de plomb ne se réduit pas, et qu'il passe seulement à l'état de protoxide jaune avec la liqueur concentrée. Éprouve-t-il la même désoxigénation avec la liqueur étendue? Je conserve quelques doutes à cet égard.

Minium et peroxide d'hydrogène. — Mêmes phénomènes qu'avec tritoxide, à cela près que l'action, étant moins vive, a lieu sans dégagement de lumière dans l'obscurité et avec un moindre dégagement de chaleur.

Hydrate de deutoxide de mercure, et peroxide d'hydrogène. — L'hydrate, qui était délayé dans l'eau, a d'abord été mis sur du papier joseph, puis on a fait l'essai à la manière ordinaire : à l'instant, l'oxide qui était jaune est devenu rouge, l'effervescence a eu lieu, et bientôt elle a été violente; alors grand dégagement de chaleur, réduction subite de l'oxide mercuriel, désoxigénation complète de la liqueur.

Hydrate de deutoxide de mercure, et liqueur ne contenant que neuf volumes d'oxigène. — Effervescence très-modérée, point de chaleur sensible; réduction de l'oxide en vingt-

quatre heures; désoxigénation complète dans cet espace de temps, pourvu que l'oxide de mercure soit en excès.

Précipité perse, réduit en poudre très-fine. — Cet oxide en poudre était d'un jaune d'ocre verdâtre. Mis en contact avec le peroxide d'hydrogène concentré, il est devenu rouge comme l'hydrate, et a agi comme lui, seulement moins promptement; toutefois l'action a fini par être violente, le dégagement de chaleur par être très-grand, et l'oxide par se réduire.

Son action sur la liqueur étendue est faible.

Oxide d'or en poudre sèche et brune (*), *et peroxide très-concentré.* — Action subite, violente; grand dégagement de chaleur, réduction de l'or, désoxigénation complète de la liqueur.

Oxide d'or, et liqueur ne contenant que neuf volumes d'oxigène. — Effervescence subite, vive; point de chaleur; l'or se réduit, et la liqueur se désoxigène en peu de temps.

Oxide de platine en poudre (obtenu en faisant bouillir le muriate de platine avec la soude). — Même action sur le peroxide d'hydrogène concentré ou étendu, que l'oxide d'or.

(*) Cet oxide avait été obtenu en faisant bouillir un excès d'eau de baryte avec le muriate d'or, versant un peu d'acide acétique sur le précipité lavé qui était d'un brun-verdâtre, et lavant de nouveau le résidu à l'eau bouillante. L'acide acétique sépare un peu de baryte et d'acide muriatique du précipité, et le rend d'un brun-foncé tirant sur le violet; mais, dans cet état même, il n'est point parfaitement pur, il retient encore des traces d'acide hydro-chlorique et de baryte que l'acide nitrique peut en séparer.

Oxides d'iridium, de palladium, de rhodium. — Il en serait probablement de ces oxides purs comme des précédents : sans doute que leur action sur le peroxide d'hydrogène concentré serait violente, et qu'ils se réduiraient ; tel est même le résultat que j'ai obtenu avec un oxide d'iridium, mais de la pureté duquel je n'étais pas certain.

Oxide d'osmium (provenant de la calcination, dans une cornue de verre, d'un mélange d'osmium et de chlorate de potasse), *et peroxide d'hydrogène très-concentré.* — Point d'action sensible ; mais à peine ajoute-t-on une très-petite quantité de potasse, qu'il en résulte une grande effervescence, un grand dégagement de chaleur, et que la liqueur, de claire et d'incolore, devient brun-foncé. Y a-t-il, dans ce cas, réduction de l'oxide d'osmium?

Le peroxide étendu d'eau se comporte, à l'intensité d'action près, de la même manière avec l'oxide d'osmium.

Des oxides qui sont sans action, du moins bien sensible, sur le peroxide d'hydrogène.

31. Les oxides que je connais pour être sans action bien sensible sur le peroxide d'hydrogène, sont l'alumine, la silice, l'oxide de chrôme, le deutoxide d'étain, le protoxide et le deutoxide d'antimoine.

Il faut y joindre l'acide tungstique.

Plusieurs autres oxides sont sans doute encore dans ce cas ; mais, n'ayant point eu l'occasion de les essayer, je ne puis en rien dire d'une manière particulière.

De l'action de quelques bases salifiables, qui ne sont point de nature métallique, sur le peroxide d'hydrogène.

32. Je n'ai encore pu essayer que l'ammoniaque et la morphine.

L'ammoniaque exerce une action bien marquée sur le peroxide d'hydrogène. Ayant mis cet alcali en dissolution très-concentrée, en contact avec le peroxide d'hydrogène lui-même très-concentré, il en est résulté tout-à-coup un dégagement de gaz oxigène, qui d'abord était assez fort, mais qui n'a point tardé à se ralentir. Au bout de vingt heures, la liqueur évaporée n'a laissé qu'un faible résidu terreux : projeté sur les charbons incandescents, ce résidu n'en rendait pas la combustion plus active; d'où l'on peut conclure que, quand bien même l'ammoniaque serait décomposée, il ne se formerait pas d'acide nitrique. L'azote qu'elle contient se dégagerait sans doute. Comme je n'ai point recueilli les gaz; que j'ai reconnu seulement, en plongeant une allumette dans le tube, qu'ils rallumaient les corps en ignition, je ne puis rien dire de positif sur la question de savoir si l'ammoniaque éprouve quelque altération; toutefois je ne le pense pas; car, lorsqu'on ne met avec le peroxide concentré qu'une très-petite quantité d'alcali, la liqueur est encore alcaline plusieurs jours après.

L'action de la morphine sur le peroxide d'hydrogène est très-faible. A peine si le dégagement de gaz est sensible; il s'arrête bientôt. La liqueur se colore en brun-marron; au

on les fasse chauffer toutes deux, et l'on verra qu'aussitôt que la température sera portée à 100°, tout l'oxigène de l'eau oxigénée sera dégagé, tandis que, au bout d'une demi-heure d'ébullition, l'autre sera encore très-oxigénée, ou du moins capable de produire une forte effervescence avec l'oxide d'argent.

36. Lorsqu'on met de l'or très-divisé (provenant de la décomposition du muriate d'or par le sulfate de fer) dans une eau oxigénée contenant dix, vingt, trente fois, ou plus, son volume d'oxigène, il en résulte une très-vive effervescence; mais, en ajoutant une goutte d'acide sulfurique très-étendu, l'effervescence s'arrête à l'instant même : elle se reproduit tout de suite, en saturant l'acide par de la potasse, pour disparaître et se reproduire encore par l'addition successive des mêmes agents.

L'action de l'acide est telle, enfin, que, pour peu que le peroxide d'hydrogène très-concentré en contienne, il peut être mis impunément en contact avec l'or le plus divisé; et cependant ce métal agit avec violence sur le peroxide saturé.

37. Plusieurs autres corps produisent, dans leur contact avec le peroxide d'hydrogène, des phénomènes analogues aux précédents; seulement, pour prévenir ou arrêter l'effervescence, il faut une plus grande quantité d'acide. Je citerai le platine, le palladium, le rhodium, et je pourrais y joindre tous les métaux dont l'action sur le peroxide d'hydrogène n'est pas très-grande. Aussi, lorsqu'on ajoute au peroxide d'hydrogène concentré, qui contient toujours un peu d'acide, une petite quantité d'alcali, devient-il capable d'agir violemment sur des métaux qui, sans cela, ne

avec violence, et le second ne produit qu'une faible effervescence ; et pourtant la quantité d'acide qui rendra le premier sans action, n'arrêtera pas celle du second.

39. Puisque les acides donnent plus de stabilité à l'eau oxigénée, c'est sans doute en se combinant avec le peroxide d'hydrogène. Du moins, dans l'état actuel de la chimie, la composition de ce peroxide rend toute autre hypothèse invraisemblable. A la vérité, cette opinion n'est pas celle que j'avais adoptée d'abord; j'avais pensé que l'oxigène se combinait avec les acides, et qu'il en résultait un grand nombre de nouveaux acides oxigénés. Les expériences sur lesquelles je me fondais paraissaient démonstratives; il ne sera pas inutile de les rapporter.

Je venais de découvrir qu'en traitant le deutoxide de barium par l'acide muriatique, et qu'en précipitant la dissolution par une quantité convenable d'acide sulfurique, on obtenait une liqueur qui était formée d'eau, d'acide muriatique, et de tout l'oxigène nécessaire pour suroxider la baryte. Or, en saturant l'acide par l'oxide d'argent, tout l'oxigène se dégageait à l'instant, tandis qu'en employant un sel d'argent au lieu d'oxide d'argent, il ne se dégageait pas la plus petite bulle de gaz. Ne devait-on pas en conclure que si l'oxigène ne se dégageait pas, dans le cas où l'on employait le sel d'argent, c'était en raison de l'acide de ce sel? Je dirai plus : la conséquence était forcée alors. Mais, aussitôt que j'eus découvert que l'oxigène pouvait s'unir à l'eau sans l'intermède des acides; que certains corps, l'oxide d'argent sur-tout, possédaient la propriété de dégager l'oxigène de l'eau oxigénée, et que les sels d'argent, tels que le

sulfate, l
je compri
être des a
difiée.

40. Ap
le peroxi
qui ne sa
trop faibl
citerons,
borique;
hydriodi
sulfuré.

A pein
d'hydrog
odeur dis
être qu'e
nouvel ac

Le per
tout de s
un précip

Le per
peu-à-pe
volume d
réaction
quart d'h
demain,
l'hydrogè
l'acide sul
oxigénée
par le ni

L'acide hydrochlorique, soit à froid, soit à chaud, n'est point décomposé par l'eau oxigénée : par conséquent, un mélange d'eau oxigénée et de cet acide ne donne point de chlore. Lorsqu'on le chauffe, on n'en retire d'autre gaz que de l'oxigène. Je ne connais qu'un seul moyen d'opérer la décomposition de l'acide hydrochlorique par l'eau oxigénée : c'est de verser de l'acide sulfurique concentré en assez grande quantité, dans un mélange d'eau oxigénée et d'acide muriatique saturé de deutoxide de barium. La forte chaleur produite instantanément, et peut-être aussi la présence de l'acide sulfurique, détermine un dégagement de chlore très-sensible. Il semble que le même effet devrait être produit, quand bien même on n'ajouterait pas de deutoxide de barium; mais, comme je n'ai pas fait l'essai, je ne puis rien assurer à cet égard. J'ai eu l'occasion, au contraire, de répéter souvent l'autre dans la préparation de l'eau oxigénée.

Des propriétés que possède l'eau oxigénée après son mélange avec les acides.

41. Je suppose que la liqueur qui résulte de ce mélange renferme à-peu-près cinq à six fois son volume d'oxigène, et que la quantité de celui-ci soit à celle de l'acide, dans un rapport deux à trois fois plus grand que celui des quantités d'oxigène et d'acide dans les sels neutres. Je dis à-peu-près, car les phénomènes seraient encore analogues dans le cas où les proportions d'eau, d'oxigène et d'acide ne seraient point celles que nous venons d'indiquer.

Il est facile d'obtenir avec les acides nitrique et hydrochlorique une liqueur où ce rapport entre les quantités

d'oxigène et d'acide existe. En effet, comme le deutoxide de barium contient deux fois autant d'oxigène que le protoxide ou la baryte, il est évident qu'en saturant l'acide nitrique ou hydrochlorique de deutoxide, et précipitant la dissolution par l'acide sulfurique, comme nous l'avons dit précédemment (6), la liqueur contiendra précisément la quantité d'oxigène et d'acide nitrique ou muriatique nécessaire pour former un sel neutre avec un métal. Si donc l'on sature une seconde fois la liqueur acide de deutoxide de barium, et qu'on en précipite, comme la première fois, la baryte par l'acide sulfurique, la quantité d'oxigène sera double; une troisième opération la triplera. A la vérité, la plupart des autres acides ne se prêtent point à ce genre de préparation, parce qu'il n'en est presque aucun qui forme des sels neutres solubles avec la baryte, et qu'ils n'attaquent point facilement le deutoxide de barium; mais on peut les mêler directement avec l'eau oxigénée, ou bien obtenir une liqueur convenable en versant un sel d'argent contenant l'un de ces acides dans un mélange d'eau oxigénée et d'acide hydrochlorique.

C'est ainsi que, dans la préparation de l'eau oxigénée, l'acide sulfurique a été substitué à l'acide hydrochlorique (9). On s'y prendrait d'une manière semblable pour tout autre acide. J'ai essayé cette substitution avec tous les acides minéraux, excepté ceux que l'eau oxigénée peut altérer; je l'ai essayée également sur presque tous les acides végétaux : l'acide carbonique est le seul avec lequel je n'ai point réussi, parce qu'en versant du carbonate d'argent dans de l'eau oxigénée, chargée ou non chargée d'acide muriatique, tout l'oxigène se dégage comme avec l'oxide d'argent (9); l'eau

oxigénée, au contraire, n'est point altérée par les autres sels d'argent; leurs acides, plus forts que l'acide carbonique, et intimement unis à l'oxide d'argent, s'opposent à ce que celui-ci puisse rompre la combinaison de l'oxigène et de l'eau.

Dans tout ce qui suit, je désignerai chaque liqueur oxigénée par le nom de l'acide qu'elle contiendra. Je dirai donc, *liqueur oxigénée nitrique, liqueur oxigénée hydrochlorique;* et par conséquent, je les comprendrai toutes sous le nom de *liqueurs oxigénées acides.*

42. Les liqueurs oxigénées acides attaquent, à la température ordinaire, un grand nombre de métaux, et forment avec eux des sels qui quelquefois réagissent ensuite sur l'excès de liqueur oxigénée (51). Presque toujours alors l'oxigène provient non de l'acide ou de l'eau, mais du peroxide d'hydrogène. Si donc la quantité d'oxigène était, à celle de l'acide, dans la liqueur, comme dans le sel qui se forme, il serait possible que le métal se dissolvît sans effervescence, ou disparût comme le sucre dans l'eau : c'est ce que j'ai observé plusieurs fois.

43. Ce n'est que long-temps après le contact, que la liqueur oxigénée muriatique dissout l'or en feuilles; encore ne se charge-t-elle que d'une très-petite quantité d'or. Les autres liqueurs oxigénées ne m'ont point paru avoir d'action sur ce métal; cependant, avant de prononcer, il serait peut-être nécessaire de répéter les expériences.

44. La liqueur oxigénée muriatique a beaucoup plus d'action sur l'argent que sur l'or; elle le rend assez promptement violet, quand il est en feuilles, et laisse dégager en même

temps du gaz oxigène : or, comme, d'une pa
paraît, et que, de l'autre, la substance viol
rure d'argent, il s'ensuit que l'acide est
son hydrogène s'unit à une portion de
oxide d'hydrogène, et que le chlore, se c
gent, forme un chlorure qui, étant vi
priété de décomposer sensiblement
résultats seraient un peu différents
quantité d'oxigène était à celle de
sels neutres ; ou, ce qui est la mê
de l'acide et l'oxigène étaient dan
cipes constituants de l'eau. Tout
et l'oxigène dégagé serait en
paraîtra tout simple, en ne pe
composante du chlorure viol
et en observant que puisque
ger un peu d'oxigène, il n
absorber tout l'hydrogène

45. Le mercure, dan
née muriatique, forme
l'eau et un chlorure.
degré d'oxidation du
au moment de sa
parce que le chlor
action répulsive

46. De l'oxid
et contenant u
verdâtre (3o
muriatique
1819.

était due à l'oxigène; l'oxide d'or devint pourpre, et quelque temps après il était complètement réduit.

Les liqueurs oxigénées sulfurique, nitrique et phosphorique, font passer d'abord l'oxide d'or au pourpre comme la précédente, en produisant une forte effervescence; mais l'oxide, au lieu de prendre ensuite l'aspect de l'or précipité par le sulfate de fer, devient brun foncé. Dans cet état, toutefois, je le crois réduit.

47. Lorsque l'on verse de la liqueur oxigénée nitrique sur de l'hydrate d'oxide d'argent, l'effervescence qui a lieu tout-à-coup est plus vive encore que les précédentes : une partie de l'oxide se dissout; l'autre se réduit d'abord, devient blanchâtre, et se dissout ensuite elle-même, pourvu que l'acide soit en quantité convenable. Le temps qui s'écoule entre la réduction et la dissolution, permet de séparer avec la plus grande facilité l'argent réduit. La dissolution étant faite, si l'on y ajoute de la potasse peu-à-peu, il se produit une nouvelle effervescence et un précipité d'un violet noir foncé; du moins, telle est toujours la couleur du premier dépôt. Ce dépôt est insoluble dans l'ammoniaque, et est, selon toute apparence, un protoxide d'argent. Pour peu que l'on réfléchisse, on verra comment se produisent ces phénomènes : l'eau oxigénée de la liqueur et l'oxide d'argent, par leur action réciproque, donnent lieu à la vive effervescence que l'on observe, et à la réduction de l'argent. Celui-ci, dont une portion reste en dissolution, parce que le nitrate d'argent n'est point altéré, même par le peroxide d'hydrogène concentré (53), se dissout à la manière ordinaire dans l'acide nitrique; mais, comme la liqueur reste encore plus ou moins oxigénée, cet oxigène reprend l'état de gaz

au moment où l'on précipite l'oxide d'argent par la potasse; l'oxide, dans cette réaction, ne se désoxigène qu'en partie, et de-là le dépôt noir qui nous paraît être un protoxide.

De même que la liqueur oxigénée nitrique, les liqueurs oxigénées sulfurique et phosphorique opèrent la réduction partielle de l'oxide d'argent : il se dégage beaucoup de gaz oxigène; mais l'argent, au lieu de se dissoudre, conserve son état métallique, du moins pendant long-temps.

48. Il n'en est pas ainsi de la liqueur oxigénée muriatique : soit qu'on emploie un excès d'hydrate d'oxide d'argent, soit qu'on n'emploie que la quantité qu'il en faut pour décomposer l'acide, et qu'on ait même le soin de l'ajouter peu-à-peu, il en résulte de l'eau, du chlorure d'argent violet, et le dégagement total de l'oxigène. Ce dégagement, au contraire, ne serait que partiel, si, versant d'abord dans la liqueur oxigénée un acide capable de s'unir à l'oxide d'argent, par exemple de l'acide sulfurique, ou de l'acide nitrique, ou de l'acide phosphorique, etc., on y ajoutait ensuite cet oxide par petites portions, au bout d'un tube, jusqu'à ce que tout l'acide muriatique fût décomposé. Et ce résultat serait tout simple, car les circonstances seraient presque les mêmes que celles où se trouve un mélange de sulfate, ou de nitrate, ou de phosphate d'argent, et d'eau oxigénée et chargée d'acide muriatique : aussi se forme-t-il dans ces deux derniers cas, non pas du chlorure violet, comme dans les deux premiers, mais du chlorure blanc. Les caractères qui distinguent ces deux chlorures sont très-marqués : le chlorure blanc est entièrement soluble dans l'ammoniaque, et n'exerce aucune action répulsive sur l'oxigène de l'eau oxigénée; tandis que l'autre a la propriété

d'en dégager ce gaz, et de laisser, comme M. Gay-Lussac l'a observé le premier, un résidu d'argent métallique, lorsqu'on le met en contact avec l'ammoniaque. Ce résidu n'autorise-t-il pas à croire que ce chlorure est un sous-chlorure, ou, si l'on veut, un protochlorure, qui correspondrait à un premier degré d'oxidation, et qui, par le contact de l'alcali volatil, se transformerait en argent et en deutochlorure (1).

49. L'acide nitrique, faible ou concentré, est sans action sur le peroxide de manganèse et sur le peroxide de plomb. Mais il en est tout autrement de l'acide nitrique, mêlé à l'eau oxigénée; il les dissout avec la plus grande facilité. La dissolution est accompagnée d'un grand dégagement de gaz oxigène, et ne retient de ce gaz qu'autant qu'on n'emploie point les oxides en excès. Dans le cas où cet excès a lieu, la liqueur précipite par la potasse, comme les dissolutions ordinaires de manganèse et de plomb; dans le cas contraire, l'oxigène, au moment de la précipitation, venant à s'unir avec les oxides, rend noir celui de manganèse, et couleur de brique celui de plomb. L'on voit donc, d'après cela, que les peroxides de manganèse et de plomb ne se dissolvent qu'en abandonnant une partie de leur oxigène, et que cette désoxigénation provient, d'une part, de la tendance qu'a l'acide à s'unir avec l'oxide ramené à un moindre

(1) L'on sait que le chlorure blanc devient promptement violet quand on l'expose au soleil. Je crois que le chlore s'en dégage directement; du moins j'ai senti plusieurs fois l'odeur de ce corps en agitant le chlorure quelque temps après son exposition à la lumière. La liqueur ne s'est jamais acidifiée; jamais elle n'a laissé dégager d'oxigène, et jamais elle n'a été capable de détruire la couleur du tournesol.

degré d'oxidation, et, d'autre part, de la force répulsive qu'exerce l'eau oxigénée sur l'oxigène même de l'oxide. L'une de ces forces ne suffirait pas pour opérer la désoxigénation; réunies, elles l'opèrent très-bien : je puis encore en citer une expérience convaincante. Que l'on mette en contact, dans un tube plein de mercure, de l'eau oxigénée, chargée d'acide muriatique, et de l'oxide noir de manganèse pur, en s'y prenant comme nous l'avons dit pag. 396, et, qu'après avoir fait l'expérience, on la répète en saturant la liqueur par de la potasse avant l'introduction du manganèse, et l'on verra que, dans le premier cas, il se dégagera bien plus de gaz oxigène que dans le second. Les mêmes résultats auraient lieu avec le peroxide de plomb.

50. Les liqueurs oxigénées sulfurique et muriatique se comportent, avec le peroxide de manganèse et de plomb, absolument comme la liqueur oxigénée nitrique dont nous venons de parler. Ainsi, quoique l'acide muriatique forme avec l'oxide de manganèse un muriate, de l'eau, et donne lieu à un dégagement de chlore, ce même acide, mêlé à l'eau oxigénée, dissout le peroxide en laissant dégager seulement de l'oxigène; et ce qu'il y a de remarquable, c'est qu'il le dissout bien plus facilement par l'intermède de l'eau oxigénée, que quand il est pur.

De l'action d'un assez grand nombre de sels sur le peroxide d'hydrogène concentré, et sur de l'eau oxigénée, contenant onze fois son volume d'oxigène.

51. Les sels neutres se rapprochent plutôt des oxides que des acides par leur manière d'être avec le peroxide d'hydro-

gène. En effet, aucun n'ajoute à sa stabilité. Un assez grand nombre en dégage l'oxigène; quelques-uns seulement absorbent celui-ci. L'action des autres est insensible. Tous peuvent être éprouvés comme les oxides eux-mêmes dans de petits tubes de verre fermés par un bout.

Action des sulfates.

52. J'ai essayé onze sulfates. Sept n'altèrent en aucune manière le peroxide d'hydrogène concentré ou étendu d'eau; savoir : les sulfates de potasse, de soude, de chaux, de baryte, de strontiane, l'alun et le turbith. Les quatre autres en dégagent l'oxigène : ce sont les sulfates de zinc, de manganèse, de cuivre et de fer.

Sulfate de manganèse en poudre. — Effervescence assez forte avec le peroxide concentré ou étendu; désoxigénation complète au bout de vingt heures.

Sulfate de zinc en poudre. — Action moins sensible que la précédente : aussi, après vingt heures de contact, la désoxigénation de la liqueur étendue d'eau n'était-elle pas complète.

Sulfate de cuivre en poudre. — Action moins sensible encore qu'avec le sulfate de zinc : elle s'arrête promptement; au bout de vingt heures, la liqueur fait une vive effervescence avec l'oxide d'argent, et l'on y remarque un dépôt olivâtre. Ce dépôt n'est-il pas formé de tritoxide?

Sulfate de fer du commerce, en poudre, et peroxide concentré. — Action subite et violente, grand dégagement de chaleur; désoxigénation complète; coloration du sel en rouge. Il est probable que le fer passe à l'état de tritoxide.

Sulfate de fer, et peroxide étendu d'eau. — Vive effervescence, point de chaleur; la liqueur devient d'un jaune-rouge, et conserve d'abord sa transparence; mais peu-à-peu elle se trouble; il s'y fait un dépôt ocreux considérable, et elle se désoxigène complètement.

Action des nitrates.

53. Les nitrates, que j'ai mis en contact avec le peroxide d'hydrogène, sont ceux de potasse, de soude, de baryte, de strontiane, de plomb, de bismuth, d'argent, de manganèse, de cuivre, de mercure protoxidé. De ces dix sels, il n'y a que les quatre derniers dont l'action sur le peroxide d'hydrogène soit sensible.

Nitrate de manganèse cristallisé, et peroxide concentré. — Effervescence sensible, mais faible; au bout de vingt heures, la désoxigénation n'était pas complète.

Nitrate de manganèse, et peroxide étendu. — Dégagement de gaz à peine sensible; cependant, vingt heures après, la liqueur était presque désoxigénée.

Nitrate de cuivre cristallisé, et peroxide concentré ou étendu. — Mêmes phénomènes, à peu de chose près, qu'avec nitrate de manganèse; seulement le nitrate, de bleu, devient tout de suite olive, sur-tout avec le peroxide concentré; quelque temps après, il se forme un dépôt olivâtre, qui est probablement un tritoxide.

Protonitrate de mercure cristallisé, et peroxide concentré. — Point d'effervescence; au bout de vingt heures, dépôt jaunâtre, qui semblait être un sous-deutonitrate; désoxigénation presque complète.

Protonitrate de mercure, et peroxide étendu d'eau. — Point de dégagement de gaz : au bout de vingt heures, la liqueur faisait encore une vive effervescence avec l'oxide d'argent ; par conséquent, action nulle, ou presque nulle.

Nitrate d'argent neutre et cristallisé dans le vide. — Point d'action sur le peroxide étendu; dégagement de gaz avec peroxide concentré, et désoxigénation presque complète en vingt heures.

De l'action de quelques chlorures et de quelques hydrochlorates sur le peroxide d'hydrogène.

54. Le nombre des chlorures et des hydrochlorates qui ont été essayés, est de dix. Trois ont été sans action sur le peroxide; le chlorure de zinc, le sublimé corrosif, et la liqueur fumante de Libarius. Les sept autres, dont les noms suivent, en ont produit la décomposition plus ou moins complètement, sans qu'il se formât des chlorates.

Chlorure de potassium en poudre, et peroxide concentré. — Effervescence subite, assez forte; désoxigénation complète au bout de quinze heures.

Chlorure de potassium, et peroxide étendu d'eau. — Même résultat qu'avec peroxide concentré, pourvu que le chlorure soit en assez grande quantité pour saturer l'eau : s'il était en quantité bien moindre, il y aurait encore une effervescence, mais qui bientôt s'arrêterait.

Chlorure de sodium, et peroxide. — Comme avec chlorure de potassium.

Chlorure de barium, et peroxide. — Dégagement de gaz, mais faible : aussi la désoxigénation n'est-elle complète

d'eau. — Dégagement de gaz oxigène très-marqué ; vingt heures après le contact, la liqueur était complètement désoxigénée.

Carbonate saturé de potasse, cristallisé, et peroxide étendu d'eau. — Même résultat qu'avec souscarbonate de soude ; seulement, action moins prononcée.

Phosphate de soude cristallisé. — Sans action sur la liqueur étendue.

Chlorate de potasse. — Sans action aussi sur la liqueur étendue d'eau.

Hydriodate de baryte cristallisé, et peroxide concentré. — Action subite, chaleur sensible : il se forme, je crois, de l'eau et de l'iodate de baryte; ce qu'il y a de sûr, du moins, c'est qu'il ne se dépose pas d'iode.

Hydrosulfate de potasse légèrement sulfuré, et peroxide concentré. — Action extrêmement vive, grand dégagement de chaleur et de gaz; précipitation de soufre, même en plongeant le tube imprégné seulement d'hydrosulfate dans la liqueur. Il se forme de l'eau et une petite quantité de sulfate.

Mêmes résultats avec la liqueur étendue d'eau, à cela près que l'action est moindre.

Kermès, et peroxide d'hydrogène concentré. — Action des plus vives, grand dégagement de chaleur et de gaz ; formation d'eau et de sulfate d'antimoine.

Le kermès est également décomposé par le peroxide d'hydrogène étendu d'eau ; mais l'action n'est point instantanée.

Volcan artificiel de Lemery, ou hydrosulfate de fer très-divisé. — Mêmes phénomènes qu'avec kermès.

De l'action des matières végétales sur le peroxide d'hydrogène.

55. Les matières végétales que j'ai mises en contact avec le peroxide d'hydrogène, sont les suivantes : les acides oxalique, acétique, tartarique, citrique, l'oxalate neutre et l'oxalate acide de potasse, l'acétate de potasse, le sucre candi, l'amidon, la gomme arabique, la fibre ligneuse, la mannite, l'huile d'olive, la sandaraque, le camphre, l'alcool, le tournesol, l'indigo.

Parmi ces matières, il n'en est aucune qui fasse effervescence avec le peroxide d'hydrogène concentré ou étendu d'eau, et qui en dégage l'oxigène, si ce n'est le tournesol, en raison de l'alcali qu'il contient.

Les acides oxalique, acétique, tartarique, citrique, loin d'en dégager ce gaz, le rendent plus stable; c'est ce qui a été démontré pour les acides en général (33). Mais il faut ajouter ici que, quand l'acide est de nature végétale, il arrive quelquefois qu'en faisant bouillir la liqueur, au lieu d'oxigène pur, on obtient un mélange d'oxigène et d'acide carbonique; d'où il est probable qu'il se forme en même temps de l'eau. Voilà ce que nous offre sur-tout l'acide tartarique. L'acide oxalique, au contraire, ne produit pas sensiblement de gaz carbonique, du moins dans le cas où la liqueur ne contient que six à sept fois son volume d'oxigène.

L'oxalate de potasse, l'acétate de potasse, le sucre, la gomme, l'amidon, la fibre ligneuse, la mannite, l'huile d'olive, la sandaraque, le camphre, l'alcool, l'indigo, pa-

58.

raissent être d'abord sans action sur le peroxide même très-concentré : car ils n'y produisent pas d'effervescence, et, plusieurs jours après, la liqueur se trouve encore très-oxigénée. Cependant, ayant mis du sucre et de l'amidon en contact avec le peroxide très-concentré, dans des tubes fermés par un bout, et surmontés à l'autre d'un très-petit tube recourbé, propre à recueillir les gaz, j'ai vu qu'au bout de plusieurs jours il se dégageait un mélange de gaz oxigène et de gaz carbonique, et que ce dégagement, très-faible à la vérité, se soutenait pendant très-long-temps. Le sucre s'est dissous de suite; quant à l'amidon, il s'est mis d'abord en gelée, et ne s'est dissous que deux jours après. Ces deux substances, dans cette réaction, sont évidemment décomposées. J'aurais bien desiré connaître les propriétés de celles qui restent en dissolution dans la liqueur; mais j'ai opéré sur trop peu de matière pour le savoir. Probablement que la plupart des matières végétales offriraient des phénomènes analogues. Le tournesol en pain produit, avec le peroxide concentré, une effervescence très-sensible, due sans doute à l'alcali que contient cette matière; la liqueur se colore en rouge au bout de quelques heures, et la couleur se trouve détruite au bout d'un jour.

Rien de semblable n'arrive avec le peroxide étendu.

De l'action des matières animales sur le peroxide d'hydrogène.

58. Nous venons de voir que les matières végétales, du moins celles que nous avons essayées, ne faisaient aucune effervescence avec le peroxide d'hydrogène : il en est de

même de presque toutes les matières animales isolées ; la fibrine est peut-être la seule qui fasse exception. Mais il en est tout autrement des organes ou des tissus organiques des animaux : tous opèrent la décomposition du peroxide à la manière de la plupart des métaux et des oxides métalliques, sans rien céder de leurs principes, sans absorber la plus petite quantité d'oxigène, sans éprouver par conséquent la moindre altération apparente, quand le peroxide n'est pas très-concentré. Ainsi, pendant la réaction, point d'azote dégagé, point d'eau ni de gaz carbonique formés ; l'oxigène de la liqueur est mis successivement en liberté. Rien de plus facile d'ailleurs à constater que ces importants résultats qui, selon moi, ne sauraient trop fixer l'attention des chimistes et des physiologistes.

Que l'on prenne de l'eau oxigénée contenant, par exemple, huit volumes d'oxigène, et dont on aura fait l'analyse par le procédé décrit (pag. 396) ; que l'on répète l'expérience analytique sur la même quantité d'eau, et qu'au lieu d'introduire de l'oxide de manganèse dans le tube renversé, plein de l'eau oxigénée et de mercure, l'on y fasse passer un peu de fibrine en longs filaments, récemment extraite du sang ; l'on remarquera que la fibrine se couvrira de bulles à l'instant ; ces bulles se succéderont rapidement ; le niveau du mercure baissera à vue d'œil, et bientôt l'effervescence cessera. Mesurant alors le gaz, l'on en trouvera autant que dans l'expérience faite avec l'oxide de manganèse, et ce gaz sera du gaz oxigène pur. Les tissus des reins, des poumons, de la rate, du foie, etc., pourraient être substitués à la fibrine ; les résultats seraient encore les mêmes : c'est ce que l'on pourra facilement voir en lisant les tableaux suivants.

Substances ou parties animales qui exercent le plus d'action sur le peroxide d'hydrogène, et qui dégagent assez promptement tout l'oxigène d'une eau qui en contient sept à huit fois son volume; chacune de ces substances formant à-peu-près la moitié du volume de la liqueur.

Fibrine en longs filaments, récemment extraits du sang.
Fibrine en petits filaments, récemment extraits du caillot.
Fibrine sèche.
Tissu du foie, en tranches minces bien lavées.
Tissu de la rate, *id.*
Tissu du poumon, *id.*
Tissu des testicules, *id.*
Tissu du cœur, *id.*
Tissu graisseux, bien lavé.
Tissu caverneux, *id.*
Choroïde, *id.*
Iris, *id.*
Matière cérébrale.

Substances ou parties animales dont l'action sur le peroxide d'hydrogène est moins grande que celle des précédentes, mais assez forte encore pour dégager en quelques heures tout l'oxigène d'une eau qui en contiendrait sept à huit fois son volume; chacune de ces substances ou parties formant à-peu-près la moitié du volume de la liqueur.

Tissu bien lavé de la peau.
Id. des tendons.
Id. des veines.
Id. des artères.

Tissu bien lavé de la matrice.
Id. de l'ovaire.
Id. de la glande thyroïde.
Id. de l'uretère.
Id. des mamelles.
Id. du canal thoracique.
Id. fibreux.
Id. absorbant.
Id. ligamenteux.
Id. séreux.
Id. nerveux organique.
Id. nerveux animal.
Moëlle.

Substances ou parties animales dont l'action sur le peroxide d'hydrogène est très-faible, et ne peut dégager que dans l'espace de quelques jours tout l'oxigène d'une eau qui en contient sept à huit fois son volume ; chacune de ces substances ou parties formant à-peu-près la moitié du volume de la liqueur.

Chair musculaire en tranche mince, bien lavée (*).
Fibro-cartilage des côtes, *id.*
Fibro-cartilage intervertébral, *id.*
Rétine.
Ongles.

(*) Il est probable que la chair n'agit faiblement que parce qu'elle n'offre pas un grand nombre de points de contact.

Substances ou parties animales dont l'action sur le peroxide d'hydrogène est loin d'être assez grande pour désoxigéner complètement en plusieurs jours une eau qui contiendrait sept à huit fois son volume d'oxigène; chacune de ces substances ou parties formant à-peu-près la moitié du volume de la liqueur.

Matière caseuse.
Cartilage.
Os.
Cheveux. (Leur action est extrêmement faible, à peine sensible; seulement ils se couvrent de bulles de temps à autre.)

Substances animales qui ne produisent pas la plus légère effervescence dans une eau contenant sept à huit fois son volume d'oxigène, et qui sont d'ailleurs sans action sur elle, du moins dans l'espace de quelques jours.

Albumine liquide.
Albumine coagulée.
Colle de poisson.
Gelée de colle.
Urée.
Acide urique.

Substances ou parties animales qui décomposent avec chaleur le peroxide d'hydrogène concentré.

Je citerai seulement la fibrine et les tissus du foie, des reins et de la rate, parce que ce sont les seules substances que j'ai essayées; mais il est probable que toutes celles qu

sont nommées dans le premier tableau, possèdent également la propriété de dégager l'oxigène du peroxide d'hydrogène concentré, en donnant lieu à de la chaleur. Peut-être même que cette propriété appartient encore à plusieurs autres. Les substances animales n'éprouvent-elles pas alors une altération provenant sur-tout de l'élévation de la température? je ne le sais pas; ce qu'il y a de certain, c'est que la quantité d'oxigène dégagée en peu de temps est considérable.

Substances ou parties animales qui ne produisent aucune effervescence avec le peroxide d'hydrogène concentré, et qui sont sans action sur lui, du moins dans l'espace de quelques jours.

Probablement que toutes les substances qui n'agissent pas sur le peroxide étendu, sont aussi sans action sur le peroxide concentré : toutefois, je n'ai fait d'essai suivi à cet égard que sur l'urée pure et cristallisée, et sur les cheveux.

L'urée est restée en contact avec le peroxide concentré, pendant plus de six jours, sans éprouver d'altération et sans donner lieu à aucun dégagement de gaz.

Les cheveux se sont ramollis peu-à-peu, et se sont dissous en vingt-quatre heures; au bout de trois jours, la liqueur paraissait être tout aussi oxigénée qu'auparavant.

Il est vrai que, dans ces deux essais, la liqueur contenait quelques atômes d'acide.

59. Il résulte évidemment des différentes expériences qui précèdent, 1° que tous les organes ou tissus organiques des animaux, ont, comme nous l'avons annoncé au commen-

cement de ce chapitre, la propriété de dégager l'oxigène de l'eau oxigénée, sans éprouver d'altération apparente; 2° que, parmi les substances animales suivantes, la fibrine, la matière caséeuse, l'albumine, la gélatine, l'urée, l'acide urique, il n'y a que la fibrine qui soit douée de cette propriété d'une manière remarquable; 3° que la matière caséeuse la possède peut-être aussi; et que l'albumine, la gélatine, l'urée, l'acide urique ne la possèdent nullement.

Mais puisque la fibrine, les tissus du poumon, de la rate, des reins, etc., ont, comme le platine, l'or, l'argent, etc., la propriété de dégager l'oxigène de l'eau oxigénée, il est très-probable que ces effets sont dus à une même force. Serait-il déraisonnable de penser, d'après cela, que c'est par une force analogue qu'ont lieu toutes les sécrétions animales et végétales? Je ne l'imagine pas : l'on concevrait ainsi comment un organe, sans rien absorber, sans rien céder, peut constamment agir sur un liquide, et le transformer en des produits nouveaux.

Des substances qui font explosion avec le peroxide d'hydrogène.

60. Certains corps sont capables de faire explosion avec le peroxide d'hydrogène; ce sont ceux qui en dégagent l'oxigène subitement. L'on en peut compter six, au moins; savoir : l'oxide d'argent, le peroxide de plomb, le peroxide de manganèse, le platine, l'osmium et l'argent. Cependant, pour que l'expérience réussisse, il faut satisfaire à deux conditions : la première est d'employer ces corps en poudre sèche et très-divisée; et la seconde, de laisser tomber, dessus, la liqueur goutte à goutte.

les essayer, on met dans un verre une petite couche de l'un de ces corps, et l'on fait tomber, dessus, une goutte un peu forte du peroxide très-concentré. A cet effet, l'on prend un tube effilé, l'on y fait monter par aspiration le peroxide jusqu'à une certaine hauteur; puis, fermant l'extrémité supérieure avec le doigt, l'on porte le tube au-dessus du verre; levant alors le doigt, et portant la tête en arrière pour ne courir aucun risque, la goutte tombe, et la petite explosion a lieu. Si la goutte touchait la paroi du verre avant l'oxide, il n'y aurait point d'explosion; il n'y aurait qu'un fort sifflement accompagné de beaucoup de chaleur. L'explosion ne se ferait pas non plus, ou du moins se ferait plus difficilement, si, au lieu de verser le peroxide d'hydrogène sur le corps qui doit le décomposer, c'était le corps que l'on projetât sur le peroxide d'hydrogène. Enfin, il est de fait qu'en employant les oxides à l'état d'hydrate, l'action est moins violente. D'ailleurs, il y a ordinairement dégagement de lumière sensible dans l'obscurité, au moment de l'explosion. Nul doute que celle-ci ne fût très-forte, si les quantités de matière étaient de quelques grammes.

De la quantité de peroxide d'hydrogène qui peut être décomposé par les corps capables de mettre l'oxigène de ce peroxide en liberté.

61. Le platine, l'or, l'argent, le palladium, le rhodium, l'iridium, l'osmium, possèdent la propriété de décomposer une quantité infinie de peroxide d'hydrogène : du moins, ayant pris successivement un décigramme de ces métaux, et les ayant mis en contact plusieurs fois de suite, chacun,

avec deux décigrammes de peroxide concentré, j'ai vu qu'ils ne perdaient rien de leur force décomposante; l'épreuve pour plusieurs a été répétée jusqu'à vingt-cinq fois, et toujours avec un égal succès.

Les oxides de manganèse, de cobalt, de plomb, et le charbon, me paraissent doués de la même propriété.

Je n'ai point fait d'expériences semblables, ni sur le plomb, ni sur le bismuth, ni sur aucun autre corps, avec le peroxide concentré; mais j'en ai fait sur tous ceux qui précèdent, et sur un grand nombre d'autres, avec le peroxide étendu d'eau. Je vais rapporter d'abord d'une manière générale les résultats que j'ai obtenus; je citerai ensuite quelques exemples.

Le platine, l'or, l'argent, les oxides de manganèse, de cobalt, de plomb, m'ont paru avoir sur le peroxide étendu d'eau, lorsqu'il n'était point acide, la même durée d'action que sur le peroxide concentré : en effet, sur quelques décigrammes de ces métaux ou oxides métalliques, j'ai versé plusieurs grammes de peroxide d'hydrogène; j'ai renouvelé la liqueur plus de trente fois, sa décomposition a toujours été complète, et la force décomposante n'était point altérée.

Il n'en a point été de même avec le bismuth, le cuivre, le nickel, le cobalt, les oxides secs de bismuth, de zinc, de nickel, le deutoxide de cuivre desséché, l'hydrate de tritoxide de fer, etc., etc., etc. L'action décomposante, quelle qu'en fût la cause, perdait évidemment de sa force peu-à-peu, si bien qu'au bout de quelques jours il y avait à peine dégagement de quelques bulles de gaz; et cependant les corps étaient intacts ou tels qu'on les avait employés d'abord.

Les matières animales ont donné lieu à des observations analogues. Plusieurs de ces matières, telles que la fibrine

extraite récemment du sang, les tissus du poumon, du foie, des reins, etc., ont dégagé pendant bien long-temps, et presque toujours avec la même force, l'oxigène de l'eau oxigénée; mais d'autres, telles que les ongles, le fibro-cartilage des côtes, et même les tendons, la peau, ont bientôt cessé d'agir presque entièrement, sans qu'il fût possible d'apercevoir d'altération sensible.

L'affaiblissement de l'action n'est point dû à ce que le peroxide devient de plus en plus rare, à mesure qu'il se dégage du gaz oxigène. Cette cause n'est tout au plus qu'accessoire : car, lorsqu'une matière n'agit plus, ou agit à peine sur une eau encore oxigénée, l'on n'a qu'à mettre celle-ci en contact avec une nouvelle quantité de cette même matière, pour rendre l'effervescence très-sensible. Il faut donc conclure de là, ou que la matière par elle-même perd insensiblement sa force d'agir, ou qu'elle ne la perd que parce qu'elle se combine avec certains corps que retient toujours la liqueur, par exemple, avec un peu de silice.

Des nouveaux oxides que l'on peut obtenir avec le peroxide d'hydrogène.

62. Ces oxides, outre le deutoxide de barium, que l'on peut aussi se procurer par l'union directe de la baryte avec l'oxigène, sont au nombre de cinq; savoir : un deutoxide de strontium, un deutoxide de calcium, un deutoxide de zinc, un tritoxide de cuivre, et un oxide de nickel. Ils sont tous caractérisés par la propriété de pouvoir se dissoudre sans effervescence à la température ordinaire, dans les acides muriatique, nitrique, etc., et de laisser dégager tout l'oxi-

gène qui les constitue peroxides, lorsqu'on chauffe la dissolution, et qu'on la porte à l'ébullition : sans doute qu'alors le peroxide, ramené à un degré inférieur d'oxidation, s'unit à l'acide, que l'oxigène s'unit à l'eau, et que c'est l'eau oxigénée qui se trouve décomposée au moment où l'on élève la température. Nous allons examiner ces oxides successivement.

Du deutoxide de strontium.

63. Le meilleur moyen d'obtenir le deutoxide de strontium est de prendre de l'eau oxigénée acide qui contienne dix à douze fois son volume d'oxigène, et que l'on se procure en traitant le peroxide de barium par l'acide muriatique, et la dissolution par l'acide sulfurique (6) ; l'on y verse peu-à-peu un excès d'eau de strontiane, et tout-à-coup l'on voit se précipiter une foule de petites lames blanches, brillantes et satinées : c'est le deutoxide à l'état d'hydrate. Comme il se dépose avec la plus grande facilité, et qu'il est à peine soluble dans l'eau, il faut le laver par décantation, deux fois au moins, en se servant à cet effet d'une longue éprouvette à pied ; après quoi on le jette sur un filtre et on le lave de nouveau, mais sur le filtre même, et jusqu'à ce que les eaux de lavage ne troublent plus le nitrate acide d'argent. Pour le sécher, on le laisse étendu sur le filtre ; on comprime celui-ci entre plusieurs doubles de papier, et on le met sous la machine pneumatique, etc. Si l'on voulait opérer la dessiccation de l'oxide par la chaleur, on le décomposerait en presque totalité ; dans le vide, il s'en décompose même une quantité sensible, quoique la température soit toujours très-basse. Ajoutons ici une observation importante : l'on peut employer

une liqueur oxigénée acide, qui contienne encore une petite quantité d'oxide de fer ou d'oxide de manganèse, pourvu qu'on la filtre aussitôt que l'acide est sursaturé par la strontiane; tout l'oxide de fer et tout l'oxide de manganèse se précipitent, et dès-lors, en continuant l'opération, l'on obtient un deutoxide de strontium pur.

Le deutoxide de strontium est blanc, brillant, satiné, inodore, presque insipide; il rougit sensiblement le papier de curcuma. Je ne connais point sa densité. Vu en suspension dans la liqueur, au moment de sa formation, il a tout-à-fait l'aspect de la nacre, sur-tout lorsqu'on le met en mouvement; et cet aspect devient des plus agréables à l'œil, lorsqu'en même temps l'oxide, qui se présente sous la forme de paillettes nombreuses, est éclairé par la lumière solaire.

Soumis à l'action du feu, le deutoxide de strontium se décompose et se transforme en gaz oxigène et en protoxide. La chaleur de la lampe est bien plus que suffisante pour produire cette décomposition.

Projeté sur les charbons incandescents, il en augmente la combustion, comme le font certains nitrates qui n'entrent en fusion que difficilement. Probablement qu'il se comporterait de même avec beaucoup d'autres corps combustibles.

Lorsqu'il est sec, il ne s'altère pas à la température ordinaire; mais, lorsqu'il est humide, il se décompose peu-à-peu: aussi voit-on se dégager de temps en temps des bulles d'oxigène de celui que l'on conserve sous l'eau.

Si l'eau froide finit par décomposer le deutoxide de strontium, il doit en être de même, à plus forte raison, de l'eau chaude. En effet, que l'on fasse chauffer de l'eau avec ce deutoxide, et bientôt il en résultera un dégagement assez

ra
le
fo

ta
so
tia

dé
po

ti
po
so
ox
qu
su
dr
de
ce
n'y
co
qu
ju
un
de
de
on
de



y fera passer de l'oxide de manganèse délayé dans l'eau. A peine le contact aura-t-il lieu, que tout l'oxigène qui constituait le peroxide se dégagera; de sorte que, pour l'obtenir, il suffira de mesurer le gaz, après avoir toutefois renversé et agité le tube à plusieurs reprises. Une observation fort importante à faire, c'est que la dissolution du deutoxide de strontium ne doit point être acide; si elle l'était, la quantité d'oxigène dégagé serait trop grande; elle contiendrait un peu de gaz appartenant à l'oxide de manganèse lui-même (49).

Cette opération étant faite, on remplit à plusieurs reprises, comme nous venons de le dire, la pipette de la dissolution de deutoxide de strontium; on réunit la liqueur tout entière, y compris les eaux de lavage, dans un creuset de platine pesé d'avance avec son couvercle; on y ajoute un petit excès d'acide sulfurique, qui s'unit à la strontiane et met l'acide muriatique en liberté, et l'on entoure le creuset de charbons incandescents, afin de dessécher peu-à-peu le sulfate de strontiane sans produire de soubresauts; on le chauffe ensuite jusqu'au rouge, on le pèse de nouveau, et, retranchant du nouveau poids le premier, on en conclut celui du sulfate, et par conséquent de la strontiane.

J'ai répété cette expérience analytique cinq fois, tantôt en mesurant les liqueurs, et tantôt en les pesant; j'ai toujours vu que la quantité d'oxigène dégagée était très-sensiblement le double de ce qu'en contient la strontiane.

65. Avant de suivre la méthode que je viens de décrire, j'en avais employé une autre qui consistait à faire sécher l'hydrate sous la machine pneumatique, à l'introduire en-

suite dans une petite cornue soufflée à la lampe, et à le chauffer pour en dégager l'oxigène : la cornue était pesée trois fois, vide, après y avoir mis le deutoxide, et après la calcination. Tout l'air des vases était recueilli; mais, à la fin de l'expérience, il y rentrait autant de gaz qu'il en était sorti d'air. Enfin la strontiane qui restait dans la cornue était unie à l'acide sulfurique, afin de s'assurer qu'elle ne contenait point d'eau, ou de déterminer combien elle en contenait. Cette manière d'opérer devait donner, ce semble, des résultats exacts; cependant j'ai toujours trouvé moins d'oxigène par cette méthode que par l'autre : c'est qu'il paraît que, pendant la dessiccation, l'eau de l'hydrate réagit sur la strontiane et chasse une portion d'oxigène du deutoxide. L'on ne préviendrait point ce dégagement, quand bien même on laverait tout de suite l'hydrate à l'alcohol.

Du deutoxide de calcium.

66. L'histoire du deutoxide de calcium est absolument analogue à celle du deutoxide de strontium. Même préparation. Mêmes propriétés physiques, si ce n'est qu'on peut obtenir le premier en lames brillantes, nacrées d'une part, et en poudre de l'autre : sous la première forme, en ajoutant l'eau de chaux peu-à-peu dans l'eau oxigénée acide; sous la seconde, en ajoutant beaucoup de cette base à-la-fois. Même action sur le feu, sur l'eau, sur le charbon, sur les acides, etc. Même décomposition lente, lorsqu'il est à l'état d'hydrate, et qu'on l'abandonne à lui-même. Même méthode enfin pour en déterminer la proportion des principes.

Je n'ai analysé que le deutoxide cristallisé : il contenait deux fois autant d'oxigène que la chaux. Je pense que celui

qui est en poudre est dans le même cas : il faudrait pourtant le soumettre à l'analyse, car il serait possible qu'il fût formé de chaux et d'oxigène dans une autre proportion que le précédent.

Du deutoxide de barium.

67. La préparation du deutoxide de barium ayant été décrite avec un grand soin dans un des précédents articles (5), nous ajouterons seulement qu'on peut aussi obtenir ce deutoxide par un procédé analogue à celui que l'on est forcé d'employer pour se procurer les deutoxides de strontium et de calcium. En effet, lorsqu'on verse de l'eau de baryte concentrée dans de l'eau oxigénée pure ou acide, contenant dix à douze fois son volume d'oxigène, il se forme une si grande quantité de paillettes nacrées d'hydrate de deutoxide de barium, que la liqueur se prend en masse.

Cet hydrate, de même que celui de deutoxide de calcium, a des propriétés analogues à l'hydrate de deutoxide de strontium. J'observerai cependant qu'il a plus de saveur alcaline; qu'il rougit davantage le papier de curcuma; qu'il est moins insoluble dans l'eau, et qu'il est plus facilement décomposable par elle à chaud : du reste, impossible de le sécher sous la machine pneumatique sans qu'il s'en dégage du gaz oxigène.

Quant au deutoxide pur résultant de l'action du gaz oxigène sur la baryte, il est, comme nous l'avons déja dit, à peine sapide, d'un gris blanc : l'eau froide le délite sans l'échauffer; l'eau bouillante le décompose en chassant une portion de son oxigène. A une haute température, il paraît qu'il se désoxigène, et qu'il passe à l'état de protoxide ou de baryte. Son

action sur les divers corps combustibles est bien connue. J'ajouterai à ce qu'on sait déja de celle qu'il exerce sur les acides, ce qui suit : Vainement l'on mettrait le deutoxide délité en contact avec l'acide sulfurique étendu d'eau, dans l'espérance d'obtenir du sulfate de baryte et de l'eau oxigénée; ce ne serait que dans l'espace de beaucoup de temps que tout le deutoxide serait complètement attaqué, et que tout l'oxigène reprendrait à mesure l'état gazeux. Ayant mis environ 10 grammes de deutoxide bien délité dans une éprouvette pleine de mercure, et y ayant ensuite ajouté un grand excès d'acide sulfurique étendu, j'ai vu qu'au bout d'un mois l'action n'était pas terminée, et que l'oxigène se dégageait continuellement sous forme de petites bulles, surtout au moment où l'on venait agiter la masse du liquide.

Je dirai aussi, au sujet de l'action des acides sur le deutoxide de barium, que l'acide nitrique attaque ce deutoxide bien moins facilement que ne le fait l'acide muriatique; que toutefois il est possible de se procurer promptement une eau oxigénée chargée d'acide nitrique; qu'il suffit, pour cela, d'ajouter de temps à autre de l'acide nitrique à la liqueur oxigénée acide, d'y ajouter ensuite du deutoxide de barium, et de laisser reposer un instant la liqueur : il s'en sépare beaucoup de cristaux de nitrate de baryte; et lorsqu'on trouve que la liqueur est assez chargée, on n'a plus qu'à la dépouiller d'oxide de fer, d'oxide de manganèse, de silice et d'alumine, par les procédés indiqués (7 et 8), et d'y verser ensuite assez d'acide sulfurique pour en précipiter la baryte.

L'analyse du deutoxide de barium a été faite avec les mêmes soins et de la même manière que celles des deut-

oxides de calcium et de strontium ; comme eux, il contient le double de l'oxigène du protoxide. J'ai aussi essayé de l'analyser en le chauffant avec du gaz hydrogène sec ; mais la quantité d'hydrogène absorbé n'a jamais été tout-à-fait jusqu'au double de celle du gaz oxigène uni à la baryte, sans doute parce qu'il est toujours resté, au centre de la matière, une portion de peroxide sur laquelle l'hydrogène ne pouvait point avoir d'action. On sait que, quoique l'absorption ait lieu très-rapidement et avec dégagement de lumière, qu'il se fasse beaucoup d'eau, il n'apparaît aucune trace d'humidité dans la cloche; que le tout se trouve transformé en hydrate de baryte très-fusible : aussi la proportion des principes de cet hydrate s'accorde-t-elle bien avec celle du deutoxide que nous venons de donner.

Du tritoxide de cuivre.

68. L'on peut obtenir le tritoxide de cuivre en versant de l'eau oxigénée chargée d'acide nitrique dans une dissolution faible de nitrate de cuivre, et y ajoutant ensuite peu-à-peu une dissolution faible elle-même de potasse ou de soude caustique. Il faut que l'eau oxigénée soit en grand excès, que les liqueurs soient à la température de zéro, qu'on les agite bien au moment de leur mélange, et que la quantité d'alcali soit tout au plus suffisante pour décomposer tout le nitrate cuivreux. En satisfaisant à toutes ces conditions, il se formera un précipité gélatineux d'un brun jaune ; ce sera le tritoxide de cuivre : on le lavera tout de suite par décantation, ou sur un filtre avec de l'eau bien froide ; puis, si l'on veut le conserver, on le fera sécher promptement sous

la machine pneumatique, après l'avoir comprimé entre des feuilles de papier joseph.

L'on peut encore préparer ce tritoxide, et ce procédé est peut-être plus sûr que le premier, en mettant en contact de l'hydrate de deutoxide de cuivre avec de l'eau oxigénée, contenant sept à huit fois seulement son volume d'oxigène. Si l'hydrate, au moment où on l'emploiera, commençait à perdre de sa nuance bleue, l'expérience ne réussirait qu'incomplètement : pour éviter cet inconvénient, je ne connais qu'un moyen, c'est d'étendre la dissolution de cuivre, d'en amener la température à zéro, d'y verser une dissolution faible de potasse à cette même température, de laver l'hydrate avec de l'eau également à zéro, et de faire tout de suite le tritoxide. A mesure que l'on versera l'eau oxigénée sur l'hydrate, il changera de couleur; il deviendra vert d'abord, puis vert-jaunâtre, puis enfin d'un brun-jaune-foncé : bien entendu qu'il faudra agiter le tout, et mettre un grand excès d'eau oxigénée; il sera même nécessaire de refroidir celle-ci avant de l'employer, et de refroidir en même temps les vases. On remarquera qu'au moment du contact il n'y aura pas d'effervescence, mais que, bientôt après, lorsque l'hydrate sera devenu d'un brun-jaune-foncé, il s'en fera une qui serait capable de devenir assez vive. On la préviendra en grande partie, en étendant la liqueur d'eau très-froide : cette précaution est indispensable, car le tritoxide, en chassant l'oxigène de l'excès d'eau oxigénée, se décomposerait lui-même par suite de la température à laquelle se trouveraient élevées sans doute les molécules. D'ailleurs on lavera et l'on fera, si l'on veut, sécher le tritoxide, comme nous l'avons indiqué plus haut.

Le tritoxide de cuivre est sans odeur, sans saveur; il n'altère point le tournesol. Pur, il est, comme nous l'avons dit, d'un brun-jaune-foncé; mais, mêlé avec l'oxide bleu de cuivre, il donne lieu à une couleur olive. Une température peu élevée, moindre que celle de l'eau bouillante, suffit pour le décomposer; alors il laisse dégager de l'oxigène, et passe à l'état de deutoxide. Lorsqu'il est sous forme d'hydrate, il se décompose même spontanément, du jour au lendemain, pourvu qu'on l'entretienne humide. Son action sur les charbons incandescents est assez forte; il en augmente la combustion tout-à-coup. Probablement qu'il agirait beaucoup aussi sur un grand nombre d'autres combustibles; par exemple, il détonnerait sans doute avec le phosphore par une faible percussion. Il est tout-à-fait insoluble dans l'eau. Les acides sulfurique, nitrique, muriatique, le dissolvent tout-à-coup, et de là résultent des sels de deutoxide de cuivre et de l'eau oxigénée. A peine est-il en contact, sous forme d'hydrate, avec une dissolution un peu concentrée de potasse ou de soude, qu'il commence à se désoxigéner; les bulles finissent par se succéder assez rapidement, de sorte qu'il se décompose presque complètement dans l'espace de quelques heures : l'alcali agit donc, dans ce cas, sur l'oxigène du tritoxide, de même que sur l'oxigène de l'eau oxigénée.

69. J'ai fait un grand nombre de tentatives pour analyser le tritoxide de cuivre; et cependant je ne suis point parvenu à des résultats tout-à-fait satisfaisants. Je n'ai point employé le procédé que j'ai décrit pour l'analyse des peroxides de strontium, calcium et barium, parce que l'excès

d'acide que l'on est forcé d'ajouter pour dissoudre le nouvel oxide, rendrait l'opération plus difficile à pratiquer. J'ai mieux aimé introduire le tritoxide dans une petite fiole, la remplir d'eau distillée et non aérée presque jusqu'au col, y verser assez d'acide nitrique ou muriatique pour opérer la dissolution de l'oxide métallique, adapter au col de la fiole un tube recourbé, porter peu-à-peu la liqueur à l'ébullition, la faire bouillir de manière à en dégager tout l'oxigène et tout l'air, recueillir les gaz, les mesurer, les analyser, et conclure de cette analyse la quantité d'oxigène cherchée. En m'y prenant ainsi, j'ai retiré, à un douzième près en moins, du tritoxide de cuivre, autant d'oxigène que le deutoxide en contient. Si l'on considère que ce tritoxide se décompose facilement, il deviendra très-probable, ce semble, qu'il en contient réellement le double.

Du deutoxide de zinc.

70. Le deutoxide de zinc peut se préparer comme le tritoxide de cuivre : une remarque importante, c'est que, quand on le fait directement avec le protoxide, il faut nécessairement employer celui-ci à l'état de gelée ; sans ce
ne se suroxiderait pas.

Pur, le deutoxide est blanc ; la plus petite quantit
rend jaune : d'ailleurs ses propriétés sont analogu
tritoxide de cuivre. Ainsi il est insipide, inodo
sur le tournesol, décomposable spontanén
raison au degré de chaleur de l'eau bouill
furique, nitrique, muriatique, le diss
à des sels de protoxide de zinc et
J'ai toujours trouvé que la q
1818.

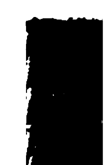
vait en extraire, était un peu plus de la moitié de celle que contient le protoxide. Je suis porté à croire, d'après cela, que l'oxide sur lequel j'ai opéré n'était pas entièrement suroxidé : une nouvelle analyse devient indispensable.

D'un nouvel oxide de nickel.

71. Je n'ai point, à beaucoup près, autant examiné cet oxide que les précédents. Tout ce que je puis assurer, c'est qu'ayant ajouté de l'eau oxigénée à du nitrate de nickel, et ayant ensuite versé peu-à-peu de la potasse dans la dissolution, j'ai obtenu un précipité d'un blanc vert-sale, qui avait des propriétés semblables à celles qui caractérisent les oxides de cuivre et de zinc dont il vient d'être question. Par exemple, mis en contact avec les acides sulfurique, nitrique et muriatique, il s'y dissolvait; et pour peu qu'on chauffât la liqueur, il s'en dégageait du gaz oxigène. Cependant, comme je n'ai point analysé cet oxide, son existence ne me paraît pas aussi bien démontrée que celle des autres : il se pourrait que le dégagement du gaz oxigène, que j'attribue à une suroxidation du nickel, provînt de quelques matières étrangères contenues dans le nitrate dont je me suis servi.

Des différents oxides qui, dans leur contact avec divers acides, et sur-tout avec l'acide muriatique, peuvent produire de l'eau oxigénée.

72. Ces oxides sont au nombre de huit; savoir : les deutoxides de barium, de strontium, de calcium, de zinc, le tritoxide de cuivre, et les peroxides de nickel, de potassium et de sodium. Nous n'avons rien à ajouter à ce que nous



ture élevée : elle a tant d'analogie avec la potasse et la soude, que je suis porté à le croire. J'ai tenté l'expérience sur un peu de lithine que je tenais de la bienveillance de M. Arfwedson, à qui la belle découverte de ce nouvel alcali est due : malheureusement, la petite cornue dont je me servais a cassé, et, par suite, la matière s'est trouvée altérée au point que je n'ai pu recommencer l'opération.

Il était important de faire beaucoup de recherches sur la question de savoir s'il n'y avait pas d'autres oxides capables de former de l'eau oxigénée. En supposant qu'il y en eût, ils devaient se rencontrer parmi les peroxides, qui sont trop oxigénés pour s'unir aux acides. C'est pourquoi j'ai essayé successivement les peroxides de manganèse, de plomb et de cobalt. Ces oxides ont été mis en contact, à la température ordinaire, avec l'acide sulfurique, avec l'acide nitrique et l'acide muriatique, à différents degrés de concentration. Dans aucun cas l'eau ne s'est oxigénée, et toujours avec l'acide muriatique il y a eu dégagement de chlore. Il est bien remarquable que l'acide muriatique soit décomposé dans ces circonstances, et qu'il ne le soit pas par les peroxides alcalins et les peroxides de zinc et de cuivre. Dira-t-on que c'est parce que, dans les peroxides de manganèse, de plomb et de cobalt, l'oxigène est très-condensé? mais il l'est plus encore dans ceux de potassium, de sodium, de barium. Dira-t-on le contraire? mais il est moins condensé dans les peroxides de zinc et de cuivre.

De la cause à laquelle peut être due la décomposition du peroxide d'hydrogène par les métaux, etc.

73. Après avoir exposé tous les phénomènes que présente l'eau oxigénée ou le peroxide d'hydrogène dans son contact avec la plupart des corps, il faudrait en rechercher la cause. Malheureusement, nous ne pouvons former jusqu'à présent que des conjectures à cet égard.

Puisque le platine, l'or, l'argent, l'oxide de manganèse, etc., n'éprouvent aucune altération en décomposant le peroxide d'hydrogène; qu'ils ne s'approprient aucun de ses éléments; que le peroxide abandonne tout de suite la moitié de son oxigène, et qu'il est ramené à l'état d'eau, l'action est toute différente de ce qu'elle paraît être dans la production des phénomènes chimiques. En effet, lorsqu'un corps en décompose un autre, c'est en se substituant à l'un des principes de celui-ci; c'est en donnant lieu à un nouveau composé. Mais ici rien de semblable : le corps décomposant ne prend la place d'aucun des corps qu'il rend libre; il ne s'engage dans aucune combinaison nouvelle; il agit, en quelque sorte, comme par répulsion. De semblables résultats ne peuvent s'expliquer par l'affinité, du moins telle qu'on la conçoit ordinairement; ils ne peuvent être produits que par une cause physique. Or, on ne peut les attribuer ni au calorique, ni à la lumière, ni, selon toute apparence, au fluide magnétique : l'on est donc conduit à les attribuer au fluide électrique.

Il était nécessaire, d'après cela, de s'assurer si, ment de la décomposition du peroxide d'hydrog

avait pas une certaine quantité de fluide positif ou de fluide négatif qui devenait libre : c'est ce qui a été fait avec beaucoup de soins en employant l'électromètre à feuilles d'or, surmonté d'un condensateur ; une seule fois les feuilles se sont écartées d'une manière sensible ; mais, comme en répétant l'expérience à plusieurs reprises, les mêmes signes ne se sont point manifestés, on les a attribués à une cause étrangère. On a cherché aussi à savoir si le peroxide d'hydrogène éprouverait quelque altération, en le mettant en communication avec un des pôles d'une pile composée de 350 paires; et l'on a vu qu'il s'y conservait parfaitement intact, ou plutôt que la faible effervescence que l'on observait n'était due qu'à l'action de la plaque sur laquelle il était placé. Enfin on l'a soumis au courant de la pile ; il en est résulté des effets analogues à ceux que l'on observe avec l'eau, si ce n'est que le dégagement du gaz oxigène était beaucoup plus considérable.

En reconnaissant l'électricité pour cause primitive, il est possible de concevoir son action de plusieurs manières. L'une d'elles consisterait à supposer que, dans le peroxide d'hydrogène, l'eau ou l'hydrogène serait électrisé positivement, et l'oxigène négativement ; la combinaison n'aurait lieu que sous cette influence électrique. Lorsqu'on mettrait certains corps en contact avec le peroxide d'hydrogène, ces corps réuniraient les deux fluides ; et de-là, de l'eau, de l'oxigène et de la chaleur. Celle-ci proviendrait de la combinaison subite du fluide positif avec le fluide négatif, et serait quelquefois assez grande pour réduire quelques oxides, tels que ceux d'argent, de mercure, d'or, etc.

Quelle que soit, au reste, la cause des phénomènes que

nous avons rapportés dans ce Mémoire, et sa manière d'agir, n'est-il pas très-probable que c'est la même qui en produit beaucoup d'autres. Par exemple, ne peut-on pas lui attribuer la détonation de l'ammoniure d'argent, du chlorure et de l'iodure d'azote? ne joue-t-elle pas un rôle dans celle de toutes les poudres fulminantes? ne serait-ce pas elle qui donnerait au gaz ammoniaque la propriété d'être décomposé plus ou moins facilement par les métaux? n'aurait-elle pas une grande influence sur la transformation du sucre en alcohol et en acide carbonique par quelques centièmes de ferment, dans l'acte de la fermentation? Ce qu'il y a de certain, du moins, c'est qu'elle ouvre aux chimistes une carrière nouvelle, destinée peut-être à s'agrandir considérablement. Il faut faire de nouvelles recherches pour la dévoiler plus qu'elle ne l'est encore, et en même temps pour trouver un procédé à l'aide duquel on puisse se procurer plus commodément le peroxide d'hydrogène.

ADDITIONS.

1.re J'ai dit (*pag.* 389) que le seul moyen d'avoir de la baryte exempte d'oxide de manganèse, d'oxide de fer, de silice et d'alumine, serait de calciner le nitrate de baryte dans des vases de platine; mais il est probable que ces vases présenteraient d'autres inconvénients : ils seraient légèrement attaqués par le nitrate, au moment de sa décomposition; en sorte que la baryte contiendrait, en combinaison intime, un peu d'oxide de platine qui pourrait être très-nuisible à la préparation de l'eau oxigénée. Cependant, avant

de renoncer à l'emploi de ces vases, il conviendrait d'en faire l'essai.

II.ᵉ Lorsqu'on met de l'acide sulfurique étendu d'eau en contact avec le peroxide de barium, la réaction semble être presque nulle; seulement il se dégage des bulles d'oxigène de temps à autre, sur-tout par l'agitation du mélange; ce dégagement se soutient pendant des mois entiers, etc. (*voy. la page* 477.) J'en ai conclu que, dans ce cas, il ne se produisait point d'eau oxigénée; mais peut-être qu'il s'en forme une petite quantité, et que le faible dégagement qu'on observe ne provient que de cette eau oxigénée, décomposée par le deutoxide non encore attaqué.

III.ᵉ Il serait possible que la rosée de l'eau précipitée des gaz par le froid, contînt du deutoxide d'hydrogène, et que l'on pût s'en servir pour préparer ce deutoxide. Cet essai mérite d'être fait, sur-tout en plaçant, autant que possible, les matières sous l'influence électrique.

ADDITION

AU

MÉMOIRE SUR LA FIGURE DE LA TERRE,

Inséré dans le volume précédent;

PAR M. DE LAPLACE.

LES expériences multipliées du pendule ont fait voir que l'accroissement de la pesanteur suit une marche fort régulière, et à-très-peu-près proportionnelle au quarré du sinus de la latitude. Cette force étant la résultante des attractions de toutes les molécules terrestres, ses observations comparées à la théorie de l'attraction des sphéroïdes, offrent le seul moyen qui puisse nous faire pénétrer dans la constitution intérieure de la terre; et, sous ce rapport, elles sont très-importantes pour l'avancement de la géologie. J'ai publié sur cet objet, dans le volume précédent, un théorême fondé sur une propriété remarquable de l'attraction que les corps placés à la surface d'une sphère, exercent sur un point situé près de cette surface.

Si l'on imagine un fluide très-rare, et qui, en s'élevant à une petite hauteur, enveloppe la terre entière et ses montagnes, ce fluide prendra un état d'équilibre; et j'ai fait voir, dans le volume cité, que les points de sa surface ex-

térieure seront tous également élevés au-dessus de la mer. Les points intérieurs des continents, autant abaissés que ceux de la surface de la mer, au-dessous de la surface extérieure du fluide supposé, forment par leur continuité ce que je nomme *niveau prolongé de la mer.* La hauteur d'un point des continents au-dessus de ce niveau, sera déterminée par la différence de pression du fluide, à ce point et au niveau de la mer, différence que les observations du baromètre feront connaître : car notre atmosphère, supposée réduite par-tout à sa densité moyenne, devient le fluide que nous venons d'imaginer.

Cela posé, « concevons que la terre soit un sphéroïde homogène d'une forme quelconque, et recouvert en partie par la mer. Si l'on prend pour unité la longueur du pendule à secondes à l'équateur; et si à la longueur de ce pendule, observée à un point quelconque de la surface du sphéroïde terrestre, on ajoute la moitié de la hauteur de ce point au-dessus du niveau de l'Océan, hauteur que donne l'observation barométrique; l'accroissement de cette longueur ainsi corrigée, sera égal au produit du quarré du sinus de la latitude, par cinq quarts du rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur, ou par 43 dix-millièmes. »

Ce théorême est vrai à-très-peu-près, quelles que soient la deusité de la mer, et la manière dont elle recouvre en partie la terre, dans le cas même où la surface des continents serait discontinue, et formée de plusieurs surfaces tangentes les unes aux autres: il s'étend aux plateaux élevés, un peu vastes, pourvu qu'ils soient de même densité que le sphéroïde terrestre. Enfin il n'est point sensiblement altéré par l'attraction des montagnes éloignées. Il me paraît mériter

d'autant plus l'attention des analystes, que, dans tous ces cas où il donne une expression si simple de la pesanteur, il est impossible de déterminer la figure de la mer.

Les expériences du pendule faites dans les deux hémisphères, s'accordent à donner au quarré du sinus de la latitude, un coëfficient qui surpasse 43 dix-millièmes, et à-peu-près égal à 54 dix-millièmes ; il est donc bien prouvé par ces expériences, que la terre n'est point homogène dans son intérieur, et que les densités de ses couches croissent de la surface au centre.

Mais la terre, hétérogène dans le sens mathématique, serait homogène dans le sens chimique, si l'accroissement de la densité de ses couches n'était dû qu'à l'accroissement de la pression qu'elles éprouvent, à mesure qu'elles sont plus près du centre. On conçoit, en effet, que le poids immense des couches supérieures peut augmenter considérablement leur densité, dans le cas même où elles ne seraient pas fluides : car on sait que les corps solides se compriment par leur propre poids. La loi des densités résultantes de ces compressions étant inconnue; nous ne pouvons pas savoir jusqu'à quel point la densité des couches terrestres peut ainsi s'accroître.

La densité d'un gaz quelconque est proportionnelle à sa compression, lorsque sa température reste la même. Cette loi, trouvée juste dans les limites de densité des gaz où l'on a pu l'éprouver, ne peut évidemment convenir aux liquides et aux solides dont la densité est très-grande relativement à celle des gaz, lorsque la pression est très-petite ou nulle. Il est naturel de penser que ces corps résistent d'autant plus à la compression, qu'ils sont plus comprimés; en sorte

que le rapport de la différentielle de la pression à celle de la densité, au lieu d'être constant, comme dans les gaz, croît avec la densité : la fonction la plus simple qui puisse représenter ce rapport, est la première puissance de la densité, multipliée par une constante. C'est celle que j'ai adoptée, parce qu'elle réunit à l'avantage de représenter de la manière la plus simple ce que nous savons sur la compression des liquides et des solides, celui de se prêter facilement au calcul, dans la recherche de la figure de la terre. Jusqu'ici les géomètres n'ont point fait entrer dans cette recherche, l'effet résultant de la compression des couches. M. Young vient d'appeler leur attention sur cet objet, par la remarque ingénieuse, que l'on peut expliquer de cette manière l'accroissement de densité des couches du sphéroïde terrestre. J'ai pensé que l'on verrait avec intérêt l'analyse suivante, de laquelle il résulte qu'il est possible de satisfaire ainsi à tous les phénomènes connus, dépendants de la loi de densité de ces couches. Ces phénomènes sont : les variations des degrés des méridiens et de la pesanteur; la précession des équinoxes; la nutation de l'axe terrestre; les inégalités que l'aplatissement de la terre produit dans le mouvement de la lune; enfin le rapport de la moyenne densité de la terre à celle de l'eau, rapport que Cavendish a fixé, par une belle expérience, à $5\frac{1}{2}$. En partant de la loi précédente sur la compression des liquides et des solides, je trouve que si la terre était entièrement formée d'eau, son aplatissement serait $\frac{1}{360}$; le coëfficient du quarré du sinus de la latitude, dans l'expression de la longueur du pendule à secondes, serait 59 dix-millièmes ; et la densité moyenne de la terre serait neuf fois celle de l'eau. Tous ces résultats s'écartent des observa-

tions au-delà des limites des erreurs dont elles sont susceptibles.

Si l'on suppose la terre formée d'une substance homogène dans le sens chimique, dont la densité soit $2\frac{1}{4}$ de celle de l'eau commune, et qui, comprimée par une colonne verticale de sa propre substance, égale à la millionième partie du demi-axe terrestre, augmente en densité, de 5,5345 millionièmes de sa densité primitive; on satisfait à tous les phénomènes que je viens de citer. L'existence d'une telle substance est très-admissible, et il y en a vraisemblablement de pareilles à la surface de la terre. Au reste, je suis loin d'affirmer que ce cas soit celui de la nature; il est même probable, vu la grande variété des substances qui sont à la surface de la terre, que, dans l'intérieur de cette planète, il en existe semblablement un grand nombre qui n'ont pu être disposées régulièrement autour de son centre de gravité, que dans un état primitif de fluidité due à une chaleur excessive. Mais l'hypothèse d'une substance unique, dont les couches ne varient en densité que par la compression qu'elles éprouvent, n'offrant rien d'impossible, elle m'a paru digne de l'attention des géomètres.

Je suppose la température uniforme dans toute l'étendue du sphéroïde terrestre; mais il est possible que la chaleur soit plus grande vers le centre, et cela serait ainsi dans le cas où la terre, douée primitivement d'une grande chaleur, se refroidirait continuellement. L'ignorance où nous sommes de la constitution intérieure de cette planète, ne nous permet pas de calculer la loi de ce refroidissement et la diminution qui en résulte dans la température moyenne des climats;

mais nous pouvons établir d'une manière certaine, que cette diminution est insensible depuis deux mille ans.

Imaginons dans un espace d'une température constante, une sphère douée d'un mouvement de rotation; concevons ensuite qu'après un long temps la température de l'espace diminue d'un degré; la sphère finira par prendre ce nouveau degré de température : sa masse n'en sera point altérée; mais ses dimensions diminueront d'une quantité que je suppose être un cent-millième, ce qui a lieu à-peu-près pour le verre. En vertu du principe des aires, la somme des aires que chaque molécule de la sphère décrit autour de son axe de rotation, sera, dans un temps donné, la même qu'auparavant. Il est facile d'en conclure que la vîtesse angulaire de rotation sera augmentée d'un cinquante-millième. Ainsi, en supposant que la durée de la rotation soit d'un jour ou de cent mille secondes décimales, elle sera diminuée de deux secondes par la diminution d'un degré dans la température de l'espace. Si l'on étend cette conséquence à la terre, et si l'on considère que la durée du jour n'a pas varié, depuis Hipparque, d'un centième de seconde, comme je l'ai fait voir par la comparaison des observations avec la théorie de l'équation séculaire de la lune; on jugera que, depuis cette époque, la variation de la chaleur intérieure de la terre est insensible. A la vérité, la dilatation, la chaleur spécifique, la perméabilité plus ou moins grande à la chaleur et la densité des diverses couches du sphéroïde terrestre, toutes choses inconnues, peuvent mettre une différence sensible entre les résultats relatifs à la terre, et ceux de la sphère que nous venons de considérer, suivant lesquels une diminution d'un centième de seconde dans la durée du jour ré-

pond à une diminution d'un deux-centième de degré dans la température. Mais cette différence ne peut jamais élever d'un deux-centième de degré à un dixième, la perte de la chaleur terrestre, correspondante à la diminution d'un centième de seconde dans la durée du jour. On voit même que la diminution d'un centième de degré près de la surface suppose une diminution plus grande dans la température des couches inférieures : car on sait qu'à la longue la température de toutes les couches diminue suivant la même progression géométrique; en sorte que la diminution d'un degré près de la surface répond à des diminutions plus grandes dans les couches plus voisines du centre. Les dimensions de la terre et son moment d'inertie diminuent donc plus que dans le cas de la sphère que nous avons imaginée. Il suit de là, que si, dans la suite des temps, l'on observe quelques changements dans la hauteur moyenne du thermomètre placé au fond des caves de l'Observatoire; il faudra l'attribuer, non à une variation dans la température moyenne de la terre, mais à un changement dans le climat de Paris, dont la température peut varier par beaucoup de causes accidentelles. Il est remarquable que la découverte de la vraie cause de l'équation séculaire de la lune nous fasse connaître en même temps l'invariabilité de la durée du jour, et celle de la température de la terre, depuis l'époque des plus anciennes observations.

Je reprends l'équation (1) du n° 29 du troisième livre de la *Mécanique céleste :* en la différenciant, et ne comparant que les termes constants de ses deux membres, on aura

$$\frac{d\Pi}{\rho} = -\frac{4\pi . da}{a^2} . \int \rho a^2 \, da;$$

Π est ici la pression à la surface d'une couche de niveau du sphéroïde terrestre dont le rayon est a; ρ est la densité de cette couche, et π est le rapport de la circonférence au diamètre. L'intégrale doit être prise depuis $a=0$. Maintenant, si l'on suppose $d\Pi=2k\rho\, d\rho$, k étant une constante, on aura

$$\Pi=k\rho^2-k(\rho)^2;$$

(ρ) étant la densité à la surface où Π est nul; l'équation précédente donnera donc

$$\frac{d\rho}{da}=-\frac{n^2}{a^2}.\int\rho a^2\, da,$$

en faisant $n^2=\frac{2\pi}{k}$. Supposons $\rho'=a\rho$, on aura

$$a^2\, d\rho=a\,d\rho'-\rho';$$

l'équation précédente devient ainsi

$$\frac{a\,d\rho'}{da}-\rho'=-n^2\int a\rho'.da.$$

En différenciant, on aura

$$\frac{dd\rho'}{da^2}+n^2\rho'=0.$$

L'intégrale de cette équation est

$$\rho'=\text{A}.\sin.\,an+\text{B}.\cos.\,an;$$

A et B étant deux constantes arbitraires. On aura donc

$$\rho=\frac{\text{A}}{a}\cdot\sin.\,an+\frac{\text{B}}{a}\cdot\cos.\,an.$$

La densité n'étant point infinie au centre où a est nul, on a $\text{B}=0$; par conséquent,

$$\rho=\frac{\text{A}}{a}.\sin.\,an.$$

Telle est donc la loi de densité des couches du sphéroïde terrestre, relative à la loi supposée entre la pression et la densité. A la surface de la terre, où nous supposerons $a=1$, on a

$$\rho = A.\sin. n,$$
$$\frac{d\rho}{da} = -A.\sin. an.\left(1 - \frac{n}{\tang. n}\right).$$

En faisant donc à cette surface

$$\frac{-\left(\frac{d\rho}{da}\right)}{\rho} = q,$$

on aura

$$q = 1 - \frac{n}{\tang. n}. \qquad (a)$$

Si l'on nomme D la moyenne densité de la terre, on aura

$$\int \rho\, a^2\, da = D.\int a^2\, da = \tfrac{1}{3} D.$$

Or, l'équation

$$\frac{d\rho}{da} = \frac{-n^2}{a^2}.\int \rho\, a^2\, da,$$

donne à la surface

$$q\rho = n^2.\int \rho\, a^2\, da;$$

on a donc

$$\frac{D}{\rho} = \frac{3q}{n^2}; \qquad (b)$$

$\frac{D}{\rho}$ étant le rapport de la densité moyenne de la terre, à la densité de la couche à sa surface. Cette équation, combinée avec l'équation (a), donnera q et $\frac{D}{\rho}$, lorsque l'une de ces deux quantités sera connue.

Mais il existe deux autres éléments que les observations

font connaître, et qui, dépendant comme q et D de la loi de densité des couches du sphéroïde terrestre, sont liés aux quantités précédentes. L'un de ces éléments est l'ellipticité du sphéroïde. Si l'on nomme h l'ellipticité de la couche du sphéroïde dont le rayon est a, et la densité ρ; on a, par le nº 30 du livre cité,

$$\frac{ddh}{da^2} - \frac{6h}{a^2} + \frac{2\rho a}{\int \rho a^2 da} \cdot \left(\frac{a\,dh + h\,da}{da} \right) = 0.$$

Si l'on met cette équation sous la forme

$$0 = \frac{d^2.(h.\int \rho a^2 da)}{da^2} - \frac{6h\int \rho.a^2 da}{a^2} - \frac{h a^2 d\rho}{da};$$

et si, au lieu de $\frac{d\rho}{da}$,

on substitue sa valeur $\frac{-n^2}{a^2} \cdot \int \rho\, a^2\, da$,

on aura

$$0 = \frac{d^2.(h\int \rho' a\,da)}{da^2} - \frac{6h.\int \rho' a\,da}{a^2} + n^2\, h.\int \rho'.a\,da.$$

Il est facile de voir que l'on satisfait à cette équation, en faisant

$$h.\int \rho' a\,da = B\rho'.\left(1 - \frac{3}{n^2 a^2}\right) + \frac{3\,B.d\rho'}{n^2 a.da};$$

B étant une arbitraire, et en observant que $\frac{dd\rho'}{da^2} = -n^2 \rho'$. Cette expression donne, en substituant pour ρ' sa valeur A.*sin. an*,

$$h = B.\left(\frac{n^2.tang.\,an}{tang.\,an - na} - \frac{3}{a^2}\right);$$

expression qui devient nulle au centre. On voit par le nº 30 du livre cité, que cette expression de h est la seule admis-

sible dans la question présente : par le même numéro, l'ellipticité de la terre est à la surface, où $a = 1$,

$$\frac{\alpha\varphi . h . \int \rho' \, a \, da}{2h . \int \rho' \, a \, da - \frac{3}{5} a^5 \, h + \frac{2}{5} \int a^5 \, h \, d\rho};$$

les intégrales étant prises depuis a nul. $\alpha\varphi$ est le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur.

Substituant au lieu de $h d\rho$, $-\frac{h n^2}{a^2} . \int \rho' \, a \, da$; et, au lieu de $h \int \rho' \, a \, da$, sa valeur précédente, on aura

$$\int a^5 \, h \, d\rho = - n^2 . \mathrm{B} . \int a^3 . \left(\rho' - \frac{3\rho'}{n^2 a^2} + \frac{3 \, d\rho'}{n^2 \, a \, da}\right) . da.$$

On aura facilement cette intégrale, en observant que l'on a généralement

$$\int a^i \rho' \, da = - \frac{1}{n^2} \int a^i . \frac{dd\rho'}{da},$$

et en intégrant par parties. On trouvera ainsi à la surface de la terre, où $a = 1$, l'ellipticité égale à

$$\frac{\frac{5}{2} \alpha\varphi . \left(1 - \frac{3q}{n^2}\right)}{3 - q - \frac{n^2}{q}}.$$

Je dois observer ici que M. Legendre a déja déterminé l'aplatissement de la terre, dans le cas où la densité ρ des couches est exprimée par $\frac{\mathrm{A}}{a} . \sin . an$. *(Mémoires de l'Académie des Sciences, année 1789.)*

En combinant les phénomènes de la précession et de la nutation, avec les inégalités lunaires dépendantes de l'apla-

tissement de la terre, et avec les observations des degrés des méridiens et de la pesanteur, je suis parvenu, dans le tome II des *Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences*, à cette équation

$$\frac{\int \rho . d . a^5}{\int \rho . d . a^3} = \frac{0{,}00153}{0{,}001736}.$$

Cette équation suppose le rapport de la masse de la lune, divisée par le cube de sa moyenne distance à la terre, à la masse du soleil, divisée par le cube de sa moyenne distance, égal à 2,57. Mais si ce rapport était $3{,}57 . i - 1$, i étant une indéterminée, on aurait

$$\frac{\int \rho . d . a^5}{\int \rho . d . a^3} = \frac{i . 0{,}00153}{0{,}001736}.$$

Or, on a

$$\frac{\int \rho . a^4 \, da}{\int \rho . a^2 \, da} = 1 + \frac{2}{q} - \frac{6}{n^2};$$

on aura donc

$$1 + \frac{2}{q} - \frac{6}{n^2} = i . 0{,}52880.$$

On a ainsi les quatre équations suivantes :

$$q = 1 - \frac{n}{tang. n};$$

$$D = \frac{3q}{n^2};$$

$$\text{ellipticité de la terre} = \frac{0{,}00865 . \left(1 - \frac{3q}{n^2}\right)}{3 - q - \frac{n^2}{q}};$$

$$1 + \frac{2}{q} - \frac{6}{n^2} = i . 0{,}52880.$$

Si l'on suppose $n = \frac{5}{6} \cdot \pi$, π étant le rapport de la circonférence au diamètre, on aura

$$q = 5,5345;$$

$$\frac{D}{\rho} = 2,4225;$$

$$\text{ellipticité} = \frac{1}{306,6};$$

$$i = 0,919;$$

le rapport de la densité du centre, à celle de la surface, sera $\frac{5}{3}\pi$, ou 5,236; et la nutation en secondes sexagésimales sera 9″,32. L'ellipticité précédente satisfait à l'ensemble des observations des degrés, de la pesanteur et des inégalités lunaires dépendantes de l'aplatissement de la terre. La nutation 9″,30 est à-fort-peu-près celle qui résulte des observations de la hauteur et de l'ascension droite de l'étoile polaire. En supposant, conformément à l'expérience de Cavendish, le rapport de la moyenne densité de la terre à celle de l'eau égal à 5,5, la densité de la couche de la surface sera 2,27, celle de l'eau étant prise pour unité.

Si la terre était entièrement formée d'eau; en supposant, conformément aux expériences de Canton, qu'à la température de 16° centigrades, elle augmente en densité, de 44 millionièmes, sous la pression d'une colonne d'eau de dix mètres, on a

$$q = 28,012;$$

d'où l'on tire

$$n = 3,02970;$$

$$\frac{D}{\rho} = 9{,}0479;$$

$$\text{ellipticité} = \frac{1}{359{,}54};$$

le coëfficient du quarré du sinus de la latitude, dans l'expression de la longueur du pendule à secondes, la longueur à l'équateur étant prise pour unité, est égal à 0,00587; enfin la nutation est en secondes sexagésimales 8″,6. Tous ces résultats s'éloignent des observations, au-delà des limites des erreurs dont elles sont susceptibles.

DE L'IMPRIMERIE DE FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS,
IMPRIMEURS DU ROI ET DE L'INSTITUT, RUE JACOB, N° 24.

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANALYSE

Des Travaux de l'Académie royale des Sciences, pendant l'année 1818.

PARTIE MATHÉMATIQUE,

PAR M. LE CHER DELAMBRE, SECRÉTAIRE-PERPÉTUEL.

M. le marquis de Laplace a lu à l'Académie plusieurs Mémoires importants, qui sont des développements extrêmement curieux des théories qu'il a démontrées dans sa *Mécanique céleste*. L'auteur en a lui-même donné des extraits dans la *Connaissance des Temps;* mais ces extraits, rédigés pour des géomètres et des astronomes, offrent encore une multitude de formules que nous devons nous interdire dans cette Analyse, et pour lesquelles, suivant l'usage constant, nous renverrons aux Mémoires. Nous nous bornerons donc ici à rapporter les théorêmes les plus clairs et les consé-

quences les plus importantes. Le premier Mémoire a pour titre : *De la Rotation de la Terre.*

Depuis le temps d'Hipparque jusqu'à nous, la durée du jour n'a pas changé d'un centième de seconde. L'axe de la rotation de la terre est aussi invariable à sa surface, que la vîtesse de rotation; il répond toujours aux mêmes points de la terre : les observations les plus exactes ne font apercevoir aucun changement dans les latitudes géographiques. Il y a cent ans, Cassini s'efforçait de démontrer cette vérité, dont il n'osait pourtant répondre absolument : il affirmait simplement, que s'il existait quelque variation dans la hauteur du pôle, elle devait être extrêmement petite. Aujourd'hui on peut donner comme une chose certaine, que la terre se meut uniformément autour d'un axe invariable.

On sait que tous les corps solides ont trois axes principaux rectangulaires autour desquels ils peuvent tourner uniformément, l'axe de rotation demeurant en repos. Cette propriété remarquable est-elle commune aux corps qui, comme la terre, sont recouverts d'un fluide? les actions du soleil et de la lune influent sur la figure de la mer qui, par-là, varie sans cesse. Parmi les forces d'où naissent les phénomènes du flux et du reflux, il en est de variables; mais ces dernières étant incomparablement moindres que la force centrifuge, la variation qu'elles produisent dans la figure permanente de la terre, est insensible. Une petite agitation dans un océan de mercure, qui remplacerait nos mers, suffirait pour le répandre sur les continents terrestres. Cette infériorité qu'on a reconnue dans la densité de la mer, est une suite de la fluidité primitive de la terre, car alors les couches les plus denses ont dû se porter vers le centre : les considérations théoriques se réunissent avec

les expériences du pendule pour indiquer, avec une grande probabilité, qu'en vertu d'une chaleur excessive, toutes les parties de la terre ont été primitivement fluides.

« Les lois de la mécanique et de la pesanteur universelle « suffisent donc pour donner à la mer un état ferme d'équili-« bre, qui n'est que très-peu altéré par les attractions célestes. « Sa pesanteur, qui la ramène sans cesse vers cet état, et sa « densité moindre que celle de la terre, conséquences néces-« saires de ces lois, sont les véritables causes qui la main-« tiennent dans ces limites et l'empêchent de se répandre « sur les continents, condition nécessaire à la conservation « des êtres organisés. La nécessité de cette condition pour-« rait paraître une raison suffisante de son existence; mais « on doit bannir de la philosophie naturelle ce genre d'ex-« plications qui en arrêteraient infailliblement les progrès. « Il faut rattacher autant qu'il est possible les phénomènes « aux lois de la nature, et savoir s'arrêter quand ce but ne « peut pas être atteint; se rappelant toujours que la vraie « marche de la philosophie consiste à remonter, par la voie « de l'induction et du calcul, des phénomènes aux lois et des « lois aux forces. »

De ces recherches l'auteur passe à la considération du mouvement du système formé de la terre et de la lune. Il fait voir, qu'abstraction faite de l'action du soleil, le nœud ascendant de l'orbite lunaire sur le plan invariable de ce système, coïncide toujours avec le nœud descendant de l'équateur terrestre, et que ces nœuds ont un mouvement rétrograde uniforme, les plans de l'orbe lunaire et de l'équateur conservant, sur le plan invariable, des inclinaisons constantes.

L'action du soleil modifie les résultats précédents : elle im-

prime aux nœuds de l'orbe lunaire et du plan du *maximum* des aires, des mouvements tels que ces deux plans se réunissent toujours à l'équateur; le plan du *maximum* des aires partageant l'angle formé par l'équateur et l'orbe lunaire en deux angles dont les sinus sont en raison constante. Le mouvement rétrograde des nœuds de la lune, combiné avec l'action de cet astre sur le sphéroïde terrestre, donne naissance à la nutation; et la réaction de ce sphéroïde sur la lune, produit les deux inégalités lunaires dépendantes de l'aplatissement de la terre. Ces inégalités, comparées par MM. Burg et Burckhardt à des milliers d'observations, s'accordent à donner $\frac{1}{305}$ pour l'aplatissement de la terre; ce qui diffère peu de l'aplatissement $\frac{1}{309}$ ou $\frac{1}{310}$, qui résulte des mesures des degrés terrestres. « Mais si l'on considère, d'une part, les irré« gularités que présentent ces mesures, et de l'autre part « l'accord des *deux* inégalités lunaires et le nombre immense « d'observations qui ont servi à déterminer leurs coëfficients, « on jugera que ces inégalités offrent les moyens les plus « précis de connaître la vraie figure de la terre. »

Ici commencent les calculs analytiques par lesquels on prouve qu'il existe dans un sphéroïde quelconque recouvert d'un fluide, un axe autour duquel le système du sphéroïde et du fluide peut tourner uniformément, l'axe de rotation étant invariable; que dans les mouvements respectifs de l'équateur terrestre et de l'orbe lunaire, ces deux plans conservent une intersection commune et des inclinaisons constantes sur le plan invariable, et que cette intersection a un mouvement séculaire rétrograde et uniforme; enfin que l'inégalité connue sous le nom de *nutation*, produit, par la réaction du sphéroïde terrestre sur la lune, une inégalité

correspondante dans l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique.

Le second Mémoire a pour titre:

Sur l'influence de la grande inégalité de Jupiter et de Saturne dans le mouvement des corps du système solaire.

Cette grande inégalité, dont la période est de neuf siècles, s'élève à un tiers de degré pour Jupiter, et à quatre cinquièmes de degré pour Saturne; par l'action de ces deux grands corps, elle se répand sur tout le système solaire. Heureusement, les coëfficients des inégalités produites par cette cause dans les éléments des planètes sont insensibles: elles ne sont que d'une seconde centésimale environ pour Mars et Uranus; de six dixièmes de seconde pour la terre, et d'une seconde centésimale pour la lune. L'effet est plus sensible pour les satellites de Jupiter. Les coëfficients en secondes centésimales sont:

1″ pour le premier, 12″,8 pour le second, 18″,8 pour le troisième, et 44″,3 pour le quatrième. Heureusement encore, le mouvement de ces satellites est si rapide, que si ces quatre coëfficients sont, comme les précédents, des fractions de degré et non de temps, on peut dire encore que ces inégalités se perdent dans les incertitudes des observations. Elles n'altèrent en rien le rapport remarquable qui existe entre les mouvements des trois premiers satellites.

Le troisième Mémoire est intitulé:

Sur la loi de la pesanteur, en supposant le sphéroïde terrestre homogène et de même densité que la mer.

Dans l'hypothèse de l'homogénéité du sphéroïde terrestre,

l'analyse conduit à une expression très-simple de la pesanteur à la surface de la mer, et qui offre cela de remarquable, savoir : que si la mer est de même densité que le sphéroïde, la pesanteur à sa surface est indépendante de sa figure. Pour un point quelconque, situé, soit à la surface de la mer, soit à celle d'un continent ou d'une île, la pesanteur est égale à une constante, plus le produit du quarré du sinus de la latitude par cinq quarts du rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur, moins le produit de la pesanteur à l'équateur par la moitié de la hauteur du point au-dessus du niveau de la mer, hauteur que l'on peut déterminer par le baromètre ; le rayon moyen de la terre est pris pour unité.

Cette loi ne s'accordant pas avec les expériences du pendule, faites dans les deux hémisphères; l'hypothèse de l'homogénéité est donc exclue par ces expériences, qui prouvent, de plus,

1° Que la densité des couches du sphéroïde terrestre croît de la surface au centre;

2° Que ces couches sont, à-très-peu-près, régulièrement disposées autour du centre de gravité de la terre;

3° Que la surface de ce sphéroïde, dont la mer recouvre une partie, a une figure peu différente de celle qu'elle prendrait en vertu des lois de l'équilibre, si elle devenait fluide;

4° Que la profondeur de la mer est une petite fraction de la différence des deux axes de la terre;

5° Que les irrégularités de la terre et les causes qui troublent sa surface ont peu de profondeur;

6° Enfin que la terre entière a été primitivement fluide.

« Ces résultats de l'analyse et de l'expérience semblent de-

« voir être placés dans le petit nombre des vérités que nous « offre la géologie. »

Les deux Mémoires suivants, de M. Poisson, roulent de même sur deux points fondamentaux du systême du monde, qui ne peuvent être éclaircis que par la plus savante analyse; l'un a pour objet la *précession des équinoxes*, l'autre *la libration de la lune*.

« La théorie de la variation des constantes arbitraires, dans « les questions de mécanique, a l'avantage remarquable de « faire dépendre de la même analyse, et de comprendre dans « les mêmes formules, les solutions des deux problêmes prin- « cipaux de l'astronomie physique, savoir : la détermination « du mouvement d'une planète autour de son centre de gra- « vité, et celle du mouvement de ce centre autour du soleil. « Dans un premier Mémoire sur cette théorie, en en faisant « l'application au mouvement de rotation de la terre, j'ai « trouvé pour exprimer les différentielles des deux éléments « qui déterminent la position de l'équateur, des formules « exactement semblables à celles qui se rapportent aux lon- « gitudes des nœuds et aux inclinaisons des orbites plané- « taires. L'usage de ces formules pour déterminer les dé- « placements séculaires de l'équateur, peut être beaucoup « simplifié, en observant que la terre étant recouverte par un « fluide en équilibre à sa surface, la fonction dépendante des « forces perturbatrices que ces formules renferment, est don- « née immédiatement en série convergente par la théorie « connue de l'attraction des sphéroïdes : or, en combinant « cette série avec les expressions déduites de la variation des

« constantes, il en résultera.... la solution la plus simple et « la plus directe du problême de la précession. »

Ce phénomène singulier, découvert par Hipparque, mieux déterminé par les Arabes, et confirmé depuis par les observations de tous les astronomes modernes, était resté sans explication jusqu'à Newton. Le mécanisme en avait été indiqué par Copernic, et cette partie était la plus neuve et la plus ingénieuse de son livre fameux *des Révolutions célestes.* Il avait, sans nécessité, compliqué son explication de considérations étrangères et tout-à-fait inutiles, dont elle fut débarrassée par Kepler. La cause physique restait inconnue. L'imagination hardie de Kepler fut arrêtée par une difficulté qui véritablement était alors insurmontable. Newton démontra que, dans le systême de la pesanteur universelle, la terre devait être aplatie, et que de cet aplatissement résultait l'explication si long-temps desirée. Tous les plus grands géomètres du siècle dernier reprirent et perfectionnèrent le calcul de Newton. M. Poisson vient de le réduire à ses moindres termes. Mais, malgré toutes ces simplifications, il s'en faut encore de beaucoup que la démonstration ne soit élémentaire; elle dépendra toujours d'une analyse profonde. On a pu rendre le phénomène sensible à la vue par une machine très-ingénieuse, qui ne peut en aucune manière en donner la mesure. L'analyse elle-même ne la fait connaître qu'approximativement; et long-temps encore on n'aura que les observations astronomiques pour déterminer avec une exactitude suffisante le mouvement de la précession.

Sur la libration de la lune; par M. Poisson.

« Suivant les lois de ce phénomène, découvertes par D. Cassini, et confirmées par la belle analyse de M. Lagrange, « la lune tourne sur elle-même dans le même temps qu'elle « achève sa révolution moyenne autour de la terre; son équa- « teur conserve une inclinaison constante sur l'écliptique, et « le nœud descendant de cet équateur coïncide avec le nœud « moyen ascendant de l'orbite lunaire. M. de Laplace a prouvé « que ces résultats ne sont troublés, ni par l'équation sécu- « laire du moyen mouvement de la lune, ni par les dépla- « cements séculaires de l'écliptique : on peut aussi s'assurer « qu'ils ne sont pas non plus modifiés par l'équation sécu- « laire qui affecte le moyen mouvement du nœud de la lune; « mais ils ne conviennent qu'à la vîtesse moyenne de rota- « tion et à un état moyen de l'équateur lunaire, et la théorie « montre que cette vîtesse, l'inclinaison de l'équateur, et la « distance de son nœud à celui de l'orbite, sont assujetties « à des inégalités périodiques dont les *maxima* dépendent « des rapports qu'ont entre eux les moments d'inertie de la « lune. M. Lagrange a donné l'expression des principales « inégalités de la vîtesse de rotation; pour que la théorie ne « laissât rien à desirer sur ce sujet, il ne restait donc plus qu'à « déterminer les inégalités de l'inclinaison et du nœud : c'est « ce que je me suis proposé de faire, en reprenant en entier « la solution de ce problême, et en poussant l'approximation « jusqu'aux termes du second ordre par rapport aux élé- « ments de l'orbite lunaire, lesquels termes renferment les « inégalités dont il est question. Je me bornerai à donner les « formules auxquelles je suis parvenu, et je supprimerai les

« détails des calculs qui m'y ont conduit, et qui ne sont qu'un « développement de l'analyse de M. Lagrange. »

Ces dernières lignes ne signifient pas qu'on ne trouvera aucune formule dans le Mémoire; elles sont, au contraire, indispensables pour faire connaître les changements que les expressions ont subis par l'introduction des termes du second ordre. L'auteur considère successivement les diverses inégalités de la longitude du nœud; la seconde est connue, elle est environ un cinquante-cinquième de l'inclinaison moyenne : il prouve que la première est moindre qu'un vingt-septième de cette même inclinaison. Deux inégalités semblables se retrouvent dans la distance du nœud de l'équateur à celui de l'orbite. Par la seconde, les deux nœuds s'écarteront l'un de l'autre de plus d'un degré : le *maximum* de la première ne passera pas deux degrés.

M. Bouvard a trouvé que la distance de ces nœuds est de 2°; Mayer en avait trouvé quatre, mais dans un sens contraire. La différence entre ces deux résultats peut s'attribuer en partie aux erreurs de l'observation, et en partie aux inégalités qui font varier cette distance.

L'auteur cherche ensuite l'influence que peuvent avoir ces diverses inégalités sur les longitudes et les latitudes des taches de la lune, vues du centre de ce satellite. Il en donne l'expression analytique, qu'il faudrait comparer aux observations, pour en conclure les différences entre les moments d'inertie du sphéroïde lunaire, ainsi que les deux constantes relatives à la tache observée. C'est une comparaison dont M. Nicollet s'est chargé, et dont il se propose de publier les résultats aussitôt qu'il en aura obtenu de satisfaisants.

Sur l'application de l'algèbre à la théorie des nombres; par M. Poinsot.

(Voyez les Mémoires.)

Mémoire sur l'intégration d'une classe particulière d'équations différentielles, et *Mémoire sur l'intégration des équations aux différences partielles, du premier ordre à un nombre quelconque de variables; par M.* Cauchy.

Note rédigée par l'auteur sur le dernier de ces deux Mémoires.
27 janvier 1818.

Jusqu'à présent il n'est aucun traité de calcul intégral où l'on ait donné les moyens d'intégrer complétement les équations aux différences partielles du premier ordre, quel que soit le nombre des variables indépendantes. M'étant occupé il y a plusieurs mois de cet objet, je fus assez heureux pour obtenir une méthode générale propre à remplir le but desiré. Mais, après avoir terminé mon travail, j'ai appris que M. Pfaff, géomètre allemand, était parvenu, de son côté, aux intégrales des équations ci-dessus mentionnées. Comme il s'agit ici d'une des questions les plus importantes du calcul intégral, et que la méthode de M. Pfaff est différente de la mienne, j'ai pensé qu'une analyse abrégée de cette dernière pourrait intéresser les géomètres. En conséquence, je l'expose ici, en profitant, pour simplifier l'exposition, de quelques remarques faites par M. Coriolis, ingénieur des ponts-et-chaussées, et de quelques autres qui me sont depuis peu venues à l'esprit. Ainsi simplifiée, la méthode dont j'ai fait

usage fournit, à ce qu'il me semble, la solution la plus simple que l'on puisse donner de la question proposée. On en jugera par les considérations suivantes.

Supposons, pour fixer les idées, que l'équation aux différences partielles proposée, renferme, avec les trois variables indépendantes x, y, z, une fonction inconnue u de ces trois variables, et les dérivées partielles p, q, r de la fonction u, par rapport à ces mêmes variables.

Pour que la valeur de u soit complétement déterminée, il ne suffira pas de savoir qu'elle doit vérifier l'équation donnée aux différences partielles. Il sera, de plus, nécessaire d'ajouter une condition; par exemple, d'assujettir la fonction u à recevoir, pour une valeur donnée, x_0 de la variable x, une certaine valeur, fonction des variables y et z. La fonction de y et de z, dont il est ici question, pouvant être choisie à volonté, est la seule fonction arbitraire que doive renfermer l'intégrale générale de l'équation aux différences partielles. Il est d'ailleurs facile, à l'aide des principes déja connus, de ramener l'intégration de cette équation aux différences partielles, à l'intégration de cinq équations différentielles entre les six quantités

$$x, y, z, u, q, r,$$

considérées comme fonctions d'une seule variable; et toute la difficulté se réduit à savoir ce que l'on doit faire des cinq constantes arbitraires introduites par l'intégration de ces cinq équations différentielles. Or, la méthode que je propose consiste à éviter l'introduction de ces constantes, ou plutôt à remplacer les constantes arbitraires par des valeurs particulières, attribuées aux inconnues y, z, u, q, r, et à intégrer

les cinq équations différentielles, de manière que pour $x=x_0$, on ait $y=y_0$, $z=z_0$, $u=u_0$, $q=q_0$, $r=r_0$; y_0, z_0 désignant deux nouvelles variables, u_0 une fonction arbitraire de ces mêmes variables, semblable à la fonction arbitraire de y et de z, qui représente la valeur de u pour $x=x_0$, et q_0, r_0 les deux dérivées partielles de u_0 relatives à y_0 et à z_0. Si, entre les cinq équations intégrales ainsi obtenues, on élimine q et r, il ne restera plus que trois formules, dont le système sera propre à représenter l'intégrale générale de l'équation aux différences partielles. Ces trois formules renfermeront les quantités variables x, y, z, u; la quantité constante x_0, les deux nouvelles variables y_0, z_0, et la fonction arbitraire de ces nouvelles variables représentée par u_0, ainsi que ses dérivées du premier ordre relatives à y_0 et à z_0. Ce n'est qu'après avoir fixé la fonction arbitraire dont il s'agit, qu'on pourra, en éliminant les nouvelles variables y_0, z_0, obtenir l'équation finie qui détermine u en fonction de x, y, z.

Rien n'empêche de conserver dans le calcul, avec les quantités variables x, y, z, u, q, r, la quantité p; si l'on observe d'ailleurs qu'on peut échanger entre elles, relativement aux rôles qu'elles jouent, les variables indépendantes x, y, z, on obtiendra; par l'intégration générale d'une équation aux différences partielles à trois variables indépendantes, et même à un nombre quelconque de variables, la règle qui suit :

Substituez, par les moyens ordinaires, à l'équation aux différences partielles donnée, autant d'équations différentielles du premier ordre (moins une) qu'elle renferme de quantités variables, y compris les variations indépendantes, la fonction inconnue et ses dérivées partielles. Les variables indépendantes seront traitées symétriquement dans les équa-

tions différentielles dont l'une pourra être remplacée par l'équation aux différences partielles données.

Cela posé, intégrez les équations différentielles dont il s'agit, par rapport à toutes les variables qu'elles renferment, à partir de certaines limites que vous considérerez comme de nouvelles variables, assujetties aux mêmes relations que les premières. Regardez ensuite, dans les équations intégrales obtenues, l'une des nouvelles variables indépendantes, comme réduite à une quantité constante, et les autres comme devant être éliminées. Vous aurez un système de formules propres à représenter l'intégrale générale de l'équation aux différences partielles données. Ces formules ne renferment qu'une seule fonction arbitraire avec ses divisions partielles du premier ordre, savoir la nouvelle variable qui correspond à la fraction inconnue, et que l'on doit considérer comme une fonction arbitraire de celles des nouvelles variables qui doivent être éliminées.

Mémoire sur les vibrations des surfaces élastiques; par M. Fourier.

(Voyez les Mémoires.)

MÉMOIRES LUS A L'ACADEMIE,

ET QUI NE NOUS ONT PAS ENCORE ÉTÉ COMMUNIQUÉS.

Note sur le perfectionnement du colorigrade; par M. Biot.

Sur l'utilité des lois de la polarisation de la lumière, pour reconnaître l'état de cristallisation et de combinaison dans les cas où le système cristallin n'est pas immédiatement observable; par M. Biot.

OUVRAGES IMPRIMÉS.

Exercices de calcul intégral, construction des tables elliptiques ; suite du tome III.

M. Legendre poursuit sa vaste et utile entreprise. La détermination des fonctions E et F, selon les diverses valeurs de l'amplitude et du module, est encore l'objet qu'il s'est proposé dans la continuation de ces recherches. « On peut y « parvenir, soit par le moyen d'une table particulière dres- « sée pour chaque valeur donnée de l'angle du module; « soit par le moyen d'un système de tables, qui seraient « construites en faisant varier, par des intervalles égaux et « suffisamment petits, l'amplitude et l'angle du module. » L'auteur discute les avantages et les difficultés de chacun de ces deux systêmes. Le dernier suppose une entreprise dont l'exécution ne peut être que fort éloignée. Pour en aplanir au moins les difficultés, les tables VIII et IX offrent aux calculateurs un travail préparatoire, qui déja peut suppléer en partie aux tables plus étendues qui restent à desirer; mais, comme elles ne procèdent que de degré en degré, tant pour l'amplitude que pour l'angle du module, leur interpolation sera nécessairement plus difficile ou moins exacte que si ces intervalles étaient plus petits.

Pour éviter les doubles interpolations, il faudrait nécessairement revenir au premier moyen; mais le calcul de la table qu'il suppose est si long, qu'il faudrait avoir un grand nombre de fonctions à calculer sur le même module, pour se livrer à un travail préliminaire aussi considérable: pour atteindre plus facilement le même but, l'auteur montre qu'un tableau formé

de quelques lignes seulement, d'après un module donné, peut servir à calculer jusqu'à dix décimales, ou plus, les fonctions E et F correspondantes à une valeur quelconque de l'amplitude φ; et qu'il suffit pour cela d'ajouter au calcul ordinaire de l'interpolation, celui de quelques formules trigonométriques très-faciles. La méthode se simplifierait sensiblement si l'on se bornait à sept décimales; mais on la trouve exposée avec détail, et appliquée à des exemples, avec tous les soins nécessaires, pour que l'exactitude des résultats puisse être garantie jusqu'à la quatorzième décimale. Cette précision ne sera peut-être jamais nécessaire : elle est la limite du degré d'exactitude auquel on peut parvenir par les tables connues. La table des logarithmes des nombres, moyennant quelques artifices de calcul, pourrait donner jusqu'à 20 ou 22 décimales; mais au-delà de ce nombre, il faut revenir aux calculs arithmétiques ordinaires, par lesquels seuls on peut obtenir un degré d'exactitude indéfini.

Telle est en substance l'introduction mise par l'auteur en tête d'un ouvrage dont il nous est impossible de donner une idée plus nette et plus complète. Le lecteur le trouvera riche en formules, en développements pleins d'adresse, et en tables subsidiaires, calculées scrupuleusement, les unes jusqu'à dix et les autres jusqu'à quatorze décimales, avec les différences jusqu'au 3e ou 4e ordre.

Histoire de l'astronomie du moyen âge. Vol. in-4°, de 700 pages, avec 17 planches. Par M. DELAMBRE.

L'auteur appelle moyen âge de l'astronomie l'intervalle écoulé depuis l'époque à laquelle les Grecs ayant cessé d'é-

crire, ont été remplacés par les Arabes, les Persans et les Tartares, jusqu'à celle où Copernic, en rendant à la terre le mouvement que l'on avait attribué faussement au soleil, a mérité d'être appelé le premier fondateur de l'astronomie moderne. Les Arabes ont conservé religieusement les théories des Grecs; ils n'ont rien changé ni à la forme des instruments, ni à la manière de s'en servir; mais ils en ont eu de plus grands et de mieux divisés; leurs observateurs ont été plus nombreux; et dès les temps d'Almamoun on voit déja des améliorations sensibles dans les éléments de la théorie du soleil, dans l'obliquité de l'écliptique et la précession des équinoxes. L'introduction des sinus et sinus verses par Albategnius, celle des tangentes par Aboul-Wéfa; celle des arcs subsidiaires pour simplifier une formule complexe, par Ebn-Jounis, ont changé entièrement la face du calcul astronomique. Les Arabes ont marqué avec plus de précision le temps des phénomènes. Albategnius avait tiré de l'analemme une règle en deux parties, pour trouver la hauteur d'un astre par la hauteur du pôle, la déclinaison et l'angle horaire. C'est la formule fondamentale de la trigonométrie moderne. Le même auteur a modifié cette formule en substituant les sinus verses aux cosinus, pour trouver l'heure par la hauteur d'un astre dont on connaît la déclinaison et l'ascension droite. Il paraît cependant que les Arabes ont fait peu d'usage de cette seconde règle, et que, le plus souvent, ils ont trouvé suffisant de déterminer l'heure à la manière d'Hipparque, au moyen de l'astrolabe, ou planisphère, qui leur servait à observer la hauteur et les dispensait du calcul trigonométrique. On a vu dans l'astronomie ancienne, que Hipparque avait imaginé cet instrument pour trouver l'heure, la nuit, au

moyen d'une étoile; à plus forte raison savait-il la déterminer le jour par le soleil.

En adoptant l'astronomie des Grecs, les Arabes ne se sont pas montrés moins soigneux à recueillir les rêveries astrologiques des Chaldéens : ils y appliquèrent leur trigonométrie, imaginèrent de nouveaux systêmes pour la division du ciel en douze maisons. Ces méthodes, perfectionnées par Régiomontanus, et sur-tout par Magini, ont été traduites en formules modernes; on les verra toutes appliquées au calcul de la même *géniture* : on pourra juger de leurs différences et des incertitudes qu'elles devaient ajouter à des prédictions dont les principes fondamentaux étaient d'ailleurs une foule de suppositions purement arbitraires, fruits de la crédulité ou plutôt du charlatanisme.

La gnomonique, qui n'est plus aujourd'hui qu'une application curieuse de l'astronomie, en constituait alors une partie intégrante, par la commodité qu'offraient de bons cadrans solaires pour donner les heures civiles et pour régler les clepsydres. Sans rien changer à la théorie des Grecs, les Arabes, en étudiant l'analemme de Ptolomée, ont su en tirer des solutions plus faciles et plus variées; ils ont inventé nombre de cadrans soit fixes, soit portatifs : Aboul-Hhasan a tiré des sections coniques des règles curieuses pour tracer les arcs des signes d'une manière indépendante des lignes horaires. Ses méthodes n'avaient pourtant ni la simplicité ni la généralité qu'il était possible de donner à ses pratiques inutilement compliquées. Il n'avait pas vu que, pour tous les cadrans qu'on peut décrire sur un plan, le paramètre de la section est toujours le même, puisqu'il est égal à deux fois la cotangente de la déclinaison du soleil, et qu'il ne dépend

ni de la section conique, ni de la hauteur du pôle sur le plan. Personne encore n'avait aperçu ce théorême; personne n'avait songé à disposer l'équation générale des sections coniques d'une manière adaptée spécialement à la gnomonique. On donne cette équation, qui ne dépend que de la hauteur du pôle, de la déclinaison du soleil, et enfin de la hauteur du gnomon, qu'il convient de prendre pour unité. De cette même formule on verra découler une méthode graphique extrêmement simple pour décrire les arcs des signes, dont le calcul trigonométrique est toujours beaucoup plus long, et exige en outre l'angle horaire du plan. Aboul-Hhasan a fait le premier cette remarque curieuse, que tout plan peut être considéré comme l'horizon d'un lieu dont il est facile de déterminer la longitude et la latitude géographique; le premier, il a donné la projection du pôle sur le plan, et par conséquent un point commun à toutes les lignes horaires équinoxiales; le premier il a parlé de substituer ces heures toujours égales aux heures antiques et temporaires, dont les Arabes faisaient exclusivement usage, à l'imitation des Chaldéens et des Grecs.

La gnomonique, en passant en Europe, a éprouvé d'autres changements: au style droit on substitua un axe dont l'ombre tout entière va successivement couvrir toutes les lignes horaires; on imagina pour les arcs des signes des constructions graphiques qui, mises en formules, se sont trouvées identiques aux méthodes modernes. Mais les Européens ne démontrent rien, non plus que les Arabes; leurs ouvrages sont souvent inintelligibles; pour se démontrer leurs pratiques obscures, leur historien a senti la nécessité de mettre en une soixantaine de formules trigonométriques tout ce qui

constitue cette partie de la science astronomique; il y trouve les démonstrations que Clavius n'avait pu deviner; il en tire en outre des moyens nouveaux pour tracer, soit graphiquement, soit par le calcul, les arcs des signes, la méridienne du temps moyen, et toutes les lignes horaires des cadrans sans centre, soit babyloniens, soit italiques, soit français.

Les Persans et les Tartares ont montré le même respect pour les théories grecques. Ils ont adopté la trigonométrie arabe, ils ont amélioré les mouvements du soleil; nous devons même à ces derniers un catalogue d'étoiles tout nouveau, celui d'Ulugh-beig. Les premiers astronomes européens ne se sont pas montrés imitateurs moins serviles: Alphonse a fait calculer de nouvelles tables, qui ont été employées deux cents ans. Regiomontanus a plusieurs fois déclaré n'en faire aucun cas; mais il n'eut ni le temps, ni les moyens d'en composer de meilleures : il s'est beaucoup occupé de trigonométrie, mais sans aller aussi loin qu'Aboul-Wéfa, ou qu'Ebn-Jounis; il n'a pas senti l'utilité des tangentes, dont il avait trouvé les formules dans Albategnius. Notre système trigonométrique a été complété pour la première fois par Viète, qui, le premier, fit paraître une table où les tangentes et les sécantes étaient réunies aux sinus, et qui depuis a donné les quatre formules analytiques qui suffisent à tous les cas des triangles sphériques obliquangles. On lui doit des formules curieuses et très-utiles pour les tangentes, les sécantes, et même pour les sinus; il a créé la théorie qu'il a nommée *des sections angulaires;* enfin de ses théorêmes souvent obscurs on aurait pu tirer l'expression des différences premières et secondes des sinus, et des moyens plus expéditifs et plus sûrs que ceux qu'il indique

pour la construction des tables trigonométriques. Nous n'avons pu qu'indiquer brièvement les sujets qu'on trouve développés dans cette astronomie du moyen âge, qui renferme de plus l'analyse de tous les ouvrages un peu remarquables qui ont paru dans cet intervalle de plus de six cents ans, qui nous conduit à Copernic. Ce restaurateur de l'astronomie, Tycho, Kepler et Galilée, fourniront une matière abondante pour le premier volume de l'*Astronomie moderne,* dont l'impression est commencée.

Nous avons dit, dans l'Histoire de 1817, les obligations que nous avons à M. Sédillot pour ce qui concerne les Arabes et les Tartares.

Mémoire sur la topographie et le relief du sol de Paris; par M. GIRARD.

Les trois îles que forme la Seine, et les quartiers qui s'étendent au nord et au sud, étaient autrefois des prairies que la Seine inondait toutes les fois qu'elle venait à croître au-delà de son volume ordinaire. Le gravier qu'elle charriait et la vase qu'elle tenait suspendue se déposaient sur la surface des prés. Chaque année une nouvelle couche de ces dépôts en élevait le sol, en même temps que des dépôts de même nature exhaussaient le fond du fleuve. A mesure que la vallée se peupla, le besoin de se garantir des inondations força les habitants d'accélérer le travail de la nature, en rapportant de nouvelles terres, ou à élever sur les bords du fleuve des digues ou des quais qui les missent à l'abri des débordements; et le lit de la Seine s'étant constamment élevé, il fallut périodiquement exhausser les quais, et recharger le

sol des différents quartiers. Les décombres qu'on portait hors de l'enceinte habitée formèrent, avec le temps, les buttes des Moulins et de Notre-Dame de Bonne-Nouvelle, les monticules de la rue Hyacinthe, de la rue Taranne, et le labyrinthe du Jardin des plantes. La population s'étant accrue, on aplanit convenablement la surface de ces dépôts de décombres, et l'on y traça de nouvelles rues. Les boulevards du nord, restes d'anciens remparts, forment une enceinte plus élevée que le sol de la ville et des faubourgs adjacents.

Il s'agissait de déterminer le relief actuel des différents quartiers. Dès 1742, Buache avait formé le projet d'un plan hydrographique de Paris. L'inondation de 1740 avait déja fourni les premières données d'un nivellement général des quartiers qui avaient été couverts par les eaux. Il leva ensuite plusieurs profils du terrain, en traversant la ville en différents sens. Ce travail est le seul qui ait été rendu public. Pour recommencer ce travail sur une plus grande échelle, on débuta par tracer sur le grand plan de Verniquet les hauteurs des différents points de la surface, rapportées à un plan horizontal élevé de 76 mètres environ au-dessus des basses eaux de la Seine. Après avoir soigneusement vérifié ces premières cotes, on y a successivement intercalé de nouvelles cotes de plus en plus rapprochées. De cette manière, on s'est procuré le niveau aux intersections de chaque rue, et ensuite d'espace en espace entre deux intersections consécutives. On a joint par des lignes droites tous les points qui ont été trouvés à la même hauteur; ce qui a donné une suite de polygones irréguliers, dont le tracé indique les intersections de la surface du sol par des plans

horizontaux élevés d'un mètre au-dessus les uns des autres. Ces espèces de courbes indiquent ainsi les limites des terrains qui seraient inondés, si l'on supposait que les eaux de la Seine vinssent à s'élever successivement de mètre en mètre au-dessus de leur niveau.

Mémoire sur la Marine et les Ponts-et-Chaussées de France et d'Angleterre, contenant deux relations de voyages faits par l'auteur dans les ports d'Angleterre, d'Écosse et d'Irlande; par M. C. DUPIN, *de l'Académie des sciences.*

Ce recueil est plus riche de beaucoup que son titre ne l'annonce. La relation des deux voyages ne contient encore que la partie historique et la partie descriptive; elle fait désirer et promet un ouvrage plus étendu, qui contiendra de plus la partie théorique. Elle est suivie de la notice des constructions de la rade de Plymouth, et d'une description du canal Calédonien, faite pour intéresser toutes les classes de lecteurs; du plan d'un grand ouvrage, déja fort avancé, sur l'architecture navale des seizième et dix-neuvième siècles; des expériences sur la flexibilité et l'elasticité des bois; d'un Mémoire très-détaillé et plein de vues utiles sur le rétablissement de l'Académie de marine; d'un autre Mémoire sur l'état actuel du musée maritime établi dans l'arsenal de Toulon, et sur les ouvrages du Puget conservés dans ce même arsenal; enfin de la description des machines à l'usage de la marine, construites à Rochefort, d'après les projets de M. Hubert. Le tout est accompagné des rapports faits à l'Académie des sciences, à l'Académie des arts, et par MM. les

officiers de marine de Toulon, aux époques où l'auteur a soumis ces divers ouvrages à leur examen. L'Histoire de l'Institut a fait connaître ceux de ces rapports qui ont été lus aux deux Académies ; nous nous bornerons à transcrire la conclusion de MM. les officiers de marine. « La Commission pense que le plan général de l'auteur est bien établi pour produire un ouvrage bon, utile et intéressant, digne des encouragements du gouvernement d'une grande nation (il est question du tableau de l'architecture navale); et elle ose espérer que S. Exc le ministre de la marine ne refusera pas au jeune auteur les nobles et dignes encouragements dont les principaux viennent d'être indiqués. » On disait plus haut, qu'il était à desirer que M. Dupin fût mis à portée « de parcourir les principaux ports de la France et de l'étranger; de juger tout avec l'impartialité qui le caractérise, de rassembler d'importants mémoires, pour les mettre en œuvre avec cette constance inébranlable que montre l'auteur dans la poursuite de ses utiles entreprises. » Ce vœu de la Commission avait été émis en 1814 : le recueil que nous annonçons prouve qu'il est heureusement et en grande partie réalisé.

Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge; par M. C. Dupin, *élève de Monge et membre de l'Institut de France.*

« Disons hardiment que de tels hommes font honneur à la société.... Honorons-les pendant leur vie; et, quand la mort nous les enlève, accordons sans hésiter à leurs mânes le tribut de nos éloges, de nos regrets et de notre vénéra-

tion.... Si nous osons entreprendre cette tâche, ce n'est pas pour donner un juste mais stérile éloge à d'illustres conceptions et aux fatigues d'une vie consacrée à les réaliser par des institutions utiles à la patrie; c'est pour conserver, c'est pour propager les idées d'un esprit supérieur, c'est pour consolider l'empire des vérités qui lui sont dues. »

« G. Monge naquit à Beaune en 1746....... Ses progrès méritèrent qu'on le chargeât de professer, au collége de Lyon, la physique qu'il venait d'y apprendre l'année précédente.... Étant venu à Beaune, au temps des vacances, il entreprit de lever le plan de cette ville. Il n'avait pas d'instruments pour cette opération, il en composa. Il fit hommage de son travail à l'administration de sa ville natale, qui récompensa le jeune auteur aussi généreusement que pouvaient le permettre les moyens bornés de la richesse communale. Un lieutenant-colonel du génie militaire, qui se trouvait alors à Beaune, obtint que Monge fût attaché comme dessinateur et comme élève à l'école d'appareilleurs et de conducteurs des travaux des fortifications.... Comme il dessinait avec une rare perfection, on considérait uniquement son talent manuel. Il sentait déja sa force, et ne pouvait sans indignation songer à l'estime exclusive qu'on accordait à ses dispositions mécaniques. « J'étais mille fois tenté, « disait-il long-temps après, de déchirer mes dessins, par « dépit du cas qu'on en faisait, comme si je n'eusse pas été « bon à produire autre chose. » Le directeur de l'école le chargea des calculs pratiques d'un cas particulier de *défilement,* opération qui sert à combiner le relief et le tracé des fortifications avec le moins de frais possible, et de manière que le défenseur s'y trouve à l'abri des coups de l'assaillant.

Monge abandonna la route suivie jusqu'alors, et découvrit la première méthode géométrique et générale qu'on ait donnée pour cette importante opération.... En appliquant successivement son talent mathématique à diverses questions d'un genre analogue, et généralisant toujours ses moyens de concevoir et d'opérer, il parvint enfin à former un corps de doctrine; ce fut sa Géométrie descriptive.... Pendant plus de vingt ans, il lui fut impossible de faire enseigner au corps de Mézières l'application de sa géométrie aux tracés de la charpente. Il fut plus heureux pour l'application à la coupe des pierres; il suivit avec soin les méthodes employées à cette étude, et les perfectionna en les simplifiant par sa géométrie....

« Ses travaux scientifiques le firent nommer répétiteur de mathématique et de physique, pour suppléer Nollet et Bossut; ensuite il fut nommé professeur titulaire : alors il tourna ses vues vers l'étude d'une foule de phénomènes de la nature; il fit de nombreuses expériences sur l'électricité; il expliqua les phénomènes qui se rapportent à la capillarité, fut le créateur d'un système ingénieux de météorologie; il opéra la composition de l'eau; il arriva à cette grande découverte sans avoir eu connaissance des recherches un peu antérieures de Lavoisier, Laplace et Cavendish. Il ne se contentait pas d'expliquer aux élèves, dans les salles d'études, les théories de la science et leurs applications; il aimait à conduire ses disciples par-tout où les phénomènes de la nature et les travaux de l'art pouvaient rendre sensibles et intéressantes ces applications. Il communiquait à ses disciples son ardeur et son enthousiasme, et changeait en plaisirs passionnés des observations et des recherches qui, dans

l'enceinte d'une salle et par des considérations abstraites, n'eussent paru qu'une pénible étude. »

« En 1780, afin d'attirer Monge à Paris, on l'adjoignit à Bossut, professeur du cours d'hydrodynamique institué par Turgot. Pour concilier les devoirs des deux places qu'il remplissait, il passait six mois de l'année à Mézières et six mois à Paris. La même année il fut reçu à l'Académie des sciences; et à la mort de Bezout, en 1783, il fut choisi pour remplacer ce célèbre examinateur de la marine. Plus d'une fois le marquis de Castries invita Monge à récrire le Cours élémentaire de mathématiques pour les élèves de la marine; mais toujours Monge s'en défendit. « Bezout a laissé, disait-il, une « veuve qui n'a d'autre fortune que les écrits de son mari, « et je ne veux point arracher le pain à l'épouse d'un homme « qui a rendu des services importants à la science et à la « patrie. » Le seul écrit élémentaire que Monge publia fut son Traité de statique; et, à quelques passages près, où l'évidence supplée à ce qu'on pourrait desirer d'une plus grande rigueur, la statique de Monge est un modèle de logique, de clarté et de simplicité. »

« A une époque où les malheurs publics appelaient dans les rangs supérieurs tous les talents utiles et courageux au secours de la patrie menacée d'une invasion, Monge fut créé ministre de la marine. Il fit tout pour conserver à la France les hommes recommandables par leur mérite ou leur bravoure; il descendit jusqu'à la prière pour obtenir de Borda la continuation de ses services, et il eut le bonheur de réussir. Il fut un des hommes les plus actifs dans les travaux de la science pour le salut de l'état. On lui dut la construction des nouvelles machines à broyer qu'on établit

dans la poudrière de Grenelle, et des foreries établies sur des bateaux de la Seine. Il passait les jours à donner l'instruction et le mouvement aux ateliers, et les nuits à rédiger son Traité de l'art de fabriquer les canons, ouvrage destiné à servir de manuel aux directeurs d'usines et aux artistes. »

« Ce fut dans son cours à l'école normale, qu'il fit paraître pour la première fois ses Leçons de géométrie descriptive, dont il ne lui avait pas été permis plus tôt de révéler les secrets. Un autre établissement qui précéda l'école normale dans l'ordre des conceptions, mais qui, mûri plus long-temps par ses auteurs, la suivit de près dans l'ordre de l'exécution, vint réaliser une partie des espérances qu'on avait vainement conçues à la fondation de la première école encyclopédique qu'on eût ouverte en France. Monge y apporta les résultats de la longue expérience de Mézières; il y joignit ses vues profondes et neuves; il créa le plan des études, indiqua leur filiation, et proposa les moyens scientifiques d'exécution. Sur quatre cents élèves appelés dès l'origine à l'école polytechnique, les cinquante plus instruits furent réunis dans une école préparatoire : ce fut Monge qui les forma presque seul; restant le jour entier au milieu d'eux, leur donnant tour-à-tour des leçons de géométrie et d'analyse;... les exhortant, les encourageant, les enflammant par cette ardeur, cette bienveillance, cette impétuosité de génie, qui le faisaient, en faveur de ses élèves, déployer les vérités de la science avec une force et un charme irrésistibles. Le soir, quand les travaux étaient finis, Monge en commençait d'un autre ordre; il écrivait les feuilles d'analyse qui devaient servir de texte à ses leçons prochaines, et

le lendemain il se trouvait avec ses élèves au premier moment de leur réunion. La bonté de Monge n'était en lui ni le calcul du sage, ni même l'effet de l'éducation : c'était une bienveillance naïve qu'il devait à son heureuse organisation. Il était né pour aimer et pour admirer. Il fut excessif dans son admiration comme dans son amour : par-là peut-être il ne resta pas toujours dans les limites où l'aurait arrêté l'impassible et froide raison.... Comme il était le père des élèves au sein de l'école, tel il était, au sein des camps, le père du soldat. »

« En parcourant l'Italie pour recueillir les statues et les tableaux cédés à la France, Monge avait été frappé du contraste singulier que présentent les monuments des Grecs et ceux des Égyptiens transportés aux bords du Tibre, sous Auguste et ses successeurs. Les caractères comparés des monuments antiques, devaient être le sujet fréquent des entretiens du vainqueur de l'Italie et du commissaire qui recueillait, pour la patrie, les plus beaux fruits de la victoire. Monge concevait l'idée de reculer le domaine de l'histoire par-delà les âges fabuleux de la Grèce; d'apprendre, avec la certitude du géomètre, ce qu'étaient les travaux des anciens sages de l'Orient; de retrouver, par la contemplation de leurs monuments, ce qu'ont été.... les procédés de leurs arts, les usages de leur vie publique, l'ordre et la majesté de leurs fêtes et de leurs cérémonies. »

« Monge, chargé par le général en chef d'apporter au directoire le traité de Campo-Formio, fut, peu de temps après, au premier rang des savants qui composèrent la commission des sciences et des arts qui devait accompagner l'expédition d'Égypte. Il fut le premier nommé président de

l'Institut d'Égypte formé sur le modèle de l'Institut de France. Deux fois il visita les pyramides ; il vit l'obélisque et les grandes murailles d'Héliopolis ; il étudia les débris d'antiquités épars autour du Caire et d'Alexandrie. Ce fut dans une marche pénible, dans l'intérieur du désert, qu'il trouva la cause de cet étonnant phénomène connu sous le nom de *mirage*. Au temps de la révolte du Caire, il n'y avait dans la ville que quelques détachements de troupes ; le palais de l'Institut n'était gardé que par les savants : on avait proposé de se faire jour les armes à la main jusqu'au quartier-général ; mais Monge et Berthollet, songeant que le palais contenait les livres, les manuscrits, les plans et les antiquités, fruits de l'expédition, soutinrent que la conservation de ce précieux dépôt était le premier devoir des savants ; et ils se décidèrent à mourir, s'il le fallait, en défendant ce trésor. »

« Monge présida la commission des sciences et des arts d'Égypte ; il contribua puissamment par ses conseils à la sage conception du plan, à la coordonnance, à la proportion des parties principales, enfin aux moyens de perfectionner les arts d'exécution. »

« Monge avait une manière inimitable d'exposer les vérités les plus abstraites, et de les rendre sensibles par le langage d'action.... Cependant ce n'est qu'en combattant la nature, qu'il avait pu devenir un excellent professeur : il parlait difficilement et presque en bégayant ; il avait dans le discours une prosodie vicieuse qui lui faisait allonger à faux certaines syllabes et précipiter les autres avec rapidité. Sa physionomie, habituellement calme, présentait l'aspect de la méditation ; mais lorsqu'il parlait, on croyait tout-à-coup

voir un autre homme ; un feu nouveau brillait tout-à-coup dans ses yeux, ses traits s'animaient, et sa figure devenait inspirée....

« Monge, affaibli par les années, était encore la victime d'une imagination qui, suivant les temps adverses ou propices, l'emportait au-delà des justes craintes, comme au-delà des justes espérances. .... Ses derniers moments ont été sans dernières pensées, sans derniers épanchements, sans derniers adieux : il s'est éteint dans le silence, sans angoisses, sans terreur et sans espérances.... La régularité du service n'a pas permis qu'une jeunesse généreuse vînt, à l'heure de ses funérailles, déposer la palme de la reconnaissance et des regrets sur la tombe de leur premier bienfaiteur; mais, dès l'aurore qui suivit le jour des derniers devoirs, les élèves s'acheminèrent en silence vers le lieu de la sépulture, et y déposèrent un rameau de chêne auquel ils suspendirent une couronne de laurier. Vingt-trois anciens élèves de l'école polytechnique, tous résidants de la ville de Douai, se réunirent spontanément, et décidèrent d'écrire en commun à M. Berthollet, pour le prier de diriger l'érection d'un monument, qui serait élevé aux frais des anciens élèves de l'école polytechnique, en l'honneur de Gaspard Monge. M. Bertrand, notaire, rue Coquillière, n° 46, à Paris, s'est chargé de recevoir les souscriptions. Les anciens élèves qui ont cultivé spécialement l'architecture, sont invités à concourir pour le monument de Monge, et à faire passer leurs plans, accompagnés d'un devis estimatif, au même M. Bertrand. »

Cette notice est terminée par la liste des élèves qui ont déja souscrit. La seconde partie contient le catalogue et

l'analyse raisonnée des écrits de Monge, tant de ceux qu'il a publiés séparément, que des mémoires qu'il a insérés dans les recueils de l'Académie ou de l'École polytechnique, et dans plusieurs autres collections. Tous ces ouvrages sont généralement connus et appréciés ; nous avons dû extraire de préférence des renseignements plus fugitifs, qui, faisant mieux connaître l'ame de M. Monge, expliqueront l'attachement de ses anciens élèves et les regrets de ses anciens confrères.

Des Marais-Pontins; par M. DE PRONY. *Paris,* 1818.

Déja dans la séance publique du 9 janvier 1815, l'auteur avait lu un Mémoire où il donnait une idée générale du grand problème du desséchement et de l'assainissement des Marais-Pontins. Ce Mémoire reparaît ici à la tête de l'ouvrage, dont il forme le discours préliminaire; et il y est accompagné de notes intéressantes qui n'ont pu entrer dans le texte.

Dès l'an 442 de Rome, époque de la construction de la voie Appia, le sol Pontin était en état de marais. Environ cent cinquante ans après, Cornélius Cethegus en entreprit le desséchement. Ces travaux furent ensuite négligés jusqu'à la dictature de Jules-César, dont les vastes projets furent interrompus par sa mort. Néron, Trajan et leurs successeurs s'occupèrent beaucoup de la voie Appia et fort peu des Marais-Pontins. Théodoric en confia le desséchement à Décius. Léon X et Sixte-Quint firent exécuter des travaux dignes d'être cités ; mais rien ne se peut comparer aux travaux exécutés de 1777 à 1796, sous le pontificat de Pie VI,

qui y dépensa 9 millions de francs. Malheureusement, les projets étaient établis sur des vues systématiques, très-spécieuses et très-séduisantes, bonnes à beaucoup d'égards, mais qui, trop généralisées, ont eu de funestes conséquences; en sorte que ces travaux, considérés sous le point de vue hydraulique, n'offrent que de grandes ébauches, dans lesquelles même on avait entièrement négligé des parties d'une haute importance, qu'alors on jugeait inutiles. On trouvera dans l'ouvrage que nous annonçons des détails historiques et critiques, très-circonstanciés sur tous ces objets.

On s'est assuré, par des sondes, que la mer a baigné le pied des montagnes qui limitent les côtés oriental et septentrional des Marais-Pontins. L'ensemble des phénomènes qui ont concouru à la formation de ces marais, présente à l'esprit, d'une part, des fleuves et des torrents tombant dans le golfe antique que couvraient les îles de Circé, Zanoni et Ponza; d'un autre côté, la mer formant deux bandes de dunes, dont la plus récente a fini par fermer la communication de la mer avec le golfe intérieur. La méthode des Colmates, qui consiste à employer des courants d'eau chargée de limon, pour exhausser le terrain par des dépôts et des attérissements successifs, n'offre ici qu'une ressource secondaire d'un effet très-lent. Malgré son insuffisance, il sera bon de continuer les essais commencés en ce genre; et M. de Prony en propose encore l'usage pour la bonification de plusieurs terrains auxquels il la croit immédiatement applicable; mais elle ne doit être considérée que comme un moyen subsidiaire. Le moyen principal ne peut être qu'un bon système de canaux d'écoulement. Pour établir ce système, il fallait se procurer un plan exact du terrain, de ses déclivi-

vités, de ses rivières, de ses torrents, de la quantité de pluie qu'il reçoit annuellement, et de celle qu'il rend par l'évaporation. Ce travail était loin d'être complet; M. de Prony a commencé par y ajouter ce qu'il laissait encore à desirer: au moyen de trois signaux placés, à des distances connues, sur une même ligne droite, il a déterminé de la manière la plus expéditive tous les points desquels il pouvait observer ses trois signaux. Il a réduit ce problème curieux en formules générales et commodes. Au fond, ce problême n'est qu'un cas très-particulier du problême général par lequel Hipparque déterminait les excentricités et les distances du soleil et de la lune. Snellius a fait le premier descendre des cieux ce problême, qu'il a transformé en question de simple géodésie. Le problême d'Hipparque a été mis par nous en formules générales qui comprennent le cas envisagé par M. de Prony. Nous avons été curieux de comparer les deux méthodes; nous les avons trouvées également exactes et également expéditives.

C'est ainsi qu'en réunissant aux différentes pièces qui lui ont été communiquées les résultats de ses opérations géodésiques et des observations qu'il a faites pendant son séjour dans les Marais-Pontins, et ceux des nivellements, des sondes et autres travaux exécutés à sa prière par l'habile ingénieur M. Scaccia, l'auteur a pu se procurer, pour ses projets de desséchement, un système de données et de matériaux beaucoup plus complets que ceux d'après lesquels on avait établi les projets précédents. Les progrès récents de la science des eaux courantes lui fournissaient encore des moyens que n'avaient pas eus ses prédécesseurs. Par l'assemblage de tous ces moyens, il a pu former un plan qui pourra

satisfaire aux diverses conditions que comporte ce célèbre problême.

L'ouvrage est divisé en quatre sections. La première comprend la description et la mesure du bassin Pontin; la seconde, l'état où se trouvaient les Marais avant les travaux ordonnés par Pie VI. Dans la troisième, on trouve la description de leur état actuel, et l'analyse des différents projets formés avant 1811. Enfin la quatrième renferme les vues particulières de l'auteur, et ses projets pour la bonification ultérieure des Marais-Pontins. Dans toutes on voit une foule de tableaux curieux et instructifs, dans lesquels on a rassemblé tous les résultats des observations et des calculs. On sent qu'il nous est impossible d'en faire aucune analyse. Nous y prendrons seulement la valeur de l'ancien pied romain, déduit de la distance des bornes milliaires 42 et 46, les seules qui n'eussent pas été renversées et déplacées sur la voie Appia. Cette valeur est de $0^{m.},294246$, ou de $10^{po.}10^{li.},044$ de l'ancien pied de Paris.

Dans la quatrième section, qui est la plus étendue, et qui est plus spécialement l'application des théories hydrauliques, on remarquera les conséquences fâcheuses des défrichements; des détails curieux sur l'état actuel du Pô, qui, par les attérissements qu'il forme à son embouchure, gagne sur la mer 70 mètres par an, au lieu de 25 qu'il gagnait annuellement sur la mer entre les douzième et dix-septième siècles; sur les attérissements du Tibre; enfin sur les effets contraires produits par les eaux de la mer sur la côte qui s'étend d'Anzo à Astura. « Les Italiens sont peut-être les premiers qui aient donné en Europe l'exemple de modérer par des chûtes les pentes et les vîtesses des grands courants,

et d'en soutenir les eaux; mais jamais ils n'ont employé les écluses qu'à ces usages : la gloire de s'en servir pour établir la communication entre deux grands bassins, était réservée à la France. Le canal de Briare, qui joint la Loire à la Seine, et qui a été terminé en 1642, est le premier exemple de l'union de deux fleuves par un canal traversant le plateau posé par la nature entre leurs deux bassins. Cet exemple a été suivi avec le plus grand succès par les auteurs du canal du Languedoc, commencé en 1668 et terminé en 1681. Ainsi l'école hydraulique française a la gloire exclusive d'avoir inventé les canaux à point de partage, et d'avoir donné, pour première application de cette invention, deux monuments comptés à juste titre parmi les plus beaux de ce genre, et dont la nouveauté n'a pas été assez remarquée ou sentie par ceux qui s'occupent de l'histoire de l'art. »

Le reste de l'ouvrage offre l'application détaillée des principes et des formules consignées par l'auteur dans ses *Recherches physico-mathématiques sur les eaux courantes*. Ces principes et ces méthodes établis sur les meilleures expériences que l'auteur a pu recueillir, ont déja été employés utilement dans plusieurs circonstances, et notamment dans les travaux d'un grand desséchement, celui des marais de Bourgoin dirigé par M. Roland.

Le résumé général de cet immense travail offre cette conséquence importante : la possibilité de renfermer dans des canaux réguliers toutes les eaux qui inondent ce sol infortuné, et de leur donner une issue libre et facile à la mer. Le desséchement complet étant supposé opéré par les mesures indiquées, l'entretien du sol en parfaite culture ne se-

rait ni difficile, ni dispendieux; mais il devrait être suivi avec une vigilance extrême.

On ne peut aujourd'hui prévoir avec beaucoup de certitude ce qui résultera de tant de recherches pour l'assainissement et la prospérité de la Campagne de Rome : l'auteur a fait tout ce qui dépendait de lui; et son travail offrira, du moins, aux jeunes ingénieurs, un exemple utile de la combinaison de la théorie avec l'expérience pour composer le projet d'un grand desséchement.

RAPPORTS ADOPTÉS PAR L'ACADÉMIE.

Euclide grec, latin et français, de M. PEYRARD; *commissaires, MM.* de Laplace, Legendre, Prony, *et* Delambre, *rapporteur.*

Ce troisième et dernier volume contient les livres XI, XII et XIII des éléments, le livre des *données*, et enfin les deux livres supplémentaires sur les *corps réguliers*, qui ne sont pas véritablement d'Euclide, et qu'on attribue généralement à *Hypsicle* d'Alexandrie. L'éditeur croit devoir se disculper d'avoir reproduit ces deux livres, dont il ne témoigne pas faire beaucoup de cas; mais, outre qu'il nous paraît assez justifié par l'exemple de tant d'autres éditeurs, dont l'un même a cru devoir ajouter un nouveau supplément à ceux d'Hypsicle, nous pouvons dire que ces livres sont une suite nécessaire du XIIIe livre d'Euclide, qui s'était contenté d'effleurer la théorie des corps réguliers. En effet, Euclide s'était borné à déterminer les arêtes de ces corps, sans dire un seul mot ni des inclinaisons mutuelles de leurs faces, ni

de la distance de ces faces à leurs pôles, ou au centre de la sphère, non plus que des surfaces ou des solidités des cinq corps.

Ce n'est pas qu'Hypsicle ait réellement épuisé la matière; il se borne à donner les surfaces du dodécaèdre et de l'icosaèdre; il en détermine le rapport, qui est en même temps celui de leurs solidités, puisque les faces de ces deux corps sont à égales distances du centre de la sphère; remarque qu'il aurait pu étendre à l'hexaèdre et à l'octaèdre, ainsi que l'a fait un de ses continuateurs.

Un article plus complet est celui des inclinaisons. Pour les déterminer, Hypsicle expose d'abord les procédés généraux de son *célèbre* maître Isidore. Ce géomètre avait cru inutile d'y ajouter les démonstrations, tant la chose lui paraissait *évidente*. En la démontrant, on croirait d'abord qu'Hypsicle a voulu l'obscurcir; mais, suivant toute apparence, Isidore, quand il imagina ses constructions, avait sous les yeux les figures en relief de tous les corps réguliers. Avec ce secours, que M. Peyrard s'est aussi procuré, on n'a besoin que de ses yeux pour apercevoir la parfaite exactitude de ces pratiques : alors on parvient à comprendre facilement les figures tracées par Hypsicle, et les démonstrations s'éclaircissent. M. Peyrard reproche à ces démonstrations *leur peu de rigueur et d'élégance.* Nous convenons qu'elles sont beaucoup trop longues; mais la faute en doit être rejetée sur Euclide, qui s'est avisé, l'on ne sait trop pourquoi, d'établir que l'*inclinaison* est l'angle *aigu* que forment deux faces contiguës. Dans la réalité, l'inclinaison n'est un angle aigu que dans le tétraèdre; elle est un angle droit dans l'hexaèdre; elle est un angle obtus dans les trois der-

niers : en sorte que l'angle aigu ne se trouve nullement dans l'hexaèdre, et que, dans les trois autres corps, il est l'angle entre une face et le prolongement de la face voisine. Or la moitié des démonstrations d'Hypsicle est employée à déterminer l'espèce de l'angle, tandis que les constructions d'Isidore donnent toujours l'angle véritable, soit aigu, soit obtus, et qu'il est impossible de jamais s'y tromper.

On pourrait ajouter que ces démonstrations, quoique différentes pour chacun des cinq corps, dépendent cependant d'une considération unique, qui les éclaircirait, même indépendamment de la figure en relief. Le principe consiste à imaginer, dans chaque solide, une ligne qui serve de base commune à deux triangles isoscèles, dont les côtés sont connus. Dans un de ces triangles, l'angle au sommet est toujours connu; dans l'autre, il est l'inclinaison que l'on cherche : il en résulte une relation fort simple entre les cosinus des deux angles; et si l'on applique à ces triangles une des règles de notre trigonométrie moderne, on en tire aussitôt une équation identique à celle que fournit directement la trigonométrie sphérique.

Mais cette règle moderne était absolument ignorée d'Euclide, d'Isidore et d'Hypsicle, qui, dans la solution très-défectueuse qu'il nous a donnée ailleurs d'un problême résolu à-peu-près dans le même temps par Hipparque, nous a laissé une preuve palpable de son ignorance complète en l'une et l'autre trigonométrie.

C'est une chose assez remarquable, que cette théorie des corps réguliers, si embarrassée et si imparfaitc chez les Grecs et leurs continuateurs, dépende tout entière d'un triangle sphérique rectangle, tracé à la surface de la sphère à laquelle

on veut inscrire à-la-fois tous les corps. Les angles de ce triangle sont toujours donnés; et les formules qui en résultent pour les trois côtés, fournissent les expressions les plus simples des arêtes, des distances polaires de tous ces plans, de leurs inclinaisons mutuelles, de leurs distances au centre de la sphère, enfin des moyens pour évaluer avec une égale facilité les surfaces soit partielles, soit totales, et les solidités des cinq corps, le tout en parties du rayon de la sphère pris pour unité.

« Outre la quantité précise et numérique des inclinaisons, inaccessible à la géométrie d'Euclide, le même triangle fournit encore la relation la plus simple pour déterminer la nature et le nombre des corps réguliers inscriptibles à la même sphère; en sorte qu'un seul triangle, une formule unique suffit à tout. C'est ce que l'un de nous démontrera dans l'Histoire de l'astronomie moderne à l'article de Kepler, qui avait voulu démontrer, par les cinq corps, qu'il ne pouvait exister d'autres planètes que celles qui étaient connues de temps immémorial. »

« Une autre remarque non moins curieuse et non moins neuve, c'est que les expressions trigonométriques générales (les plus expéditives qu'on puisse imaginer pour le calcul logarithmique) se transforment avec une facilité singulière en ces expressions irrationnelles que les Grecs appelaient *majeure, mineure* et *apotome*. En effet, tous les angles primitifs sont de 30, 36, 45, 54, 60 et 90°, dont les lignes trigonométriques ont des valeurs irrationnelles, qui conduisent tout aussitôt aux constructions d'Euclide et d'Isidore. Il en résulte que les inconnues de chaque problême peuvent s'exprimer à volonté par les sinus, les cosinus et

les tangentes, soit de l'arc lui-même, soit de sa moitié; qu'on a toujours six expressions différentes pour chaque chose; que, parmi tant d'expressions, on peut toujours choisir les plus commodes, et que le calcul s'abrége encore par cette considération, qu'il n'y a presque pas une de ces quantités qui ne se retrouve dans un autre corps, de manière que pour les quinze inconnues du problême général, on n'a jamais à faire que quatre calculs en tout. C'est ainsi qu'après avoir complété et simplifié les constructions d'Euclide pour les cinq arêtes, nous avons pu réunir, en des triangles rectilignes isoscèles, qui ont pour base commune le diamètre de la sphère, des constructions plus faciles et plus uniformes que celles d'Isidore. »

« Nous croyons donc pouvoir nous écarter de l'opinion du traducteur, et regarder les deux livres d'Hypsicle comme un reste curieux de l'ancienne géométrie, en ce qu'ils renferment des notions qui ne se rencontrent pas ailleurs. L'important est d'avoir des théorêmes vrais et des constructions irréprochables. Quant aux démonstrations, elles ont leur importance, sans doute; mais si l'on en est peu satisfait, il n'est pas bien difficile d'en trouver d'autres. D'ailleurs, nous avons dit quel est le principal défaut de celles d'Hypsicle; c'est que dans toutes la première moitié est parfaitement inutile. »

« Il est vrai que la démonstration de la deuxième proposition du second livre était absolument inintelligible; mais il est permis de croire que la faute en est aux copistes. M. Peyrard en a donné une nouvelle, qui pourrait bien être celle de l'auteur. Il y a aussi une démonstration d'Euclide que tous les commentateurs s'étaient accordés à re-

garder comme altérée, ou tout-à-fait insuffisante. Il s'agit d'une des propositions les plus importantes du livre des données. Elle peut se réduire à une équation du 4e degré, qui se résout à la manière de celles du second. M. Peyrard en donne d'abord le calcul algébrique; puis, traduisant en style moderne la démonstration grecque, il en fait mieux sentir la marche rigoureuse et la légitimité. »

« De toutes les propositions qu'offre ce dernier volume, il n'en est aucune qui ait donné à l'éditeur autant de peine que la 17e du XIIe livre des éléments. Dans tous les manuscrits et les éditions quelconques, la figure était tellement incomplète, qu'il était impossible d'y appliquer la plupart des raisonnements d'Euclide. Au moyen de quelques lignes ajoutées, le traducteur a rendu la démonstration exacte de tous points. »

« Dans tout le reste, c'est, comme dans les volumes précédents, la fidélité la plus grande dans la traduction; ce sont les mêmes soins pour épurer le texte, et pour en recueillir les variantes, qui forment ici quatre-vingt-quatre pages. L'éditeur avait avancé que la belle édition d'Oxford n'était pas plus correcte que l'édition de Bâle, dont elle avait reproduit toutes les fautes, même les plus palpables, auxquelles elle en avait ajouté d'autres en nombre assez considérable, dont la première était exempte. Cette assertion avait étonné et devait trouver des incrédules; mais on ne voit pas ce qu'on pourrait objecter aux huit pages où M. Peyrard a placé le tableau comparatif des deux éditions.

« M. Peyrard vient de terminer heureusement un travail
« long et pénible. Nous proposerons à l'Académie d'étendre
« au 3e volume l'approbation qu'elle a bien voulu accorder

« aux deux autres ; dans l'espoir que cette approbation mé-
« ritée pourra faciliter à l'auteur la publication de son *Apol-
« lonius,* dont le manuscrit est terminé depuis long-temps. »

Nous nous faisons un plaisir d'annoncer que cette nouvelle édition est commencée, et que nous en avons déja vu plusieurs feuilles.

Traité de Géométrie descriptive ; par M. Vallée, *ingénieur des ponts-et-chaussées. Commissaires,* MM. de Prony, Fourier, *et* Arago, *rapporteur.*

« Les leçons de Géométrie descriptive du savant illustre (M. Monge), premier auteur de cette doctrine, renferment une exposition des principes de la science, qui sera toujours citée comme un modèle parfait de clarté. On regrette toutefois que cet ouvrage ne soit pas plus étendu, car les artistes qui n'ont pas fait une étude spéciale des mathématiques, ne peuvent se rendre les méthodes de projection familières, qu'en variant les données des questions, et en s'exerçant sur un grand nombre d'exemples. M. Hachette avait rempli en partie cette lacune par un supplément auquel l'Académie a donné son approbation. C'est en marchant sur les traces de ces deux savants, que M. Vallée a rédigé son Traité, qu'il a divisé en six livres formant plus de 500 pages in-4°......

« Les commissaires, qui ont porté leur attention principalement sur les parties les plus difficiles, se plaisent à reconnaître qu'elles sont rédigées avec beaucoup de méthode et de clarté. Les cinquante-neuf planches qui accompagnent le texte sont parfaitement dessinées. Chaque épure offre, dans les plus petits détails, toutes les constructions qu'il faut exé-

cuter pour arriver à la solution du problême; et néanmoins on n'y remarque aucune confusion. En un mot, cet ouvrage nous a paru digne, sous tous les rapports, de l'approbation de l'Académie. Il est à desirer que cet habile ingénieur puisse trouver, dans les encouragements du gouvernement, les moyens de livrer son ouvrage à l'impression, et qu'il achève ceux dont il s'est déja occupé, et qui doivent contenir les applications de la géométrie descriptive à l'art du charpentier et à celui du tailleur de pierres. » (1)

Traité de Géodésie; par M. PUISSANT. *Seconde édition.*

« La première édition de cet ouvrage ayant été promptement épuisée, l'auteur, en préparant la seconde, a su l'enrichir d'additions importantes.... » *La base du Systéme métrique, la Mécanique céleste,* et les Mémoires de M. Legendre, sont des mines fécondes où il a souvent puisé. Mais on aurait tort de supposer que, même alors, il s'est réduit au rôle de simple copiste; les démonstrations nouvelles et élégantes qu'il donne des formules déja connues, l'enchaînement qu'il a su établir entre des théories, qui souvent n'avaient été présentées que séparément, et par différents géomètres, montrent qu'avant de prendre la plume, M. Puissant avait fait l'étude la plus approfondie des méthodes de la haute géodésie. Les commissaires pensent que le nouvel ouvrage de cet habile ingénieur est digne à tous égards de l'approbation de l'Académie.

---

(1) L'ouvrage vient de paraître.

Modèle d'une machine propre à élever les eaux par l'action combinée du poids de l'atmosphère sur la surface du réservoir inférieur et le refoulement de cette eau dans un tuyau ascendant, implanté sur une espèce de réservoir intermédiaire, rempli en vertu du vide que le même mécanisme y opère; par MM. LACROIX *et* PEULVAY. *Commissaires,* MM. de Prony, Charles, *et* Girard, *rapporteur.*

Les commissaires expliquent d'abord comment on a suppléé aux pistons, aux clapets et aux soupapes ordinaires. De la description qu'ils donnent ensuite de toutes les parties de la machine, et des moyens qui la mettent en jeu, ils concluent qu'elle se réduit à une espèce de roue garnie d'un certain nombre d'ailes susceptibles de s'ouvrir pour former successivement autant de cloisons dans le coursier circulaire qu'elles parcourent. L'idée de cette espèce de pompe leur paraît avoir beaucoup d'analogie avec une idée que Conté avait mise à exécution douze ans avant son départ pour l'Égypte. Il leur paraît même que la machine de Conté était un peu plus simple; ce qui n'empêche pas que le nouveau modèle ne prouve des artistes habiles et intelligents. Si l'idée n'est pas aussi nouvelle qu'ils en paraissent persuadés, il n'en est pas moins vrai de dire, que leur pompe aspirante et foulante peut, dans certains cas, être substituée avec avantage aux pompes ordinaires, et que les auteurs ont donné une preuve de talents qui méritent d'être encouragés. Ils ajoutent qu'on trouve dans la *Description des machines de Servière,* celle d'un appareil exécuté dans la maison

de M. Lenoir, faubourg Saint-Antoine, dans lequel il est aisé de reconnaître une analogie sensible avec les machines de Conté et de MM. Lacroix et Peulvay.

Notice relative aux chemins de fer; par M. GALLOIS. *Commissaires,* MM. de Prony, *et* Girard, *rapporteur.*

On avait pratiqué, depuis long-temps, pour l'exploitation des mines, en quelques contrées de l'Allemagne, des chemins ou charrières formées de pièces de bois longitudinales, sur lesquelles on faisait cheminer, dans les galeries, des chariots appropriés à cette espèce de roulage. Depuis, on a imaginé, en Angleterre, de substituer à ces pièces de bois des chemins ou charrières en fonte de fer. M. Gallois s'est proposé de les décrire avec plus de détails qu'on ne l'a fait jusqu'à présent, et d'en apprécier les avantages comparativement aux chemins ordinaires ou aux canaux navigables.

C'est sur-tout dans les environs de Newcastle que les chemins de fer ont été singulièrement multipliés. Suivant l'auteur, une superficie de vingt-huit lieues quarrées en présente, à ciel ouvert, un développement de soixante-quinze lieues, tandis que l'intérieur des mines de houille en offre un développement tout aussi considérable. Cinq ou six chariots, quelquefois entièrement construits en fer, étant attachés à la file les uns des autres, sans autre moteur que leur propre poids, descendent sur ces chemins. Au moyen d'une poulie ou d'un treuil de renvoi, un certain nombre de chariots qui descendent, en font remonter un certain nombre d'autres, pour se décharger ou prendre charge au sommet du plan incliné qu'ils parcourent....

L'objet le plus important que M. Gallois paraît avoir en vue consiste à faire connaître les avantages que peuvent avoir, sur les routes ordinaires et les canaux de navigation, les chemins en fer, tels que l'Angleterre en présente une multitude d'exemples.... On est naturellement porté à croire, qu'à moins de se trouver dans des circonstances tout-à-fait particulières, il y aura toujours une grande économie de force motrice dans les transports par eau, par cela seul que le poids tout entier de la masse à transporter est soutenu par le fluide, tandis que le plan incliné sur lequel roule un chariot, ne soutient qu'une partie de son poids.... Au reste, il est hors de doute que diverses localités où il serait de toute impossibilité d'ouvrir un canal, peuvent se prêter à l'établissement des chemins de bois ou de fer. Répandre les procédés de leur construction, c'est indiquer à notre industrie de nouveaux moyens de s'exercer. Mais préalablement, il faut rendre moins dispendieuse la fabrication de la fonte de fer.... Cet important objet a fixé particulièrement l'attention de M. Gallois. Sa Notice sur les chemins de fer est un des résultats les plus utiles des recherches auxquelles il s'est livré pendant son séjour en Angleterre; nous pensons que l'Académie doit en encourager la publication.

Méthodes pour tailler les habits; l'une par M. Beck, *tailleur à Paris; l'autre par* M. Chomereau, *tailleur à Brie-Comte-Robert. Commissaires,* MM. de Prony, *et* Molard, *rapporteur.*

Voici la conclusion du rapport.

« Il est possible que MM. Beck et Chomereau se soient

rencontrés sur quelques points avec ceux qui ont traité la même matière avant eux; mais on ne doit pas moins leur savoir gré de leurs efforts pour assujettir l'art du tailleur à des règles qui tendent à rendre compatibles la perfection et l'économie. Nous pensons que l'Académie doit des éloges à leur zèle et à leurs talents. »

Mémoire sur une Question générale de Mécanique; par M. Binet. *Commissaires*, MM. de Laplace, Poisson, *et* Fourier, *rapporteur*.

« L'auteur considère principalement le rapport des forces avec les aires décrites par les rayons vecteurs, autour d'un centre fixe.... Il nomme vîtesse *aréolaire* la fluxion de l'aire tracée par le rayon vecteur, pour la distinguer de la vîtesse *linéaire* qui anime actuellement le mobile dans sa trajectoire.... Il nomme *force vive aréolaire* la somme des produits des masses par les quarrés de ces forces aréolaires, et détermine les relations mathématiques de ces quantités.... Si l'on représente par une droite donnée de grandeur et de position la force qui agit sur un point mobile, et que sur cette ligne comme base on forme un triangle dont le sommet soit le centre fixe, cette figure représentera la force de rotation; le plan du triangle est celui dans lequel elle exerce son action. Si le mobile passe du lieu qu'il occupe dans un autre infiniment voisin, son rayon vecteur décrira une aire infiniment petite, dont le plan peut différer de celui de la force de rotation. Si sur ce dernier plan on projette l'aire décrite, la projection représentera l'effet virtuel de la force de rotation, estimé dans le plan même de cette force. Cela posé,

on peut énoncer comme il suit le résultat principal auquel l'auteur est parvenu. »

« Si l'on multiplie la quantité de chaque force de rotation par son effet virtuel, et si l'on ajoute tous les produits semblables, la somme représentera l'accroissement instantané de la force vive totale, relativement aux aires décrites, ou la somme des produits de chaque masse par le quarré de la vîtesse avec laquelle l'aire augmente. En déterminant ainsi l'élément de la force vive totale pour chacun des instants qui se succèdent, et en ajoutant ces éléments, l'intégrale exprimera l'accroissement que reçoit la force vive pendant un temps donné. »

« Cette proposition est entièrement semblable à celle qui concerne les forces vives linéaires..... La même analyse qui fait connaître ce que ces propositions ont de commun, montre aussi en quoi elles diffèrent..... Kepler, à qui l'on doit la découverte du mouvement elliptique, reconnut aussi, par la comparaison assidue des observations, que le rayon vecteur de la planète décrit des aires proportionnelles aux temps; Newton s'éleva ensuite de la connaissance des lois mathématiques données par les observations, à celle de la cause physique des phénomènes. Il vit que cette égalité des aires suppose nécessairement que la force qui retient la planète dans son orbite est dirigée vers le soleil. Chacune des lois de Kepler devint ainsi un théorême de dynamique. D'Arcy, Bernouilli et Euler reconnurent que si l'on projette les aires sur un plan quelconque, la somme de ces aires, mesurées dans un même sens, augmente proportionnellement au temps écoulé. »

Ici les commissaires rappellent brièvement le théorême de Newton sur la conservation du centre de gravité; celui de M. de Laplace concernant le plan du *maximum* des aires, les recherches d'Euler sur la mesure et la composition des moments. « Les propositions relatives à cette composition, et plusieurs théorêmes nouveaux sur le même sujet, sont exposés de la manière la plus claire et la plus élégante dans le Traité et les Mémoires que M. Poinsot a publiés sur la statique. Tous ces résultats s'y trouvent déduits d'une seule méthode qui lui est propre, et qui a l'avantage de les rendre très-sensibles, et de prouver immédiatement que les forces de rotations se décomposent, se distribuent et se détruisent suivant des règles entièrement semblables à celles qui conviennent aux forces de translation. Il faut ajouter à cette énumération l'exposé des propriétés relatives aux aires, que Lagrange a donné dans sa Mécanique analytique. »

« La méthode de M. Binet consiste à déduire des équations différentielles du mouvement, les expressions relatives aux aires produites et à leurs fluxions du premier et du second ordre, en prouvant que les expressions se combinent entre elles de la même manière que celles des arcs décrits par les mobiles et celles des vîtesses linéaires. On peut considérer cette analogie entre les aires et les trajectoires sous un autre point de vue : en effet, si, dans l'équation générale qui exprime que la somme des aires projetées croît proportionnellement aux temps, on suppose que le centre des rayons vecteurs est infiniment éloigné de l'origine des coordonnées, on voit immédiatement que la vîtesse avec laquelle la somme

des aires augmente, est la vîtesse avec laquelle le centre de gravité du système s'éloigne d'un plan fixe. Et l'on déduit ainsi le théorême sur le mouvement du centre de gravité, de celui de la conservation des aires. Il en est de même des équations qui expriment les trois parties de la force vive de rotation. »

« Une dernière partie du Mémoire présente un rapprochement ingénieux de plusieurs théorêmes généraux de la mécanique. Pour faire voir que les propositions dérivent d'une source commune, l'auteur ajoute entre elles les équations différentielles des mouvements, multipliées par des coëfficients qui peuvent contenir les variables et leurs différentielles du premier ordre. Il se propose de déterminer ces coëfficients, en sorte que l'on obtienne des expressions intégrables. On arrive par ce moyen à un résultat général qui fournit le théorême relatif au mouvement du centre de gravité, celui des aires, celui des forces vives, enfin celui que l'auteur a démontré. »

« Les recherches qui tendent à perfectionner la mécanique générale intéressent à-la-fois les arts industriels et l'étude de la nature. C'est d'après ces motifs, que la commission a jugé le travail de M. Binet digne de l'approbation de l'Académie, soit pour le choix du sujet, soit pour la manière dont ce sujet est traité. Elle propose l'impression de ce Mémoire dans le recueil destiné aux savants étrangers. »

Moyen nouveau de commettre les cordages, proposé par M. DUBOUL, *maître cordier de la marine marchande, à Bordeaux. Commissaires,* MM. Girard, Molard, Sané, *et* Dupin, *rapporteur.*

Commettre un cordage, c'est mettre ensemble et unir par la torsion les éléments de ce cordage, qu'on appelle *torons,* et qui sont eux-mêmes formés d'autres torons commis ensemble, ou par de simples fils tordus uniformément. Duhamel-Dumonceau a fait dans nos arsenaux de nombreuses expériences pour apprécier les méthodes indiquées jusqu'à lui par le tâtonnement et conservées par la routine; ce qu'on pourrait lui reprocher serait d'avoir employé des appareils grossiers qui ne lui permettaient pas d'atteindre un degré suffisant de précision. Depuis quelques années on a construit, sur les plans de M. Hubert, des dynamomètres, qui servent à déterminer la force des chanvres; les torsions qu'ils peuvent produire ne dépassent pas 2000 kilogrammes: il faudrait qu'on pût en faire qui produisissent des torsions de 100000 kilogrammes, tels à-peu-près que ceux qui ont été construits en Angleterre pour éprouver la force des câbles de fer et des câbles de chanvre. En France, M. Marestier est le premier qui ait résolu le problême de filer le chanvre et de commettre des fils d'une longueur indéfinie dans un espace limité. M. Chanot résolut ensuite le même problême, et, par un hasard remarquable, sa solution se trouva la même que celle de M. Marestier, dans toute la partie importante du mécanisme. M. Hubert est parvenu à peigner les chanvres par un moyen à-la-fois expéditif et ré-

gulier; à les filer avec un rouet léger, sans que l'ouvrier ni le rouet changent de position. Enfin M. le colonel Lair vient de perfectionner le commettage des câbles en rendant parfaitement régulière la force de retenue qu'il faut opérer pour empêcher les torons du câble de tortiller trop vîte et sans être parvenus au degré de raccourcissement le plus avantageux. M. Duboul, arrivé déja à un talent d'exécution fort remarquable, se présente aujourd'hui comme auteur de plusieurs moyens d'ajouter à la force des cordages. Il donne généralement un moindre raccourcissement à ses cordages; proportionnellement, il tord davantage les simples torons, et fait ensuite d'autant moins considérable le premier et surtout le second commettage. Les commissaires discutent les inconvénients et les avantages de ces innovations : ils pensent que les proportions nouvelles présentées par M. Duboul, méritent un mûr examen, et qu'elles doivent être appréciées par une suite d'expériences comparatives bien faites. Les deux machines que M. Duboul propose pour le commettage, n'offrent, à la vérité, rien de nouveau sous le point de vue mécanique; elles n'en sont pas moins utiles dans l'application qu'il en fait à la fabrication des cordages. La conclusion du rapport est, que la persévérance avec laquelle M. Duboul s'occupe du perfectionnement de son art, et les sacrifices qu'il fait pour atteindre ce but, méritent de justes éloges; que ses deux machines, fort peu dispendieuses, peuvent convenir, dans beaucoup de cas, aux travaux de nos ateliers. Enfin les proportions de torsions présentées par M. Duboul offrent des avantages théoriques assez grands pour être tentées et examinées avec tout le soin et le zèle que pourront y mettre des ingénieurs amis des progrès de nos arts.

Lampe de MM. GAGNEAU *et* BRUNET. *Commissaires,* MM. Gay-Lussac, Thénard, *et* Charles, *rapporteur.*

« L'emploi des lampes à double courant d'air est devenu si universel, qu'il forme par lui-même une branche de fabrique très-étendue, et qui s'accroît sans cesse. Chaque jour on imagine des formes et des compositions nouvelles.... Parmi ces divers systêmes de lampes, dont plusieurs remplissent très-bien leur destination, il en est une sur-tout qui depuis vingt ans s'est maintenue constamment supérieure aux autres par l'éclat de sa lumière et la régularité de son action. C'est la lampe de Carcel.... Mais, quelque parfaite que soit cette lampe, la cherté de sa main-d'œuvre, la délicatesse de sa construction, la difficulté plus grande encore de sa restauration faisait desirer que des artistes intelligents apportassent à cette lampe quelques modifications qui, en lui conservant tous ses avantages, simplifiassent son mécanisme, rendissent son exécution et sur-tout sa restauration plus facile. Telle est la lampe de MM. Gagneau et Brunet. Mise en concurrence avec l'une des meilleures du systême de Carcel, pendant trois nuits consécutives, elle a conservé l'égalité pendant dix heures. La nouvelle lampe peut même aller jusqu'a douze heures; mais ce terme, qui est celui de la marche du ressort, est à-peu-près superflu, puisqu'au bout de dix heures la mêche est charbonnée.... La durée de la mêche est subordonnée à la qualité de la fibre plus ou moins capillaire du coton dont elle est tissue; mais cette durée dépend encore plus de la bonté de l'huile,

et dans les expériences on a toujours employé la meilleure.
« Par une application inverse qu'ils viennent de faire de la pompe connue depuis cent ans sous le nom de *pompe des prêtres,* les auteurs ont pu remplacer la pompe de Carcel par deux diaphragmes de taffetas ciré; le frottement devenu presque nul leur a permis de supprimer deux roues, de diminuer la force du ressort moteur, et d'élever néanmoins l'huile à une plus grande hauteur. L'introduction d'un réservoir d'air rend cette élévation constante et continue, tandis que, dans la lampe de Carcel, elle est intermittente comme les coups de piston. La faculté de donner à la base de la lampe et à sa colonne une forme plus svelte et plus légère, est encore un perfectionnement très-agréable. Un autre avantage c'est la facilité de la restauration, en cas que les diaphragmes aient besoin d'être renouvelés. Mais une différence précieuse, et qui sera favorablement accueillie du public, c'est la diminution du prix.... De tout ceci nous croyons devoir conclure que leur lampe mérite l'approbation de l'Académie. »

Mémoire sur les roues à élever l'eau; par M. NAVIER. *Commissaires* MM. de Prony, Fourier, *et* Dupin, *rapporteur.*

M. Navier se propose de déterminer le rapport entre la force motrice et l'effet produit dans les machines de rotation, employées pour élever l'eau.

Le principe de la conservation des forces vives donne une relation mathématique entre les quatre espèces de forces qui restent à considérer dans le problème, quand on né-

gligе le frottement et la cohésion de l'eau, qui sont peu de chose. Ce principe, découvert par Huyghens, fut élevé par Jean Bernouilli au nombre des lois fondamentales de la dynamique; Daniel en fit d'heureuses applications, et Borda s'en servit avec beaucoup de succès pour le calcul de plusieurs machines dont l'eau était le moteur. Dans celles que considère M. Navier, c'est l'eau qui est au contraire élevée par un moteur étranger quelconque. On doit à Borda la première évaluation exacte des forces vives perdues; mais il ne l'a donnée que dans des cas particuliers. C'est à M. Carnot que l'on doit la loi générale qu'il a renfermée dans le théorême suivant. « Dans tout système de corps en mouvement, qui passe d'une situation à une autre, la somme des quantités d'action qui ont été dans cet intervalle imprimées par toutes les forces, est toujours numériquement égale à la moitié de la somme des forces vives, acquises dans cet intervalle par les divers corps du système, plus la moitié des forces vives perdues par l'effet des changements brusques de vîtesse, s'il y a eu de tels changements. »

Les roues à élever l'eau se divisent en trois classes, selon que l'axe de rotation est horizontal, vertical, ou incliné.

Dans la roue à godets, il y a force vive, acquise par l'eau à l'instant où elle est puisée, et force perdue à l'instant où elle est déversée. De la loi ci-dessus on tire le rapport de la force motrice, à l'effet de la machine; et par une simple différenciation, on obtient la vîtesse qui donne le rapport le plus avantageux.

Dans la roue à tympan il n'y a pas de force perdue; cette roue est plus avantageuse que la précédente.

M. Navier entre dans de grands détails sur la pompe spi-

rale, formée par un tuyau de grosseur constante ou variable, plié en hélice sur un cône dont l'axe est horizontal. Cette machine ingénieuse a l'avantage très-précieux de donner un effet utile d'autant plus grand, qu'il s'agit d'élever l'eau à une plus grande hauteur. Le calcul de M. Navier détermine à quelle hauteur cet avantage commence à être bien sensible.

Si l'on fixe à un axe vertical un siphon incliné de manière à monter en sens contraire du mouvement de rotation, le bout inférieur étant plongé dans l'eau, l'eau s'élevera par l'effet de la rotation. L'auteur calcule l'effet d'une machine formée de deux paraboloïdes tournant ensemble sur le même axe vertical, et réunis l'un à l'autre par des cloisons inclinées.

Les vis d'Archimède composent la classe dont l'axe est incliné. Daniel Bernouilli s'est occupé de leur théorie; mais il ne l'a pas épuisée, ainsi que le fait M. Navier. Pour le cas où un tuyau de diamètre constant, plié en spirale sur un cylindre dont l'axe est incliné, se remplit alternativement d'eau et d'air, il démontre d'une manière simple et élégante que la surface de l'eau doit être un paraboloïde, ayant pour un de ses diamètres l'axe du cylindre, et pour plan tangent, à l'extrémité de diamètre, la surface de l'eau tranquille.

Pour la vis ordinaire, formée par les révolutions d'une face gauche, à pente constante dans un cylindre circulaire, après avoir cherché les quantités d'eau contenues dans chaque tour de la vis; il dresse des tables pour abréger les calculs nécessaires, suivant que les vis sont plus ou moins contournées, et leur axes plus ou moins inclinés.

« Le travail très-étendu dont nous venons de rendre

compte, disent les commissaires, nous paraît être du nombre de ceux que l'Académie doit le plus encourager par ses suffrages. Ete ndre par une marche uniforme les moyens théoriques d'ap précier les effets des machines, c'est resserrer de plu s en plus le cercle de l'empirisme; c'est fournir aux artistes des moyens généraux de se rendre compte des avantage s et des désavantages qu'ils doivent espérer ou craindre de leurs inventions. »

L'Académie a arrêté, en conséquence, que le Mémoire e M. Navier serait imprimé dans le volume des savants étrangers.

NOTICE

SUR LA VIE ET LES TRAVAUX

DE M. PÉRIER,

PAR M. LE CH[er] DELAMBRE, SECRÉTAIRE-PERPÉTUEL;

Lue dans la séance publique de l'Académie royale des Sciences, le 22 mars 1819.

Le nom de M. Périer est célèbre; ses ouvrages sont disséminés sur toute la face de la France. Sa réputation s'est établie sans que jamais il ait eu le loisir, ni peut-être l'idée d'y songer. Il a peu écrit, et presque rien imprimé. Son frère, le digne compagnon de ses travaux, M. Périer Desgarennes, a montré une indifférence plus grande encore pour la renommée. Nous l'avions consulté, pour obtenir de lui les renseignements qui nous manquaient, et qui auraient pu donner à cette Notice plus d'intérêt et de variété; nous attendons encore une réponse. Réduits à consulter les registres de l'Académie et les dépôts du secrétariat, nous n'avons été secourus d'ailleurs que par le discours improvisé sur la tombe de M. Périer par l'un de ses confrères le plus à portée de le connaître et de l'apprécier; par les divers écrits de M. Girard sur les eaux de Paris, enfin par un Mémoire que ce savant a bien voulu nous communiquer sur les

divers établissements dont on est redevable à l'activité infatigable des deux frères.

Jacques-Constantin Périer était né à Paris le 2 novembre 1742, de Joseph-Constantin Périer, receveur-général des domaines et bois de la généralité d'Alençon, (et d'Anne-Charlotte Poupardin). Il eut un autre frère, mort à l'âge de vingt-cinq ans, dans le département des Landes, où il s'occupait de travaux importants pour les arts. Ainsi MM. Périer avaient tous trois les mêmes goûts. Ils s'étaient formés eux-mêmes, ou presque sans aucun maître. Leurs premiers ouvrages furent des machines électriques et pneumatiques, et divers autres instruments de physique expérimentale. La première invention un peu remarquable de Constantin Périer fut une pompe centrifuge, dont l'effet étonna l'abbé Nollet. Plusieurs machines hydrauliques ou à vapeur, quoiqu'elles ne fussent encore que des essais, annonçaient déja ce que Périer devait être un jour.

Le duc d'Orléans et le duc de Chartres, devant lesquels les deux frères furent admis à faire diverses expériences, surent les distinguer, ne cessèrent jamais de les protéger, et leur confièrent l'exécution d'une quantité de modèles, objets d'arts et de métiers, qu'ils destinaient à orner une galerie. Cette collection intéressante a été admirée de tous ceux qui l'ont vue au conservatoire des arts et métiers.

Les deux frères donnant insensiblement plus d'extension à leurs idées, formèrent le vaste projet de fournir d'eau tous les quartiers de Paris, au moyen des machines à vapeur.

Par un rapport écrit tout entier de la main de Borda (signé en outre par d'Arcy, Bezout, le Roi et Bossut), nous voyons

que dans les premiers mois de 1776, M. Périer, âgé alors de trente-trois ans, avait présenté au ministre Malesherbes, qui l'avait renvoyé à l'Académie des sciences, un *projet pour distribuer l'eau de la Seine à Paris.* Les machines hydrauliques qu'on y voyait alors, ne fournissant pas, à beaucoup près, une quantité d'eau suffisante pour les besoins; on s'occupait depuis plusieurs années des moyens d'y suppléer. Parmi les projets présentés, celui de Desparcieux avait principalement fixé l'attention du public. Le gouvernement avait paru y prendre de l'intérêt, et s'il n'en avait pas entrepris l'exécution, on avait tout lieu de croire qu'il n'avait été retenu que par la crainte d'une dépense trop considérable.

Les autres manières de remplir le même objet se réduisaient à faire usage, soit de machines mues par des chevaux, soit de nouvelles machines hydrauliques, soit enfin de pompes à vapeur. Les premières sont d'une trop grande dépense; les secondes auraient augmenté les embarras déja trop grands de la navigation; il ne restait qu'à employer les pompes à feu, ainsi que le proposait M. Périer.

Son idée générale était de construire plusieurs machines pour distribuer l'eau de la Seine dans Paris, et de les établir dans les lieux qui lui seraient indiqués comme les plus convenables. Chaque bâtiment devait contenir deux machines semblables, qui pourraient suppléer l'une à l'autre en cas d'accident; l'eau serait élevée d'abord dans un réservoir provisionnel, qui devait couvrir tout le bâtiment, et qu'on aurait soin d'entretenir toujours plein, afin d'en tirer de prompts secours contre les incendies. De ce réservoir devaient partir différentes conduites pour porter l'eau dans tous les quartiers, et même dans toutes les rues. Chaque

particulier en tirerait la portion pour laquelle il aurait souscrit, au moyen d'un tuyau adapté à la conduite qui passerait devant sa maison; et elle lui serait distribuée deux ou trois fois par semaine, par des fontainiers chargés de ce soin.

Tel était le plan général de M. Périer. Ce n'était point au gouvernement qu'il proposait cette dépense; il s'engageait à faire à ses frais tout l'établissement des machines, et même celui de la distribution de l'eau, moyennant un prix qui serait payé par les particuliers, proportionnellement à la quantité d'eau qui leur serait fournie d'après leurs demandes.

Les commissaires faisaient remarquer d'abord à l'Académie que ce projet n'avait rien de nouveau, rien qui ne fût déja exécuté ailleurs depuis long-temps. En effet, une partie de la ville de Londres était dès-lors fournie d'eau par deux machines à vapeur, et cette eau était distribuée précisément de la même manière que le proposait M. Périer. Ils ajoutaient que, par-là même, le projet n'en devait inspirer que plus de confiance, et que si, d'un côté, il ne laissait, pour ainsi dire, à l'auteur que *le mérite de l'imitation et celui d'une bonne exécution;* d'un autre côté, le public ne courrait aucun risque en l'adoptant.

« M. Périer avait déja construit pour le jardin de Monceaux une pompe à vapeur dont le mécanisme offrait des nouveautés ingénieuses; mais cette partie des arts industriels, a dit M. de Prony, n'en était pas moins chez nous dans l'enfance, à une époque où le célèbre mécanicien Watt en avait changé la face en Angleterre, par les plus brillantes inventions. »

« Avant lui on n'employait la vapeur que pour obtenir un vide instantané, et c'était le poids de l'atmosphère qui pro-



avis, car on sait que le prix de l'abonnement fut considérablement augmenté; ce qui provint sans doute de ce que, dans l'origine, on s'était fort exagéré la quantité probable des souscriptions particulières.

La conclusion des commissaires était que M. Périer, *dont les talents étaient déja connus par des machines de son invention et par beaucoup d'autres travaux, leur paraissait d'ailleurs très-propre à conduire une entreprise de cette espèce, qui demande des connaissances de plus d'un genre, une grande pratique des arts, et beaucoup de ressources dans l'esprit.*

Et par une addition, qui probablement était le résultat de la discussion dans le sein de l'Académie, les commissaires terminaient en disant : «Que le projet de Deparcieux paraissait plus propre encore à remplir les besoins d'une grande ville, tant par la durée des ouvrages, que par la quantité d'eau que devait amener le canal projeté.»

La fortune de MM. Périer, quoique assez considérable, ne suffisait pas, à beaucoup près, pour une entreprise aussi vaste; il fallait trouver une compagnie de capitalistes. M. Périer l'aîné, dont le caractère était à-la-fois insinuant et entreprenant, se chargea de toutes les démarches; elles réussirent en peu de temps. Dès le 27 août 1778, la compagnie était formée; une première mise de fonds de 1440 mille livres fut partagée en 1200 actions; on s'était réservé la faculté d'en émettre de nouvelles, à mesure que l'entreprise acquerrait plus d'extension. MM. Périer, auteurs du projet et propriétaires du privilége, étaient placés à la tête de tous les travaux, avec le titre d'administrateurs perpétuels. L'acte d'association leur assurait d'ailleurs d'assez grands avantages; on

résolut d'envoyer les deux frères en Angleterre pour y traiter de deux machines à vapeurs. Ils se disposaient à partir, lorsqu'on apprit qu'un ministre avait traité avec un Anglais pour le privilége de ces machines; il fallut obtenir son désistement qui coûta à la compagnie une somme de 40 ou 50 mille liv.

M. Périer fit cinq voyages en Angleterre (son frère n'en fit qu'un seul). Il visita quantité d'établissements où il puisa des connaissances précieuses. Rentré en France, il y fut bientôt suivi des pièces principales des deux machines que l'on voit encore à Chaillot. Il fit fabriquer dans ses propres ateliers les pièces accessoires qu'il lui parut inutile de tirer de l'étranger.

Au commencement de 1783, M. Périer présenta à l'Académie deux Mémoires. Le premier contenait la description de la pompe à feu qui venait d'être établie à Chaillot, pour élever les eaux de la Seine, dans plusieurs réservoirs, à 110 pieds de hauteur au-dessus des basses-eaux. Cette machine était construite d'après les principes de M. Watt.

Le second Mémoire contenait la description d'une seconde pompe, établie de même à Chaillot, et qui élevait l'eau dans un réservoir haut de 15 pieds, d'où en retombant elle faisait tourner plusieurs roues à godets destinées à mettre en jeu une machine à percer des tuyaux; des soufflets, des marteaux de forges, enfin toutes les parties d'un grand atelier (1).

Dans la seconde machine, en prenant dans les constructions de M. Watt ce qui devait contribuer le plus à aug-

(1) Le rapport est tout entier de la main de Coulomb; les autres commissaires étaient Leroy, Bossut et Cousin. (19 mars 1783.)

menter l'effet, M. Périer avait cherché à diminuer la dépense, à simplifier l'exécution, à faciliter les réparations et l'entretien.

Pour connaître à tous les instants la situation de sa pompe, l'auteur y avait adapté deux siphons remplis de mercure; l'un, communiquant par une de ses branches avec le tuyau de vapeur, indiquait la force d'expansion; l'autre, communiquant avec le condensateur, indiquait jusqu'à quel degré le vide s'y était opéré. Un moyen très-simple et très-ingénieux servait à remplir presque en entier le réservoir d'un air condensé, qui était nécessaire pour donner plus d'uniformité au mouvement de la conduite. Une autre idée également ingénieuse, et qui peut être d'un bon usage dans les grandes machines en mouvement, était d'avoir disposé les différentes parties du balancier, dont le poids est à-peu-près de 30,000 livres, de manière qu'il fît des vibrations à-peu-près isochrones à celles des coups de piston. Par ce moyen, les forces destinées à produire l'effet, ne sont presque pas altérées par l'inertie du balancier.

Les commissaires demandaient l'insertion des deux Mémoires au recueil des savants étrangers; ils n'y ont cependant jamais paru. Il n'en est même fait aucune mention dans l'histoire imprimée de l'Académie, où le nom de M. Périer ne se trouve nulle part, pas même dans les tables où les noms des académiciens de toutes les époques sont rangés par ordre alphabétique. Il ne serait pas mentionné davantage dans l'histoire de l'Institut, si l'on n'y trouvait, tom. V, un Mémoire de quelques pages sur l'application de la machine à vapeur à l'extraction du charbon ou des autres produits des mines.

On avait reconnu qu'il y avait beaucoup d'économie à épuiser les eaux des mines avec des machines à vapeur; l'auteur en conclut qu'on doit trouver le même avantage à monter le charbon par le même moyen. Il ne se propose pas de décrire une machine connue depuis long-temps; il se borne à indiquer les changements qu'il a fallu apporter à la forme ordinaire pour adapter la machine à ce nouvel emploi. Le balancier s'y trouve remplacé par deux roues d'engrenage, qui conduisent la tringle du piston suivant une direction perpendiculaire. Ce changement réduit le volume de la machine, la rend plus transportable, plus facile à démonter et remonter, lorsqu'on abandonne un puits d'extraction, pour la placer sur un autre.

Cette machine était destinée pour l'exploitation des mines de Litry, département du Calvados. Elle était alors montée dans les ateliers de Chaillot pour en faire l'expérience; nous en verrons plus loin la réussite.

Les recueils de l'Académie ne nous fournissant aucun autre renseignement, nous avions d'abord consulté la *Connaissance des temps,* pour savoir à quelle époque le nom de M. Périer avait été inscrit sur la liste des académiciens. Mais nous avons depuis retrouvé une lettre de M. Amelot à M. de Saron, président de l'Académie, du 30 mars 1783, onze jours après le rapport fait à l'Académie sur la pompe de Chaillot.

Après la confirmation donnée par le roi à deux choix faits suivant les formes ordinaires, le ministre ajoute que *S. M. a également jugé à propos de nommer M. Périer à une place d'adjoint surnuméraire dans la même classe,* c'est-à-dire dans la section de mécanique.

En 1784, l'abbé Rochon étant devenu pensionnaire par la mort de Bezout, Coulomb le remplaça dans la section comme associé; M. Périer devint l'un des deux adjoints sans nomination nouvelle; et son titre de surnuméraire fut seulement supprimé. Peu de temps après, par une nouvelle distribution des places dans l'Académie, le titre d'adjoint fut changé en celui d'associé ordinaire, et M. Périer conserva ce dernier titre jusqu'à la suppression en 1793. A la formation de l'Institut, il fut nommé, le 9 décembre 1795, membre de la section de mécanique.

La grande entreprise des eaux de Paris n'absorbait ni tout le temps, ni toutes les ressources de MM. Périer. On leur vit exécuter les machines de Bagatelle, de Neuilly, du Raincy, et cent autres de même espèce; ils furent chargés de former le laminoir, les rouleaux et autres machines pour l'établissement de Romilly; ils terminèrent celui de l'Indret et celui du Creusot commencé par un Anglais.

Ils surent varier la construction de leurs machines, suivant les divers usages auxquels on les destinait. Les unes devaient servir à l'ornement des jardins, les autres à des laminoirs; à la fabrique soit des boutons, soit du tabac; à l'épuisement des eaux, à donner le mouvement aux moulins, aux filatures de laine et de coton; à l'extraction des minerais, au forage des canons.

Leurs ateliers étaient parvenus au plus haut point de faveur lorsque la révolution éclata; MM. Périer en furent les premières victimes, puisque, dès 1788, la compagnie des eaux, qui commençait à prospérer, se trouva renversée par une compagnie nouvelle. Une troupe de soldats suisses envahit à main armée leurs ateliers, d'où ils se virent contraints

de sortir avec leurs ouvriers. Pendant toute la durée du procès qui fut la suite de cet acte arbitraire, MM. Périer continuèrent de payer tous ceux d'entre ces ouvriers qui purent prouver qu'ils n'étaient pas employés. Réintégrés au bout de six semaines par un arrêt du parlement, ils restèrent privés d'une pension de 20000 liv. qui leur avait été assurée par la première compagnie.

Vers le même temps, un hiver rigoureux ayant suspendu l'action de tous les moulins, Paris conçut les alarmes les plus fondées sur ses subsistances. MM. Périer exécutèrent, avec une promptitude et une perfection singulière, trois cents moulins et autant de bluteries, qui présentaient d'ailleurs un avantage bien précieux dans la circonstance, celui d'employer une multitude de bras.

Pour empêcher que de pareilles alarmes pussent jamais renaître, MM. Périer créèrent les moulins de l'île des Cygnes. Deux superbes machines à double effet et de rotation faisaient mouvoir douze moulins dont les meules avaient 6 pi. 2 po. de diamètre.

Quelques intérêts privés, quelques inconvénients particuliers, tels que les frais de combustible, qui empêchaient de considérer un tel établissement autrement que comme une ressource extraordinaire dans un besoin extrême, firent négliger peu-à-peu cette usine superbe, dont il reste à peine quelques légers vestiges.

Quand on voulut donner des canons à chacune des sections de la garde nationale, MM. Périer se chargèrent de cette entreprise toute nouvelle pour eux. Ils coulèrent et forèrent toutes les pièces demandées. Bientôt de nombreuses armées leur donnèrent de nouvelles occasions de déployer

leurs talents et leur industrie. On conçut le projet de remonter la marine; il lui fallait une artillerie particulière : douze cents bouches à feu de différents calibres sortirent en différents temps de leurs fonderies. Ils ne pouvaient suffire à des besoins toujours croissants; on vit se former un grand nombre d'ateliers qui tous adoptèrent les procédés employés dans ceux de MM. Périer.

Tant de travaux, une activité si soutenue, auraient dû leur procurer une fortune immense et bien légitime; mais qu'on se rappelle le discrédit des assignats, et les formes de liquidation établies par les divers gouvernements qui se sont succédé si rapidement, et l'on concevra que le résultat définitif de tant d'entreprises ait été la ruine presque complète des courageux entrepreneurs. Les manufactures qui se multiplièrent bientôt leur offrirent quelques faibles dédommagements.

M. Périer était resté seul propriétaire de l'établissement de Chaillot, qui, à sa retraite, fut acquis par M. Scipion Périer. L'établissement n'a point changé de nom; c'est un premier avantage, et d'ailleurs le nouveau possesseur ne néglige rien pour en soutenir la réputation.

Un décret, qui finit par n'avoir aucune exécution, avait institué des prix pour toutes les choses grandes et belles qui auraient pris naissance dans les dix années précédentes; les rapports du jury et des différentes classes de l'Institut subsistent du moins, et l'on y trouve des témoignages éclatants rendus aux titres avec lesquels M. Périer s'était présenté au concours.

« Sa machine pour monter le charbon et les minéraux, disent les commissaires, présentait des difficultés dans sa

composition. Il fallait la rendre tellement docile, que le conducteur pût à volonté changer le mouvement pour monter et descendre alternativement les tonnes, et l'arrêter tout-à-fait pour donner aux ouvriers le temps de les vider. Le grand nombre de ces machines qui furent exécutées atteste leur utilité et leur succès. La seule compagnie qui exploite les mines de charbon auprès de Valenciennes, en possède vingt-une. Elles ont rendu à l'agriculture, au commerce et aux armées tous les chevaux qu'elles remplacent dans ce travail. Cette machine a été appliquée avec le même succès aux filatures de coton de MM. Bawens et Rossel à Gand; à Liége, à la fonderie de canons, ces mêmes machines mènent vingt foreries. Elles ont été employées aux travaux du canal de Saint-Quentin, à l'écluse de Condé, au bassin de Cherbourg; enfin c'est un moteur universel, dont on peut porter la puissance à celle de vingt chevaux travaillant tous à-la-fois. »

« M. Périer exécuta plusieurs presses hydrauliques, qu'il a le premier importées en France. L'une d'elles est en activité dans la manufacture de M. Ternaux à Louviers. Une autre est destinée à la fabrique de la brique et de la tuile; elle presse à sec et avec une telle force, que, presque au même moment, on peut mettre au four ces briques, qui en sortent plus compactes et mieux faites que par les procédés ordinaires. Une troisième est destinée à frapper la monnaie. Enfin, ajoutent les commissaires, les machines de M. Périer méritaient une mention d'autant plus honorable, qu'elles venaient à la suite d'une quantité d'autres, que depuis quarante ans il n'a cessé de répandre, avec une sorte de profusion, dans les arts et les manufactures, en sorte que c'est l'occasion de répéter ce que le jury disait dans une autre cir-

constance : que *s'il y avait un prix d'utilité publique, on pourrait présenter avec confiance M. Périer, comme celui à qui les arts mécaniques et l'industrie nationale ont les plus nombreuses obligations.* « Une aussi grande impulsion, a dit M. de Prony, doit placer M. Périer au rang des meilleurs citoyens et des bienfaiteurs de son pays. »

Long-temps M. Périer fut assidu à nos séances; nommé de droit commissaire, toutes les fois qu'il s'agissait de juger quelque invention nouvelle en mécanique, ses rapports, dont il s'occupait toujours sans délai, étaient rédigés avec autant de netteté que d'impartialité. L'âge, les infirmités, les maladies augmentées peut-être encore par des chagrins, cortége trop ordinaire de la vieillesse, ont rendu plus rare en ces derniers temps sa présence parmi nous; mais elle n'a cessé tout-à-fait que quand ses forces l'eurent entièrement abandonné. Nous l'avons perdu le 16 août 1818, à l'âge de soixante-quinze ans neuf mois et quelques jours.

Il a été remplacé dans la section de mécanique par M. Dupin, le 28 septembre suivant.

NOTICES

Sur les voyages entrepris pour mesurer la courbure de la terre et la variation de la pesanteur terrestre, sur l'arc du méridien compris entre les îles Pythiuses et les îles Shetland.

Nous avions formé le dessein d'insérer dans cette histoire la notice lue par M. Biot, au commencement de 1818, à la séance publique des quatre Académies, sur les mesures du pendule faites par lui en Écosse et aux îles Shetland. Cela nous a rappelé une autre notice lue par le même académicien, dans notre séance publique de 1810, et dans laquelle il rendait compte des travaux exécutés par M. Arago et lui en Espagne. Comme ces deux écrits complètent l'exposé des opérations entreprises pour continuer et étendre la méridienne française, nous les insérons l'une et l'autre ici.

NOTICE *sur les opérations faites en Espagne pour prolonger la méridienne de France jusqu'aux îles Pythiuses, lue à la séance publique de la classe des sciences physiques et mathématiques pour l'année* 1810;

Par M. BIOT.

La détermination de la figure de la terre et la mesure de sa grandeur ont beaucoup occupé les géomètres et les astro-

nomes. C'est une belle application des sciences exactes que d'avoir su déterminer les dimensions de ce globe que nous habitons, et d'avoir fait de sa grandeur même le type invariable d'une mesure universelle, dont les subdivisions servent pour arpenter nos champs, et les multiples pour évaluer les espaces célestes.

Il est vrai que ce beau résultat des sciences n'a été obtenu que par de longs travaux : il y a bien loin des opérations minutieusement exactes de l'astronomie moderne, aux premières tentatives que fit Ératosthène pour évaluer la grandeur de la terre, d'après la longueur des ombres de Gnomon observées à Syène et à Alexandrie.

On est aujourd'hui assuré de ne pas se tromper de 600 mètres (300 toises) sur la grandeur absolue du rayon moyen de la terre, qui surpasse 6,000,000 de mètres. Cela peut paraître inconcevable aux personnes qui ne connaissent pas les procédés dont nous faisons usage; mais rien ne semble plus simple lorsqu'on les a examinés. Sans entrer ici dans des détails techniques, il est cependant facile de sentir au moins la possibilité d'une pareille exactitude. Il suffit, pour cela, de remarquer que la surface de la terre n'est réellement pas aussi irrégulière qu'elle le paraît au premier coup d'œil; les montagnes dont elle est hérissée, les vallées qui la sillonnent, ne sont, comparativement à sa masse, que des rides presque imperceptibles. Les petites aspérités qui se rencontrent sur la peau d'une orange sont relativement beaucoup plus considérables. Si l'on fait d'ailleurs attention que les continents terrestres sont entourés de tous côtés par la mer qui s'y insinue par un grand nombre d'ouvertures; que leurs bords ne sont nulle part fort élevés au-dessus du niveau des eaux

qui les baignent ; que tous les fleuves dont ces continents sont entrecoupés se rendent aussi à la mer par des pentes assez faibles, puisqu'ils sont généralement navigables, on verra, dans cet équilibre, l'effet d'un nivellement général de la surface terrestre ; on concevra que sa courbure doit suivre la courbure régulière de l'Océan, et par conséquent l'on sentira que la mesure d'une pareille convexité peut avoir toute la rigueur d'une opération mathématique.

Il ne reste donc plus qu'à faire connaître les procédés que l'on emploie pour effectuer cette mesure. Vous avez vu quelquefois sur les bords de la mer un navire s'éloigner du rivage : d'abord on l'aperçoit tout entier ; mais peu-à-peu, à mesure qu'il s'éloigne, il semble s'enfoncer dans l'horizon ; on perd d'abord de vue le corps du bâtiment, puis ses basses voiles, puis le haut de ses mâts, et enfin il disparaît entièrement. C'est l'effet de la convexité de la terre qui s'interpose entre le vaisseau et vous. En même temps les gens du bord voient un spectacle semblable : pour eux, c'est le rivage qui, dans le lointain, s'abaisse, disparaît ; puis ce sont les maisons, puis les tours, puis les montagnes, jusqu'à ce qu'enfin ils se voient entourés de tous côtés par l'horizon de la mer. Cet abaissement progressif qu'ils observent en s'éloignant du rivage, nous l'observons également dans les signaux célestes, lorsque nous voyageons sur la terre du nord au sud ou du sud au nord : le pôle et les étoiles qui l'environnent s'abaissent sur l'horizon, à mesure que nous allons vers le sud ; il s'élève, au contraire, si nous revenons. Toutes les étoiles participent à ces changements d'élévation dont notre déplacement seul est cause. En mesurant avec

soin leur hauteur au-dessus de l'horizon de chaque lieu, nous pouvons connaître l'arc céleste qui correspond à l'arc terrestre que nous avons parcouru; en mesurant aussi la longueur itinéraire de cet arc, nous pouvons comparer ces deux valeurs, et conclure de leur comparaison la grandeur du contour entier de la terre.

L'observation de la hauteur des astres sur l'horizon se fait avec des instruments d'une précision extrême, au moyen desquels on peut évaluer les plus petites fractions. On répète les observations jusqu'à plusieurs milliers de fois dans chacun des points extrêmes de l'arc que l'on mesure, et l'on prend le milieu entre tous ces résultats, afin que les petites erreurs des observations partielles se détruisent par leur compensation. Quant à la longueur itinéraire de l'arc, on la mesure comme on arpente un champ, comme on lève un plan; c'est-à-dire, en toisant d'abord une première longueur qui sert de base à tout le travail, puis établissant sur cette base une suite de triangles qui s'enchaînent les uns aux autres, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à l'autre station. La mesure d'un arc du méridien ne diffère des opérations dont je viens de parler, que par une extrême recherche de précision et d'exactitude.

C'est ainsi qu'en 1670, Picard, membre de l'Académie des Sciences, joignit les parallèles de Malvoisine et d'Amiens; car la première mesure exacte de la figure de la terre a été faite en France. Plusieurs travaux de ce genre ont été aussi exécutés en France par MM. Cassini, famille célèbre dans l'astronomie par une longue suite de mérites. Enfin, c'est ainsi que Bouguer, Godin, la Condamine, Clairault, le Monnier, Maupertuis et la Caille, tous nos compatriotes, sont

allés chercher les éléments de la même mesure, sous les feux de l'équateur, parmi les glaces des pôles, et jusque dans l'hémisphère austral de la terre.

Malgré tant d'efforts, malgré tant d'entreprises, on pouvait faire mieux encore; non pas avec les moyens dont s'étaient servis ces habiles astronomes : ils avaient fait tout ce qui était possible dans les circonstances où ils se sont trouvés. Mais les instruments d'astronomie étaient bien éloignés alors de la perfection qu'ils ont maintenant acquise, perfection telle qu'on peut la regarder comme la limite des efforts de l'industrie humaine, et comme le terme de la précision que l'on peut atteindre par des évaluations mécaniques; surtout depuis qu'un autre français, Borda, membre de cette compagnie, eut trouvé le secret d'atténuer indéfiniment les erreurs des observations partielles, en les faisant suivre et succéder les unes aux autres, sur le limbe circulaire de l'instrument auquel il a donné le nom de cercle répétiteur.

C'est avec la réunion de tous ces procédés perfectionnés, avec tous les secours de la physique, sur-tout avec les lumières d'une théorie profonde, que MM. Méchain et Delambre ont entrepris une nouvelle mesure de la terre, d'après l'observation de l'arc terrestre compris entre Dunkerque et Barcelone. Cette opération, la plus grande de ce genre, et la plus parfaite que l'on eût encore exécutée, a été achevée par eux et par eux seuls : on sait avec quel succès. Mais leurs destinées ont été diverses. L'un a eu le bonheur de voir ce grand ouvrage terminé et rendu public; il jouit maintenant parmi nous de l'estime due à ses nombreux et importants travaux. L'autre est mort au fond de l'Espagne, victime des

fatigues excessives auxquelles il n'avait jamais voulu donner de relâche, et qu'il n'a pu supporter.

La prolongation de la méridienne en Espagne, que Méchain avait entreprise et qu'il voulait pousser jusqu'aux îles Baléares, faisait répondre le milieu de l'arc sur le parallèle de 45°, intermédiaire entre l'équateur et le pôle. Par l'effet de cette circonstance, le calcul du quart du méridien terrestre n'exigeait point la connaissance de l'aplatissement de la terre. En même temps les petites erreurs des observations, se trouvant réparties sur un plus grand arc, devenaient moins sensibles dans le résultat définitif, et par conséquent celui-ci acquérait une plus grande certitude. Ces motifs faisaient vivement regretter l'interruption de ce travail. Le bureau des longitudes voulut bien confier à M. Arago et à moi le soin de le terminer. Le gouvernement espagnol nous adjoignit deux commissaires, MM. Chaix et Rodriguez; le premier, astronome déja connu par plusieurs travaux utiles; le second, plus jeune, sans fortune, venu d'Espagne en France par le seul desir d'étudier l'astronomie et les hautes mathématiques, à l'observatoire et au collége de France, s'était depuis long-temps acquis notre estime et notre amitié. L'empereur ordonna l'expédition, et accorda libéralement tous les fonds nécessaires pour l'exécuter. L'Espagne nous donna un vaisseau, l'Angleterre un sauf-conduit.

L'opération que nous allions reprendre était suspendue depuis trois ans. Pour profiter du travail de Méchain, il fallait retrouver ses stations, rassembler les instruments qu'il avait laissés en Espagne, et qui étaient déposés dans les villages où il avait séjourné. Il fallait réunir le plus qu'il serait possible de données positives sur la configuration du pays

où nous allions établir nos triangles. Nous devons exprimer ici notre reconnaissance au fils et à la veuve de Méchain, qui voulurent bien nous confier le journal particulier de cet astronome. Nous devons également beaucoup à notre ami M. le Chevallier, l'un des conservateurs de la bibliothèque du Panthéon, qui s'est empressé de nous donner, sur le même sujet, tous les renseignements dont il était possesseur. Animé par le seul desir de voir un pays célèbre, en contribuant à une entreprise utile, M. le Chevallier avait accompagné Méchain dans son premier voyage, et avait partagé avec lui tout ce qu'un séjour habituel sur des montagnes désertes entraîne de fatigues et de privations.

En arrivant en Espagne, notre premier soin fut de visiter toute la chaîne de montagnes sur laquelle nous devions nous établir. Une difficulté, sur-tout, nous occupait et méritait toute notre attention. Pour lier l'île d'Yvice à la côte d'Espagne, il fallait former un triangle dont le sommet fût dans l'île, et la base sur le continent. Or, d'après la distance d'Yvice à la côte d'Espagne, il était clair que ce triangle n'aurait pas moins de 142,000 mètres, environ trente-cinq lieues de base, et qu'un de ses côtés aurait plus de 160,000 mètres, environ quarante et une lieues de longueur (1); à de si grandes distances, des signaux de jour auraient été complè-

---

(1) Il s'agit ici de lieues de 2000 toises. La valeur des lieues étant tout-à-fait arbitraire, je n'ai employé cette dénomination vague que pour rendre sensible à l'esprit la grandeur de nos triangles, par des évaluations encore habituelles pour beaucoup de personnes, mais que sans doute, avec le temps, on finira par abandonner pour les évaluations métriques qui ont sur les autres l'avantage d'avoir toujours, et par-tout, la même signification.

tement invisibles. On devait y suppléer par des lampes à courant d'air, derrière lesquelles on plaçait de grands miroirs de métal poli, pour réfléchir la lumière, et toutes les observations devaient se faire de nuit. Mais, malgré tant de précautions, la chose était-elle possible, et la clarté de quelques lampes pourrait-elle percer à travers une si grande profondeur d'air? Voilà ce qui n'était nullement certain, et ce dont nous n'avions malheureusement que trop de raisons de douter.

Quelque effrayants que fussent ces obstacles, nous ne perdîmes point courage : nous résolûmes d'établir nos stations sur les montagnes les plus hautes, d'où les feux pouvaient le plus aisément être aperçus; d'y rester obstinément plusieurs mois, s'il le fallait, et d'attendre tout du hasard, d'une nuit favorable, d'un temps calme, d'un ciel parfaitement serein.

Pour exécuter ce plan avec sûreté et promptitude, nous nous partageâmes les préparatifs. M. Arago alla établir notre cabane et nos cercles sur la montagne du *Desierto de las Palmas*, que Méchain avait choisie pour l'un des sommets du grand triangle. On appelle ainsi cette montagne, parce qu'il y croît en abondance une petite espèce de palmier à feuilles en éventail, que les botanistes nomment le *chamærops humilis*. Pour moi, je passai dans l'île d'Yvice avec M. Rodriguez. Nous parcourûmes toutes les montagnes qu'elle présente au nord, et d'où la côte d'Espagne peut être aperçue par un temps serein. Méchain en avait choisi une dont la position se prêtait au double projet qu'il avait formé de faire arriver la chaîne des triangles dans Yvice, par Mayorque ou par la côte de Valence; mais maintenant que

l'on s'était décidément arrêté à ce dernier projet, on pouvait trouver sur la côte d'Yvice d'autres montagnes plus favorablement situées pour cette destination particulière. Nous en distinguâmes une appelée Campvey, qui réunissait les avantages d'être plus au nord que toutes les autres, d'être aussi plus élevée, plus isolée, et dont le sommet chauve, tout formé d'un calcaire blanchâtre, devait être sur-tout facile à reconnaître de loin. Du haut de cette montagne, on voyait aussi la petite île de Formentera, dans le sud, à vingt-cinq minutes de distance. En liant cette île à nos triangles, on prolongeait l'arc de toute cette quantité. Nous y allâmes, Rodriguez et moi, afin de reconnaître par nous-mêmes la possibilité de cette jonction, et aussi pour déterminer le point de la côte d'Espagne sur lequel on pourrait établir le sommet de ce dernier triangle. Ce plan arrêté, nous fixâmes notre dernière station dans la partie la plus montueuse de l'île, et nous louâmes, pour cet objet, la maison d'un pauvre paysan, bien étonné de voir des étrangers venir de si loin chercher une pareille habitation. De retour dans Yvice, on porta les réverbères sur le sommet de Campvey; on y dressa une tente et une petite cabane en planches, que Méchain avait fait construire à Barcelonne, et qui pouvait se monter et se démonter à volonté. Nous avions trois de ces cabanes pour les trois sommets du grand triangle, où nous devions séjourner long-temps; faible abri contre les coups de vent et les tempêtes auxquels nous avons été si souvent exposés sur nos montagnes. Le temps, couvert et nuageux, ne laissant pas voir la côte de Valence, nous dirigeâmes de notre mieux les miroirs des lampes avec une boussole, d'après la position que les cartes donnaient au *Desierto de las Palmas*, où

M. Arago était déja placé. M. Rodriguez resta dans l'île avec quatre matelots, pour veiller à l'entretien des réverbères, et à ce qu'ils fussent exactement allumés toutes les nuits. Ce n'est qu'après avoir vu ces lieux sauvages, que l'on peut apprécier tout ce qu'il faut de zèle et de dévouement pour se résoudre à passer ainsi un hiver entier dans une pareille solitude, n'ayant pour compagnons que des matelots, pour nourriture que les aliments les plus grossiers, pour promenade que des débris de rocs, pour perspective que la vue uniforme et monotone de la mer. Et, ce qui achevait de rendre cette situation pénible, M. Rodriguez n'avait pas même la satisfaction de savoir si nous apercevions ses signaux; il devait ignorer pendant plusieurs mois s'il nous était utile, ou si ses soins, ses veilles et sa persévérance étaient perdus. Ce ne sont pas là les seules preuves de constance que les deux commissaires espagnols, MM. Chaix et Rodriguez, nous ont données : leur conduite, dans toute la durée de l'opération, a établi entre eux et nous une liaison d'estime et d'amitié inaltérables, dont ils ont fidèlement maintenu les droits dans les circonstances les plus périlleuses. Que n'en a-t-il été de même des autres personnes qui ont pris part à nos travaux! M. Arago n'aurait pas eu à souffrir les ennuis et les peines d'une longue captivité.

Après avoir établi à Campvey M. Rodriguez, je repassai en Espagne. Pour avoir voulu trop tôt y revenir, peu s'en fallut que je n'y revinsse jamais. La tempête nous jeta sur une petite île sablonneuse et abandonnée que l'on appelle l'Espalmador. Il n'y avait pour habitants qu'une pauvre famille de pêcheurs, et le vieux gardien d'une tour défendue par quatre soldats malades, que l'on relevait tous les mois.

Jamais on ne vit de plus profonde misère; mais, dans cette misère même, il y avait encore de la vanité : le gardien de la tour méprisait beaucoup les pauvres pêcheurs.

Deux sommets de notre grand triangle étaient déterminés; il fallait fixer le troisième. Celui que Méchain avait indiqué, était la colline du cap Cullera, qui n'a que 200 mètres (100 toises) d'élévation, et du haut de laquelle il n'était pas même sûr alors que l'on découvrît l'île d'Yvice, quoique nous en ayons reconnu depuis la possibilité. A une journée de là, dans l'ouest, il y avait une autre montagne, appelée le Mongo, trois fois plus haute, singulièrement remarquable par son sommet arrondi, par ses arêtes taillées à pic, et surtout par la manière dont elle s'avance dans la mer, à l'extrémité du cap Saint-Antoine. D'Yviza, on apercevait le Mongo par un temps serein, même étant dans une chaloupe au niveau de la mer : à plus forte raison, devait-on le découvrir du haut des montagnes. Déterminé par ces circonstances favorables, je n'hésitai point à y établir une station. Il n'y avait pas de chemin pour arriver au sommet : on en creusa un dans le roc même; mais ensuite, lorsque l'on connut mieux la montagne, on en trouva un autre un peu plus commode dans le fond d'un ravin creusé par les pluies et par les éboulements des neiges. Ce fut à travers ce ravin, à peine praticable pour des hommes, que l'on monta, non sans peine, les caisses des réverbères, les miroirs, une tente et les planches de la cabane; mais ces faibles abris étant incapables de résister aux terribles coups de vent auxquels cette montagne est exposée, à cause de sa hauteur et de son isolement dans la mer, on fut obligé de construire une petite maison en pierres sèches dans une anfractuosité du rocher.

Là, des matelots s'établirent et passèrent la moitié de l'hiver, au milieu des ouragans et des neiges, allumant nos signaux toutes les nuits, jusqu'à l'époque où nous vînmes nous-mêmes les remplacer avec nos cercles, et porter en ce point le centre de nos observations. D'autres matelots étaient chargés de leur apporter des vivres, et jusqu'à de l'eau, qui manquait sur ce sommet isolé : car c'est ainsi, avec de pauvres matelots et des paysans espagnols volontairement engagés à notre service, et dévoués à notre entreprise, que nous avons exécuté toute l'opération. Ce moyen était le seul praticable, à moins de se jeter dans des dépenses excessives; et, pour ces pauvres gens eux-mêmes, c'était l'attachement que nous avions réussi à leur inspirer, et l'espèce de gloire qu'ils mettaient à vaincre tous les obstacles, bien plus que l'attrait d'un modique salaire, qui pouvait les engager à quitter leur paisible chaumière pour la misérable vie que nous menions avec eux. Mais ces résultats ordinaires d'un long séjour et d'une grande connaissance du pays, nous avions eu le bonheur de les obtenir dès notre arrivée, graces à l'extrême bienveillance des autorités espagnoles, et à celle de quelques Français depuis long-temps domiciliés en Espagne. Nous devons nommer ici MM. Morand, consul de France à Denia; Lanusse, consul à Valence, et Lapêtre, négociant de Cullera : ce sont eux qui nous ont donné les secours de tout genre qui nous étaient nécessaires, et qui nous ont procuré tous les renseignements dont nous avions besoin : eux-mêmes s'étaient chargés de veiller et de fournir à l'entretien de nos stations; et lorsque, par l'effet du retard des courriers, nos opérations auraient pu se trouver suspendues, ils nous ont souvent avancé des sommes consi-

dérables. Hélas! ils se sont trouvés depuis plongés dans de bien grands malheurs! Les deux premiers, abandonnant leur maison, leur famille et une fortune honorablement acquise, sont venus se refugier en France. Le troisième, le plus excellent des hommes, a été massacré par des furieux, auxquels il n'avait jamais fait que du bien; mais du moins notre amitié sera fidèle à sa mémoire, et nous n'oublierons jamais l'attachement qu'il eut pour nous.

Dès que je fus de retour en Espagne, je courus retrouver M. Arago sur le sommet du *Desierto de las Palmas*. J'espérais qu'il aurait déja vu et observé plusieurs fois nos signaux; mais cette esperance était vaine, et nous devions attendre long-temps encore avant de les apercevoir.

Cette épreuve était d'autant plus fâcheuse, que les nuits avaient été très-claires, et que l'on avait vu plusieurs fois, au coucher du soleil, les montagnes d'Yvice s'élever dans le lointain, au-dessus de l'horizon de la mer, distinctes et bien terminées. Si l'on n'avait pas vu les feux, il y avait bien sujet de croire qu'ils n'étaient pas visibles, et qu'on ne les découvrirait jamais davantage. Pour surcroît de malheur, un de nos cercles que nous avions emporté de Paris, s'était trouvé brisé quand on avait voulu le déballer sur la montagne. Il ne nous en restait plus qu'un seul, construit par M. Lenoir: c'était le plus grand, à la vérité, et le meilleur pour observer à de grandes distances; mais, en supposant que nous pussions observer les feux d'Yvice, si ce dernier cercle venait aussi à se briser en le transportant sur d'autres montagnes, tout était fini, et l'opération était perdue. Ainsi, les circonstances les plus défavorables se réunissaient contre nous.

Nous demeurâmes dans cette incertitude depuis le milieu du mois d'octobre jusqu'au milieu de décembre, restant obstinément sur notre montagne, veillant toutes les nuits; n'ayant le jour d'autre société que quelques aigles qui venaient planer autour de notre habitation, ou de pauvres chartreux d'un couvent situé à deux cents toises au-dessous de notre hermitage, qui s'échappaient quelquefois dans leurs promenades pour venir causer un instant avec nous. Déja nous avions vu passer l'époque à laquelle nous aurions dû nous rendre dans Yviza pour faire les observations de latitude. Il était déja décidé que cette opération, que l'on avait espéré terminer dans un hiver, durerait au moins deux années, si pourtant elle était possible.

Combien de fois, assis au pied de notre cabane, les yeux fixés sur la mer, n'avons-nous pas réfléchi sur notre situation, et rassemblé les chances qui pouvaient nous être favorables ou contraires! Combien de fois, en voyant les nuages s'élever du fond des vallées, et monter en rampant sur le flanc des rochers jusqu'à la cime où nous étions, n'avons-nous pas recherché dans leurs oscillations les présages heureux ou malheureux d'un ciel couvert ou serein! On a dit, avec vérité, que l'aspect des lieux prend une couleur agréable ou sombre, selon les sentiments dont l'ame est agitée. Nous l'éprouvions bien fortement alors. De la porte de notre cabane nous avions une des plus belles vues du monde: à notre gauche, mais fort au-dessous de nous, le cap Oropeza élevait dans les airs ses aiguilles qui servent de signaux aux navigateurs; derrière nous, en se prolongeant dans l'ouest, s'étendaient les chaînes de montagnes noirâtres, qui, comme un rideau, abritent le royaume de Valence du côté du nord,

et conservent à cet heureux climat la douce température dont il jouit. Sur notre droite, à l'autre extrémité du golfe, le Mongo sortait du sein de la mer, semblable à une île éloignée; tandis qu'à nos pieds, dans une enceinte de plus de trente lieues, on voyait, le long de la mer, ces belles et fertiles plaines de Valence, vaste jardin entrecoupé de mille ruisseaux, et tout couvert d'oliviers, d'orangers, de citronniers, dont la verdure éternelle formait le plus doux contraste avec les sommets blancs des montagnes neigées. Plusieurs villes et de nombreux villages embellissaient encore et variaient cette perspective, par leurs formes diverses ou par les souvenirs qu'ils rappelaient. A quelques lieues de notre désert, nous voyions *Castillon de la Plana*, où Méchain est mort, et où est son tombeau. Plus loin, l'ancienne Sagonte, aujourd'hui Murviedro, dont les habitants se brûlèrent autrefois, avec leurs familles, pour ne pas tomber en esclavage, et dont la colline, théâtre et témoin muet des révolutions des âges, porte à sa base des restes de monuments romains, sur sa pente des ruines de fortifications arabes, et sur sa cime des hermitages chrétiens. Plus loin encore, on découvrait les tours de la brillante ville de Valence, heureux séjour du peuple le plus insouciant et le plus frivole. Mais ces beautés, que notre imagination nous retrace aujourd'hui avec tant de charmes, n'avaient alors pour nous aucun attrait. Tout remplis de la seule idée qui nous occupait, nous ne songions, nous ne pouvions songer qu'à nos travaux, et aux invincibles obstacles qui, nous arrêtant au commencement de notre entreprise, nous ôtaient les moyens et jusqu'à l'espoir de la terminer. Tantôt nous pensions que les miroirs avaient été mal dirigés, ou que quelque

coup de vent avait emporté la cabane et l'avait jetée dans la mer; car nous avions déja perdu plusieurs tentes par de semblables accidents, et nous n'avions pu en préserver notre pauvre cabane qu'en passant, par-dessus, des câbles et la liant au rocher. Quelquefois l'approche d'une belle nuit nous remplissait d'espoir; mais cet espoir était toujours trompé.

Enfin, après deux mois de séjour et de tentatives, nous imaginâmes un moyen simple et décisif pour lever toutes nos incertitudes, et pour découvrir sûrement nos signaux, si toutefois il était possible qu'on les aperçût. Nous plaçâmes le plan de notre cercle dans une situation horizontale; puis, au coucher du soleil, un soir que le ciel était parfaitement serein, et que le beau temps et l'absence de la lune promettaient une nuit profondément obscure, nous promenâmes lentement l'une de nos lunettes le long de l'horizon de la mer, jusqu'à ce qu'elle rencontrât les montagnes d'Yvice qui s'élevaient au-dessus de cet horizon à d'inégales hauteurs. Après les avoir long-temps examinées, nous choisîmes la plus haute, la plus au nord, celle dont le sommet nous paraissait le plus découvert, celle, en un mot, dont l'aspect et la forme ressemblaient davantage à ce que j'avais remarqué dans la montagne de Campvey. Certains que c'était là le lieu précis où étaient placés nos feux, nous fixâmes la lunette dans cette position, et nous attendions avec une vive impatience que la nuit, devenue tout-à-fait sombre, nous permît de les distinguer. Cette fois notre espérance fut satisfaite : nous aperçûmes dans le champ de la lunette un point lumineux, très-petit, presque imperceptible, semblable à une étoile de cinquième ou sixième grandeur, mais

qui se distinguait d'une étoile par son immobilité. C'était donc à cela que se réduisait la vive et brillante lumière de nos lampes : pouvions-nous être surpris de ne l'avoir pas distinguée dans nos lunettes, en les promenant au hasard sur le ciel pendant la nuit; et au contraire n'eût-il pas été surprenant que nous eussions pu les remarquer? Ce n'était donc pas une impossibilité physique qui avait arrêté nos observations; c'était une difficulté désormais connue et facile à surmonter, en traçant sur notre cercle des indices qui pussent nous faire retrouver justement cette direction, au milieu de l'obscurité la plus profonde. C'est ce que nous fîmes en dirigeant la seconde lunette de notre cercle sur un autre signal de feu placé seulement à dix lieues de distance, et qui était visible presque toutes les nuits à cause de sa proximité. En lisant sur le cercle l'angle compris entre les deux lunettes, cet angle, une fois connu, permettait de diriger exactement l'une d'elles sur le signal d'Yvice dès que l'autre l'était sur le signal voisin. Je ne saurais exprimer l'émotion que nous éprouvâmes, lorsqu'après tant de peines et tant de doutes, nous eûmes enfin la certitude de réussir. En vain voulûmes-nous commencer une série d'observations, cela nous fut impossible : nous faisions mille fautes, nous nous trompions sans cesse; et bientôt de légères vapeurs, s'élevant du sein de la mer, voilèrent la faible clarté de nos feux. Mais cela ne nous inquiétait guère : la réussite était désormais certaine, et n'exigeait plus que de la constance.

Ce fut alors que je montrai à M. Arago une lettre de Méchain que l'on m'avait confiée, et dans laquelle il exprimait les doutes qu'il avait conçus contre la possibilité de l'opération, «dont le succès (ce sont ses propres termes) lui pa-

raissait plus qu'incertain ; et, ajoutait-il, même en supposant ce succès possible, l'éloignement du terme où il pourrait être effectué est si grand qu'il m'accable, me tue, et que je n'en puis supporter l'idée. Cette malheureuse commission, dont le succès est si éloigné, beaucoup plus qu'incertain, sera plus que probablement ma perte. » Ces doutes d'un si bon observateur, je les connaissais en entrant en Espagne; mais ils étaient trop propres à nous décourager tous, pour que je voulusse en faire part à mes compagnons avant l'événement. Si l'on pouvait penser que nous avons exagéré en quelque chose les difficultés de l'entreprise, ces craintes d'un observateur si exercé et si patient suffiraient pour nous justifier.

Depuis cette heureuse époque, notre opération ne nous parut plus qu'un travail ordinaire, et les observations continuèrent sans interruption. Nous eûmes pourtant encore quelques obstacles à vaincre. Souvent la tempête emportait nos tentes, déplaçait nos stations. M. Arago, avec une constance infatigable, allait aussitôt les rétablir, et replaçait les signaux, ne se donnant, pour cela, de repos ni jour ni nuit. Étant tombé malade de la fièvre, je fus obligé, pendant douze jours, de quitter la montagne pour aller me rétablir à Tarragone. Durant cet intervalle, M. Arago resta seul chargé des observations, les continua sans relâche ; et bientôt un des commissaires espagnols, M. Chaix, vint nous joindre au désert et partager notre habitation. Nous quittâmes cette première station à la fin de janvier, après y être restés trois mois et demi, et nous revîmes avec quelque plaisir la ville de Valence. Nous nous transportâmes de même aux autres sommets du grand triangle, observant à chacun d'eux tous les

angles dont il était le centre. Comme nous desirions nous procurer toutes les vérifications possibles de cette grande mesure, M. Arago alla établir une nouvelle station sur une chaîne de hautes montagnes que l'on appelle la Favaretta; mais nous fûmes obligés d'y renoncer, à cause de l'abondance des neiges qui couvraient presque tout-à-fait les tentes, et aussi parce que les brigands, maîtres de ces montagnes, exigeaient que l'on fît un traité avec eux pour avoir le droit d'y séjourner. Heureusement nous obtînmes la même vérification d'une autre manière; et la base du grand triangle, calculée ainsi par trois combinaisons absolument indépendantes les unes des autres, s'accorda pour donner des valeurs qui ne différaient que de deux mètres sur cent quarante mille, environ une toise sur trente-cinq lieues. Au mois d'avril 1807, tous les triangles des îles étaient terminés. Je revins à Paris pour faire construire un autre cercle qui remplaçât celui que nous avions perdu, et qui pût servir l'hiver suivant pour les opérations de latitude. Pendant ce temps, M. Arago, assisté des deux commissaires espagnols, continuait les opérations géodésiques sur le continent, et rattachait nos triangles à ceux que Méchain avait déja observés en Catalogne. Cette jonction, qui se fit pendant l'été, au milieu des chaleurs les plus dévorantes, fut extrêmement pénible. Exposés à toutes les ardeurs du soleil, aux pluies, aux orages si fréquents et si terribles dans ce climat sur les hautes montagnes, ils eurent beaucoup à souffrir; plus d'une fois la foudre glissa sur la toile humide qui les couvrait. Mais rien ne put leur faire abandonner leur entreprise; et avant la fin de l'automne toute la chaîne des triangles était terminée.

Je revins alors en Espagne avec le nouveau cercle qui de-

vait servir aux observations de latitude ; il avait été construit par M. Fortin. Dans mon premier voyage, j'avais été à portée de faire quelques expériences curieuses sur les poissons qui vivent dans des eaux profondes. Les petites îles d'Yvice et de Formentera n'étant, pour ainsi dire, que des rochers isolés au milieu de la mer, offraient une occasion singulièrement favorable pour observer et déterminer les espèces de ces animaux qui appartiennent particulièrement à la Méditerranée. Ces motifs engagèrent le ministre de l'intérieur à joindre un naturaliste à l'expédition ; et, sur la demande des professeurs du muséum d'histoire naturelle, il désigna, en cette qualité, notre ami M. François de Laroche, jeune médecin très-versé dans ce genre d'étude, et connu de l'Institut par plusieurs mémoires intéressants. Lorsque nous eûmes rejoint nos compagnons à Valence, nous allâmes tous ensemble passer l'hiver dans notre observatoire de l'île de Formentera. Nous y prîmes plusieurs milliers de hauteurs de l'étoile polaire, et de β de la petite ourse, pour déterminer la latitude. Nous observâmes aussi beaucoup de passages du soleil et des étoiles à la lunette méridienne. En même temps nous mesurions la longueur du pendule à secondes pour connaître l'intensité de la pesanteur, à cette extrémité australe de notre arc; et nous observions l'*azimuth* du dernier côté de la chaîne des triangles, c'est-à-dire l'angle que ce côté forme avec la ligne méridienne, résultat nécessaire pour orienter notre opération.

D'autres auraient pu se trouver malheureux dans notre situation : ils auraient pu regretter quelques agréments de la vie, que nous étions loin d'avoir dans cette île isolée et sauvage; mais pour nous, qui n'avions pas encore oublié

l'hiver de l'année précédente, nos sentiments étaient bien différents. Nous avions alors le vivre et le couvert; nous avions sur-tout la certitude de réussir, et le plaisir de voir tous les jours notre travail s'avancer. Cette position, qui eût été ennuyeuse pour d'autres, n'était pas pour nous sans douceur.

Le dimanche était notre jour de fête. Ce jour-là, le bon curé de la partie de l'île que nous habitions venait dîner avec nous, s'informait du progrès de nos observations; et cet excellent homme, beaucoup plus instruit que ne l'est ordinairement la classe inférieure du clergé en Espagne, prenait à tout ce que nous faisions un véritable intérêt. Souvent aussi des habitants venaient solliciter la permission de voir nos instruments; et lorsqu'on les avait introduits, en petit nombre, dans la chambre où nous les tenions renfermés, ils témoignaient, en les voyant, tout l'étonnement de vrais sauvages. Quelquefois ils venaient en troupe le soir, l'alcade à la tête, danser dans notre cabane, avec mille cris et mille postures bizarres; les hommes sautant, ou plutôt trépignant, d'une manière moitié européane, moitié africaine, tandis que les femmes ayant leurs cheveux serrés en longues queues pendantes, ordinairement postiches, tournaient et pirouettaient, pieds nuds, sans quitter la terre, comme des poupées à ressorts. Le tout était accompagné d'une musique analogue, formée d'une espèce de fifre, d'un tambourin, et du cliquetis d'une grande lame d'épée que l'alcade frappait en mesure avec un morceau de fer. Lorsqu'on venait à passer, de ces amusements sauvages, dans la chambre silencieuse où se faisaient les observations, ce contraste de la civilisation et de la barbarie, des connaissances les plus sublimes et de la plus profonde ignorance, avait je ne sais quoi de grand et

de pénible qui affectait l'ame d'une manière que je ne saurais exprimer.

Lorsque nous eûmes fait deux mille observations de l'étoile polaire, lorsque nous eûmes achevé les expériences du pendule, je quittai Formentera pour revenir en Espagne, rapportant avec moi ces résultats. M. Arago resta dans l'île avec MM. Chaix et Rodriguez pour observer le passage supérieur de 6 de la petite ourse, et en même temps il ajouta aux passages de la polaire six cents observations nouvelles, qui, jointes aux précédentes, donnent à la latitude de ce point toute la certitude que l'on peut desirer. Mais le principal objet du séjour de M. Arago était l'exécution d'une autre entreprise que nous avions méditée ensemble. En voyant, de notre station de Campvey, l'île de Mayorque à l'orient sur notre droite, et la côte d'Espagne à l'occident sur notre gauche, nous avions reconnu la possibilité de les joindre ensemble par un arc de parallèle qui nous aurait donné la mesure de trois degrés de longitude. Cet arc, situé à l'extrémité australe de la méridienne, déterminait plus complètement la courbure de cette partie du sphéroïde terrestre, en la mesurant dans deux directions perpendiculaires. Il devait faire connaître si les parallèles terrestres sont elliptiques comme les méridiens, on s'ils sont circulaires, et par conséquent si la terre est, ou n'est pas, un sphéroïde de révolution. Pour résoudre ces questions importantes, M. Arago avait entrepris et commencé la mesure des triangles qui devaient lier Mayorque à la côte d'Espagne, en s'appuyant sur Yvice et Formentera.

Ne voulant pas interrompre ces observations, je laissai à M. Arago le sauf-conduit anglais, le bâtiment espagnol; et je

m'embarquai, pour revenir en Espagne, sur un petit chebeck algérien que je trouvai par hasard en relâche à Yvice. Je fus pris en route par des pirates de Raguse, qui avaient momentanément arboré pavillon anglais. Après avoir bien visité notre petite embarcation, ils nous déclarèrent de bonne prise, et voulurent nous emmener à Oran; mais, en m'autorisant du sauf-couduit anglais dont ils avaient connaissance, et que toutefois je n'avais point; en leur montrant mes instruments qui attestaient ma destination; surtout en leur abandonnant quelques onces d'or que j'avais sur moi; comme d'ailleurs une si chétive proie était pour eux plus embarrassante qu'avantageuse, je me tirai de leurs mains, moi et mes compagnons; et je dois convenir que, pour des pirates, ils en ont usé fort honnêtement. J'en fus quitte pour une courte quarantaine qu'il me fallut faire à Denia dans un vieux château ruiné, autrefois la résidence des ducs de Médina-Cœli dans le temps de leur puissance, mais où, de cette ancienne grandeur, il ne restait plus d'autre trace qu'une vieille statue de guerrier couchée sur l'herbe, qui me servait de pupitre pour écrire à mes amis.

Lorsque les observations eurent été remises au bureau des longitudes, une commission fut chargée de les examiner et de les calculer. Le résultat de ce travail, comparé aux observations de M. Delambre à Dunkerque, donna une valeur du mètre presque exactement égale à celle que les lois françaises ont fixée, d'après les premières déterminations. La différence est au-dessous d'un dix-millième de ligne : elle ne produirait que 4 dixièmes de mètre, environ 176 lignes, sur la longueur totale de l'arc terrestre compris entre les parallèles de Dunkerque et de Formentera. Une si petite erreur

a réellement de quoi surprendre; elle aurait pu être quarante ou cinquante fois plus considérable, qu'il n'en serait jamais résulté aucun inconvénient sensible dans les opérations les plus délicates des arts. Cet accord prouve que le mètre, déduit de la grandeur de la terre, est désormais bien connu; et que les autres opérations de ce genre que l'on pourra faire par la suite, si toutefois on en exécute jamais d'aussi considérables, ne pourront y apporter aucun changement.

Les expériences que nous avions faites à Formentera sur la longueur du pendule à secondes, expériences que nous avons répétées, M. Mathieu et moi, à Paris, à Bordeaux, à Figeac, à Clermont et à Dunkerque, ont fait connaître l'intensité de la pesanteur et ses variations sur les diverses parties de notre méridienne. Ces mesures ont donné pour l'aplatissement de la terre une valeur extrêmement peu différente de celle qui se déduit de la mesure des degrés de latitude, et l'on sait par la théorie que cette différence tient à la nature des procédés. Nos expériences, faites avec des appareils que Borda a imaginés, mais que nous avons rendus plus portatifs et plus simples, donnent pour la longueur du pendule à Paris la même valeur que celle qu'il assigne; et leur extrême accord, soit entre elles, soit avec celles de cet illustre physicien, en atteste la précision.

Ce résultat étant exprimé en parties du mètre, il suffirait de le connaître pour retrouver le mètre, base de toutes nos mesures, si tous les étalons qui fixent sa valeur exacte venaient à se perdre par la suite des temps. En effet, si l'on se rappelait seulement le nombre qui exprime la longueur du pendule à Paris, par exemple, il suffirait d'observer

exactement cette longueur par l'expérience; et, en la comparant au nombre qui la représente, le mètre serait aussitôt retrouvé. Par-là on connaîtrait aussi toutes les mesures de capacité qui dérivent du mètre suivant des proportions très-simples et exactement décimales. Ensuite, en pesant avec des balances très-exactes le poids d'un centimètre cube d'eau pure, prise à la température où sa densité est le plus grande possible, c'est-à-dire vers quatre degrés du thermomètre centésimal, on retrouverait pareillement le gramme, et par conséquent toutes les mesures de poids. Voilà les avantages que l'on a eus en prenant pour base du système métrique des données fixées par la nature et liées entre elles suivant l'ordre décimal; ce sont des avantages que n'avaient point les mesures arbitraires dont les anciens se sont servis, dans l'impossibilité où ils étaient d'en déterminer de plus exactes. Aussi, les étalons de ces mesures s'étant perdus par l'effet des révolutions des peuples, leur valeur précise s'est perdue également pour toujours; et les expériences auxquelles elles ont été employées ne peuvent plus servir que de sujet aux recherches des érudits.

Les observations d'histoire naturelle que M. De Laroche avait recueillies dans son voyage ayant été pareillement rendues publiques, ont confirmé la plupart des faits que j'avais remarqués dans mon premier voyage, et leur ont ajouté plusieurs circonstances nouvelles. Les recherches de ce jeune naturaliste ont aussi donné une connaissance plus exacte et plus complète des poissons de la Méditerranée, principalement de ceux qui vivent dans des eaux profondes. Ses expériences et les miennes conduisent également à cette conséquence singulière, c'est que la vessie natatoire des poissons

contient d'autant plus de gaz oxigène, qu'ils habitent à des profondeurs plus considérables, quoique l'air contenu dans l'eau de la mer, à 600 mètres (1800 pieds) de profondeur, soit égal, peut-être même un peu inférieur en pureté à celui qui en imprègne la surface, comme je m'en suis assuré par des expériences directes. Nous avons également remarqué que lorsqu'on retire des poissons du fond de ces abymes, l'air contenu dans leur vessie natatoire n'étant plus comprimé par l'énorme colonne d'eau qui pesait sur eux, se dilate tellement, qu'il déchire la vessie, renverse leur estomac, et les étouffe avant qu'ils aient atteint la surface des eaux.

Enfin, notre opération aura peut-être dans l'avenir des conséquences plus étendues. Si jamais la civilisation européenne parvient à s'établir sur les côtes d'Afrique, rien ne sera plus facile que de traverser la Méditerranée par quelques triangles, en prolongeant notre chaîne dans l'ouest jusqu'à la hauteur du cap de Gate; après quoi, remontant la côte d'Afrique jusqu'à la ville d'Alger, qui se trouve sous le méridien de Paris, on pourra mesurer la latitude, et porter l'extrémité australe de notre méridienne, sur le sommet du mont Atlas.

Tandis que nous suivions paisiblement en France la série des travaux et des calculs qui devaient compléter l'opération et en faire connaître le résultat définitif, M. Arago avait été beaucoup moins heureux. Tant qu'il n'avait eu à vaincre que les obstacles de la nature, les progrès de son entreprise avaient répondu à sa constance et à son habileté. Déja il avait terminé les triangles qui devaient lier Yvice à Mayorque, et faire connaître l'arc de parallèle terrestre compris entre ces deux stations. Il s'était transporté à Mayorque avec M. Rodri-

guez, et aussitôt il avait été s'établir sur le sommet d'une haute montagne, nommée le Puch de Galatzo. Déja il avait observé les signaux d'Yvice, et un assez grand nombre de passages d'étoiles à la lunette méridienne, pour déterminer la différence des longitudes. Quelques jours encore, et le résultat de ces observations était invariablement fixé. Mais, tout-à-coup, le bruit se répand parmi le peuple que ces instruments, ces feux, ces signaux, ont pour objet d'appeler l'ennemi, de le diriger vers l'île, et de lui montrer le chemin. Ce n'est plus qu'un cri de trahison et de mort. On veut aller à Galatzo en armes. Heureusement M. Arago avait été averti: vêtu en paysan mayorquain, il part pour Palma, emportant avec lui ses observations, qui renfermaient déja les éléments nécessaires pour le calcul de deux degrés de longitude. Arrivé à Palma, sans être aperçu, il se rend à bord de notre vaisseau, y reste deux jours caché, et cependant dépêche un bâtiment et des soldats à la cabane pour sauver et ramener les instruments, que les paysans engagés à son service avaient fidèlement gardés. Mais bientôt lui-même est en proie à de nouvelles alarmes : le vaisseau où il s'était retiré n'est plus un asyle inviolable; soit trahison, soit faiblesse, l'officier espagnol qui le commandait, et qui jusques alors s'était montré notre ami, n'osa, malgré ses promesses, ni protéger M. Arago, ni le conduire en France. Le capitaine-général ne put parvenir à le sauver qu'en l'enfermant dans la citadelle. C'est là qu'il resta plusieurs mois prisonnier, ayant non-seulement à regretter sa liberté, mais à craindre souvent pour sa vie. Une fois des moines fanatiques tentèrent de corrompre les soldats de garde, et les engagèrent à se défaire de lui. Cependant notre bon et digne ami, M. Ro-

driguez, ne l'abandonnait pas dans son infortune : incapable de manquer à l'amitié et à l'honneur, il allait par-tout priant, pressant, fatiguant la junte par de continuelles démarches, demandant hautement la liberté de son collègue, et représentant l'injustice de sa détention; enfin il obtint sa délivrance. On permit à M. Arago de passer à Alger sur une petite barque. Il y fut conduit par un de nos matelots mayorquains, nommé Damian, l'un des plus expérimentés marins de l'Espagne, et qui nous avait toujours témoigné un attachement sans bornes et un dévouement absolu.

Arrivé dans cette ville, M. Arago est accueilli par le consul de France, M. Dubois-Thainville, qui le comble de bontés; bientôt il s'embarque sur une petite frégate de commerce algérienne, pour revenir en France. Après la navigation la plus heureuse, il arrive en vue de Marseille; il se croyait déja dans le port, lorsqu'un corsaire espagnol, voyant ce navire entrer dans un port français, l'attaque, le prend et l'emmène à Rosas. M. Arago pouvait échapper encore : il était porté sur le rôle des passagers comme négociant allemand; mais, par le hasard le plus funeste, un des matelots qui avaient été autrefois sur notre bord, se trouvait sur celui du corsaire : une exclamation lui échappe; M. Arago est reconnu et plongé avec tous ses compagnons dans la plus affreuse captivité.

Je ne dirai point ce qu'il eut à souffrir. Bientôt le dey d'Alger fut informé de l'insulte faite à son pavillon. Il en demanda une réparation éclatante, exigea que le bâtiment, l'équipage, les marchandises et tous les passagers fussent rendus; menaçant, en cas de refus, de déclarer la guerre. Il fallut bien céder à ces vives réclamations. M. Arago se rembarque. Le bâtiment fait voile pour Marseille. On est de

nouveau à la vue du port, lorsqu'une affreuse tempête du nord-ouest repousse le vaisseau avec une force irrésistible, le chasse et le jette sur les côtes de Sardaigne. C'était un autre péril : les Sardes et les Algériens sont en guerre ; aborder, c'est retomber dans une nouvelle captivité. Malgré une voie d'eau considérable, on se décide à se réfugier sur les côtes d'Afrique; et le bâtiment, prêt à couler bas, aborde enfin dans le petit port de Bougie, à trois journées d'Alger.

Là on apprend que le dey, qui les avait si fortement protégés contre les Espagnols, a été tué dans une émeute. Un autre dey est à sa place. On visite soigneusement le navire entrant. Le poids des caisses qui renfermaient les instruments astronomiques excite de violents soupçons. Que peuvent-elles contenir de si pesant, si ce n'est de l'or? Pourquoi prendrait-on tant de précautions afin d'empêcher de les ouvrir, si elles renfermaient autre chose que des sequins? Ne pouvant obtenir qu'on les lui rende, et ne se fiant point aux incertitudes d'une négociation barbaresque, M. Arago s'habille en turc; et, associé à quelques autres personnes, sous la conduite d'un saint du pays, que l'on appelle un marabou, il se rend par terre à Alger, à travers les montagnes. Je laisse à penser avec quels périls. Le consul, bien étonné de le revoir dans cet équipage, l'accueille avec la même bienveillance que la première fois. Les instruments sont officiellement réclamés. Les Algériens, convaincus qu'ils ne sont pas d'or, mais de cuivre, ne leur trouvent plus aucune valeur et les rendent. Mais les occasions de retour étaient devenues rares et difficiles; il fallut rester à Alger pendant six mois. Enfin le consul lui-même, appelé à Paris par l'empereur, s'embarque avec sa famille, et M. Arago s'embarque

avec lui, sur un bâtiment de guerre au service de la régence. Arrivés en vue de Marseille, ils sont encore rencontrés une troisième fois, par une division anglaise, infiniment supérieure, qui leur ordonne de se rendre à Minorque. Tous obéissent à la force; tous, excepté le bâtiment où M. Arago était embarqué : le capitaine, plus hardi que les autres, profite d'un coup de vent favorable, tend ses voiles et entre à Marseille.

C'était là que tant de traverses devaient finir. M. Arago, de retour, a reçu le prix de ses travaux : il occupe aujourd'hui à l'Institut, dans la section d'astronomie, une place qu'il a bien méritée. Le récit de ses aventures prouve, qu'en servant les sciences, on peut aussi rencontrer des entreprises hasardeuses et des périls honorables.

Addition. Depuis l'époque où cette Notice fut lue, deux des personnes attachées à l'expédition d'Espagne ont cessé d'exister. M. Chaix, dont la santé s'était fort affaiblie par les fatigues qu'il avait partagées avec Méchain et avec nous, est mort dans la petite ville de San-Felipe, où il s'était retiré. Notre compatriote De Laroche est mort aussi, à Paris, victime des soins qu'il donnait dans un hôpital à des malades attaqués du typhus. Il avait continué à se distinguer par des travaux très-remarquables, par des découvertes extrêmement curieuses sur les propriétés de la chaleur rayonnante, et par un mémoire sur les chaleurs spécifiques des gaz, qu'il avait fait en commun avec le jeune M. Berard, et que l'Institut avait couronné. Il promettait plus encore, aux yeux de ceux qui connaissaient sa sagacité et sa persévérance. Sa mort rapide et prématurée a été une perte douloureuse pour les sciences et pour l'amitié.

NOTICE *sur les opérations entreprises en Angleterre et en Écosse, pour prolonger la méridienne d'Espagne et de France jusqu'aux îles Shetland ; lue à la séance publique annuelle des quatre Académies, le 24 avril* 1818.

Par M. BIOT.

Lorsque, sur une des tours de Florence, Galilée, il y a deux siècles, expliquait à un petit nombre de personnes, dans des entretiens presque mystérieux, ses découvertes nouvelles sur les lois de la pesanteur, le mouvement de la terre et la figure des planètes, aurait-il jamais pu prévoir que ces vérités, alors méconnues et persécutées, seraient, après un si court intervalle, considérées comme tellement importantes, et si généralement admirées, que les gouvernements de l'Europe feraient entreprendre de grandes opérations et de lointains voyages pour le seul but de les étendre, d'en constater toutes les particularités; et que, par l'effet d'une propagation inespérée de toutes les connaissances, les résultats de ces travaux pourraient être offerts à l'intérêt public, dans des assemblées nombreuses, composées des classes les plus éminentes de la société! Tel est pourtant l'immense changement qui s'est opéré dans le sort des sciences depuis cette époque. Quand Galilée et Bacon parurent, après tant d'esprits sublimes que l'antiquité avait produits, ils trouvèrent la carrière des sciences encore vierge; car on ne saurait donner le nom de science à l'inutile amas de spéculations hypothétiques qui composait avant eux la philosophie naturelle. On avait voulu jusques alors deviner plu-

tôt qu'étudier la nature : l'art de l'interroger et de lui faire révéler ses mystères n'était pas connu; ils le découvrirent : ils montrèrent que l'esprit humain est trop faible et trop incertain pour s'avancer seul dans ce dédale de vérités; qu'il a besoin de s'arrêter sur des phénomènes rapprochés les uns des autres, comme l'enfant se repose sur les appuis qu'il rencontre lorsqu'il essaie ses premiers pas; et que, dans les circonstances multipliées où la nature lui offre à franchir de trop grands intervalles, il faut que, par des expériences industrieusement imaginées, il fasse naître sur sa route de nouveaux phénomènes qui assurent sa marche et l'empêchent de s'égarer. Telle a été la fécondité de cette méthode, qu'en moins de deux siècles, des découvertes sans nombre, des découvertes certaines, durables, ont éclaté dans toutes les parties des sciences, se sont communiquées rapidement aux arts, à l'industrie qu'elles ont enrichie d'applications merveilleuses, et ont accru le trésor des connaissances humaines mille fois au-delà de ce qu'avait fait toute l'antiquité. Mais, ainsi étendues, les sciences excèdent les facultés d'un seul homme. Leur sphère immense ne peut plus être embrassée que par un grand corps littéraire qui, dans son ensemble, comme dans un vaste sensorium, réunisse toutes les conceptions, toutes les vues, toutes les pensées; qui, ne connaissant ni les infirmités humaines, ni la décadence des sens et de la vieillesse, toujours jeune, toujours actif, scrute incessamment les propriétés intimes des choses naturelles, découvre les forces qui y sont cachées, et les offre enfin à la société tout élaborées et préparées pour les applications. Dans ce centre où toutes les opinions s'agitent et se combattent, nulle autorité ne peut prévaloir, si ce n'est celle de la raison

et de la nature. La voix d'un Platon même ne saurait plus y faire écouter les rêves brillants de son imagination; et le génie d'un Descartes, contraint de rester fidèle à la méthode d'observation et de doute qu'il avait lui-même créée, n'y produirait que des vérités sans mélange d'erreurs. Mais Platon et Descartes, avec toute leur gloire, ne seraient encore que des éléments passagers de ce grand organe des sciences. Sa force survivrait à leur génie, et poursuivrait dans l'avenir le développement de leurs pensées. Telle est aujourd'hui la noble destination des sociétés savantes. La simultanéité et la durée que leur institution donne à des efforts mortels, complètent la puissance de la méthode expérimentale. Elles seules pouvaient désormais assurer la continuité du progrès des connaissances humaines; seules elles pouvaient développer les grandes théories, et faire obtenir des résultats qui, par leur difficulté, par la diversité, la persévérance et l'étendue des travaux qu'ils exigent, n'auraient jamais été accessibles pour des individus.

La détermination de la grandeur et de la figure de la terre, la mesure de la pesanteur à sa surface, la liaison de ce phénomène avec la constitution intérieure du globe, avec la disposition de ses couches et les lois de leurs densités, sont au nombre de ces questions de longue durée que des sociétés savantes seules pouvaient se proposer d'attaquer et de résoudre. Elles ont été, depuis un siècle et demi, un des objets constants des travaux de l'Académie des Sciences. La première mesure exacte d'un degré du méridien terrestre fut faite en France par Picard, dans l'année 1670. Elle servit à Newton pour établir la loi de la pesanteur universelle, dont l'emploi d'une mesure fautive de la terre l'avait d'abord écarté.

Deux ans après, Richer, autre Français, envoyé par l'Académie à Cayenne pour des recherches astronomiques, découvrit que son horloge, qui battait à Paris les secondes, allait plus lentement à mesure qu'il s'approchait de l'équateur, et s'accélérait de nouveau par les mêmes degrés en revenant vers le nord, de manière à reprendre exactement sa marche primitive au point de départ. Or, d'après les découvertes de Huyghens, la vîtesse des oscillations d'un même pendule augmente ou diminue avec l'intensité de la pesanteur qui le fait mouvoir. L'observation de Richer prouvait donc que cette intensité était différente à diverses latitudes, et qu'elle croissait en allant de l'équateur au pôle. Newton, dans son immortel ouvrage *des Principes de la Philosophie naturelle*, lia tous ces résultats à la loi de l'attraction. Il montra que la variation observée dans la pesanteur décelait un aplatissement de la terre à ses pôles, circonstance qui se remarque aussi dans la forme de Jupiter, de Saturne, et des autres planètes qui tournent sur un axe. Il conçut que cette forme aplatie était une conséquence de l'attraction même des parties de chaque planète, combinée avec la force centrifuge produite par son mouvement de rotation. Mais, pour que l'arrangement déterminé par ces deux genres de forces eût pu ainsi s'effectuer, il fallait que ces grands corps eussent été primitivement fluides; il les prit donc dans cet état, et il montra comment on pouvait calculer l'aplatissement d'une planète d'après l'intensité de la pesanteur à sa surface, et la vîtesse de sa rotation, en supposant sa masse homogène. Cette théorie, appliquée à la terre, donnait une variation de la pesanteur peu différente de celle que Richer avait observée, mais cependant un peu plus

faible ; ce qui indique que la terre est composée de couches dont la densité va croissant de la surface au centre, comme Clairault l'a depuis démontré.

Les calculs de Newton furent pendant quelque temps les seules inductions que l'on eût pour croire la terre aplatie à ses pôles. L'arc du méridien mesuré par Picard avait bien suffi pour donner la longueur du rayon de la terre à l'endroit où il avait été observé; mais cet arc était beaucoup trop petit pour que l'on y pût seulement entrevoir l'effet de l'aplatissement. On espéra tirer plus de lumières de la mesure de l'arc entier qui traverse la France depuis Perpignan jusqu'à Dunkerque; mesure qui devait servir, pour ainsi dire, d'axe à la carte générale de la France, dont Colbert avait confié l'exécution à l'Académie. Mais, dans l'état encore imparfait où se trouvaient alors les instruments et les méthodes astronomiques, cet arc lui-même était trop court pour que l'influence de l'aplatissement pût s'y faire sentir avec certitude ; et les petites variations qui en résultent dans les longueurs des degrés consécutifs, pouvaient très-aisément se perdre dans les erreurs des observations. Ce fut aussi ce qui arriva. Les différences que les degrés présentèrent se trouvèrent, par l'effet de ces erreurs, dans un sens tel qu'il en serait résulté un alongement aux pôles, au lieu d'un aplatissement. L'Académie ne se rebuta point: elle sentit que la question ne pouvait être nettement décidée qu'en mesurant deux arcs du méridien dans les régions de la terre où l'aplatissement doit produire entre les degrés des différences plus sensibles, c'est-à-dire près de l'équateur et près du pôle. Elle trouva parmi ses membres des hommes assez dévoués pour entreprendre ces pénibles

voyages. Dans l'année 1735, Bouguer, Godin, la Condamine, passèrent en Amérique, où ils se réunirent à des commissaires espagnols. Quelques mois après, Clairault, Maupertuis, le Monnier partirent pour le nord. Les résultats de ces expéditions mirent hors de doute l'aplatissement de la terre; mais sa mesure absolue resta encore douteuse. Le degré du Pérou, comparé à ceux de France, donnait un aplatissement plus faible que si la terre était homogène; l'opération de Laponie le donnait plus fort. Dans cette incertitude, les longueurs du pendule que l'on avait eu soin de mesurer, s'accordaient avec l'aplatissement conclu de l'opération de l'équateur; mais l'exactitude de ces mesures, surtout dans l'opération de Laponie, n'était pas telle qu'elles pussent trancher la difficulté. La faute n'en était à personne; on ne pouvait pas faire mieux alors.

Les choses en restèrent à ce point pendant cinquante ans. Bouguer, la Condamine, Clairault, Maupertuis, moururent. Mais, après cet intervalle, les instruments d'astronomie étant devenus beaucoup plus parfaits, et les méthodes d'observation plus générales et plus précises, on put espérer de lever les incertitudes que les opérations précédentes avaient laissées sur l'aplatissement de la terre. L'Académie, héritière de ces grands travaux, résolut de les reprendre avec tous les moyens qui pouvaient en assurer le succès. Elle leur donna plus d'importance encore en proposant de prendre la grandeur même de la terre ainsi déterminée, pour l'élément fondamental d'un système de mesures général, uniforme, dont toutes les parties seraient liées entre elles par des rapports simples et en harmonie avec notre mode de numération. Aujourd'hui, comme alors, elle espère

qu'un pareil système, fondé sur des éléments naturels, invariables, indépendants des préjugés individuels des peuples, leur deviendra dans l'avenir commun à tous, comme le sont déja les chiffres indiens, la division du temps, et le calendrier. C'était un vœu manifesté depuis long-temps par les meilleurs et les plus éclairés de nos rois. La proposition de le réaliser fut, pour ainsi dire, le dernier soupir de l'Académie; et l'acte qui en décida l'exécution fut un des derniers qui précédèrent la funeste époque de nos grandes convulsions politiques. Toutes les institutions conservatrices de la civilisation et des lumières périrent; l'Académie périt avec elles. Mais de vrais savants ne se font pas répéter l'autorisation de faire ce qu'ils croient utile. Au milieu du désordre et des fureurs excités par l'anarchie populaire, MM. Delambre et Méchain, munis d'instruments nouveaux que Borda leur avait créés, commencèrent et continuèrent, souvent au péril de leur vie, la mesure de la terre la plus étendue, la plus exacte que l'on eût jamais entreprise. Ils l'achevèrent aussi bien, quoique non pas aussi aisément qu'ils l'auraient fait au sein de la paix la plus profonde. La mesure du pendule ne fut point oubliée. Borda, qui avait tant fait pour perfectionner toutes les autres parties des observations, inventa, pour cette expérience, une méthode dont l'exactitude surpassait tout ce qu'on avait imaginé jusques alors, et n'a pas été surpassée depuis.

Lorsque ces opérations furent terminées, on songea que l'arc du méridien pouvait être continué de plusieurs degrés au sud à travers la Catalogne, et qu'il pouvait même probablement se prolonger jusqu'aux îles Baléares, au moyen d'un immense triangle dont les côtés, s'étendant sur la mer,

joindraient ces îles à la côte de Valence. Méchain se dévoua pour cette opération : je dis qu'il se dévoua, car il alla mourir de la fièvre dans une petite ville du royaume de Valence, après avoir reconnu toute la chaîne et mesuré les premiers triangles. Nous fûmes chargés, M. Arago et moi, d'achever ce travail conjointement avec des commissaires du roi d'Espagne, Charles IV. Nous eûmes le bonheur de réussir; mais on se rappelle que M. Arago ne revint en France qu'à travers de grands périls et après une dangereuse captivité. Nos résultats, en confirmant ceux de l'arc de France, leur donnèrent une certitude nouvelle. Nous mesurâmes aussi, dans notre station extrême, la longueur du pendule à secondes par le procédé de Borda. Nous répétâmes la même opération, M. Mathieu et moi, sur divers points de l'arc compris entre Perpignan et Dunkerque. Ces expériences donnèrent pour l'aplatissement de la terre une valeur presque exactement égale à celle que M. Delambre avait déja obtenue en comparant l'arc de France et d'Espagne au degré de l'équateur, calculé avec de nouveaux soins, au degré de Laponie qu'un habile astronome suédois, M. Svanberg, avait corrigé par de nouvelles observations; enfin à un arc de plusieurs degrés, que le major Lambton avait mesuré avec une grande exactitude dans les possessions anglaises de l'Inde.

Vérifié par tant de combinaisons indépendantes les unes des autres, notre arc de France et d'Espagne acquérait plus de droits à devenir un type fondamental de mesures. Une occasion se présenta de lui donner plus d'importance encore. Depuis la rebellion de 1745, le gouvernement anglais avait senti l'utilité de lever une carte détaillée des trois

royaumes, qui pût également servir à diriger les améliorations du pays, en temps de paix, et sa defense en temps de guerre. Pour le dire en passant, c'est aussi la guerre qui, depuis vingt ans, a donné aux opérations géodésiques la grande extension et l'extrême perfection qu'elles ont acquises dans tous les états de l'Europe; et ce petit avantage vaut d'autant plus la peine qu'on le remarque, qu'il est payé assez cher. Quoi qu'il en soit, la triangulation anglaise commencée par le général Roy, et continuée après lui par le colonel Mudge, se prolongeait déja depuis le sud de l'Angleterre jusqu'au nord de l'Écosse, et offrait, sur cette étendue, plusieurs degrés du méridien terrestre, mesurés avec d'excellents instruments. Il était bien à souhaiter que cet arc pût se joindre à l'arc de France. Mais la position géographique de l'Angleterre le plaçant un peu à l'occident du nôtre, on pouvait craindre que, si tous les méridiens terrestres ne sont pas exactement semblables, la différence de longitude n'altérât les résultats qu'on aurait pu tirer de cette jonction. Toutefois cet inconvénient n'était pas à redouter pour les mesures du pendule[*], qui sont beaucoup moins troublées que les degrés par les petites irrégularités de la figure de la terre. Le bureau des longitudes souhaita que les mêmes appareils qui avaient servi, pour ces mesures, en Espagne et en France, fussent portés sur toute l'étendue de l'arc anglais. Souhaiter une chose utile aux sciences, c'était avoir d'avance l'assentiment des savants d'Angleterre et l'approbation du gouvernement de ce pays éclairé. Ni l'un ni l'autre ne nous manquèrent. Le respectable sir Joseph Banks et son digne ami le chevalier Blagden nous assurèrent de toutes les facilités imaginables. Le mi-

nistre de l'intérieur, M. Lainé, près de qui toute chose utile, ou honorable, n'a que la possibilité pour limite, trouva dans les ressources de sa bienveillance les moyens de fournir à cette entreprise, et le bureau des longitudes voulut bien m'en confier l'exécution.

Je partis de Paris au commencement du mois de mai de l'année dernière, emportant avec moi les appareils qui avaient servi sur les autres points de la méridienne, un cercle répétiteur de M. Fortin, une horloge astronomique et des chronomètres de M. Bréguet, enfin tout ce qui était nécessaire pour les observations. Des ordres du gouvernement anglais, obtenus par l'intervention tutélaire de sir Joseph Banks, attendaient cet envoi à Douvres. Il me fut remis tout entier sous le sceau de la douane, sans droits, sans visite, absolument comme si je n'eusse pas changé de pays. Les mêmes soins en protegèrent le transport jusqu'à Londres, où il fut déposé chez sir Joseph Banks. Que ne puis-je peindre ce que je sentis en voyant pour la première fois ce vénérable compagnon de Cook! Illustre par de longs voyages; remarquable par une étendue d'esprit et par une élévation de sentiments qui le font s'intéresser également aux progrès de toutes les connaissances humaines; possesseur d'un rang élevé, d'une grande fortune, d'une considération universelle, sir Joseph a fait de tous ces avantages le patrimoine des savants de toutes les nations. Si simple, si facile dans sa bienveillance, qu'elle semble presque, pour celui qui l'éprouve, l'effet d'un droit naturellement acquis; et en même temps si bon, qu'il vous laisse tout le plaisir, toute l'individualité de la reconnaisance. Noble exemple d'un protectorat dont toute l'autorité est fondée sur l'estime,

l'attachement, le respect, la confiance libre et volontaire; dont les titres consistent uniquement dans une bonne volonté inépuisable et dans le souvenir des services rendus; et dont la possession longue et non contestée fait supposer de rares vertus et une exquise délicatesse, quand on songe que tout ce pouvoir doit se former, se maintenir et s'exercer parmi des égaux.

Sous ces auspices honorables, tout devint facile. Le colonel Mudge, qui avait montré les intentions les plus favorables pour notre entreprise, la seconda par tous les moyens dont il disposait. Nous partîmes pour Edimbourg ensemble, et nous fixâmes notre première station dans le fort de Leith. Là, je reçus de lui tous les secours dont l'obligeance la plus sincère et la plus active pouvait suggérer l'utilité. Mais, ce que j'appréciai bientôt comme un service plus grand et plus essentiel encore que tous les autres, ce fut de m'avoir fait obtenir la bienveillance du colonel Elphinstone, commandant des ingénieurs militaires. Je suis si fort redevable à cet officier, que je ne pourrai jamais dire assez tout ce qu'il fit pour moi; et l'amitié durable qui m'attacha bientôt à lui peut seule lui témoigner ma reconnaissance. Par ses ordres, et sous sa surveillance la plus immédiate, toutes les dispositions furent faites pour me mettre en état d'observer le mieux et le plus tôt possible. Il me fallait un emplacement où la vue fût libre, et qui fût abrité, pour établir mon cercle; on me fit construire, sur la terrasse du fort, un observatoire portatif, dont toutes les parties, se démontant à volonté, me permettaient d'observer de tous les côtés de l'horizon. Il fallait que les appareils du pendule fussent fixés avec solidité : des pierres du poids de 60 quintaux furent scellées

dans d'épaisses murailles avec des liens de fer. Tout ce qui pouvait m'être utile me fut prodigué ; et, si mes observations étaient mauvaises, je n'avais point d'excuse, c'était entièrement ma faute. Malheureusement, la santé du colonel Mudge, affaiblie par ses précédents travaux, ne lui permit pas de jouir avec moi de ces préparatifs autant que nous l'aurions souhaité tous les deux. Mais il fut suppléé en cela par un de ses fils, le capitaine Richard Mudge, jeune officier plein de zèle, avec lequel je fis complètement toutes mes observations. Le soin que je mettais à ce devoir ne m'empêchait pas de jeter un coup d'œil à la dérobée sur tout ce qu'il y a de beau et de bon dans cette Écosse, séjour de la morale et des lumières. Mais, prévoyant que de tels objets pourraient bien me rendre un peu trop arides des détails minutieux de poids, de longueurs et de mesures, j'avais résolu de ne m'en occuper qu'à mon retour ; et, heureusement pour les expériences, j'ai tenu fidèlement la parole que je leur avais donnée.

Lorsqu'elles furent finies, nous devions aller les répéter aux Orcades, dernière limite de l'arc anglais ; mais le colonel Mudge, songeant toujours à ce qui pouvait rendre ses opérations plus complètes, reconnut qu'il était possible de lier les Orcades aux îles Shetland par des triangles dont les sommets s'appuieraient sur les îles, ou plutôt sur les rochers intermédiaires de Faira et de Foula. Ce plan étendait le nouvel arc de deux degrés vers le nord ; c'était assez pour nous décider. Mais, relativement au système général des opérations d'Angleterre et de France, il avait encore un avantage d'une bien autre importance ; c'était de ramener la ligne d'opérations anglaise de deux degrés vers l'est, presque sur le méridien de Formentera, notre dernière sta-

tion australe dans la Méditerranée. Par cet heureux changement, l'opération anglaise devient le prolongement de la nôtre, et les deux ensemble forment un arc presque égal au quart de la distance du pôle à l'équateur. Si l'on peut espérer qu'un jour les diverses nations de l'Europe s'accordent à choisir, dans la nature, la base d'un système commun de mesures, n'est-ce pas là l'élément le plus beau, le plus sûr qu'elles puissent adopter? Et ce grand arc qui, partant des îles Baléares, traverse l'Espagne, la France, l'Angleterre, l'Écosse, et s'arrête aux rochers de la Thulé antique, étant combiné avec l'aplatissement de la terre qui se déduit des mesures du pendule ou de la théorie de la lune, ne donnera-t-il pas, pour l'unité fondamentale, ou LE MÈTRE, la détermination la plus complète, et si on ose le dire, la plus européenne que l'on puisse jamais espérer?

Dès que ce grand projet fut reconnu possible, il absorba toutes nos pensées : la santé affaiblie du colonel Mudge ne permit pas qu'il le réalisât lui-même ; il en confia l'exécution à un des officiers qui servaient sous ses ordres. Il me laissa son fils, dont l'assistance m'avait été si utile et me le devint davantage encore. Mes appareils, l'observatoire portatif, les grosses pierres, leurs liens de fer, tout fut embarqué avec les instruments de l'opération anglaise, sur le brick de guerre *l'Investigator*, commandé par le capitaine George Thomas, dont l'active habileté n'a sans doute pas besoin de mes éloges, mais dont la complaisance inépuisable exige toute ma reconnaissance. Cet officier voulut bien me prendre sur son bord à Aberdeen, où, dans un bien court séjour, j'avais éprouvé l'hospitalité la plus honorable; et le 9 juillet nous fîmes voile pour les îles Shetland. Nous

restâmes long-temps en mer, retenus par des calmes ou par des vents contraires, regrettant de tout notre cœur la perte de tant de belles nuits que nous aurions pu si bien employer pour nos observations. Le sixième jour, nous laissâmes au loin sur notre gauche les Orcades et leurs montagnes rougeâtres, que ne dépassa point l'audace romaine; nous découvrîmes l'île de Faira, qui vit se briser sur ses rochers le vaisseau amiral de l'invincible flotte de Philippe. Enfin les pics de Shetland nous apparurent dans leurs nuages; et le 18 juillet nous prîmes terre, non loin de la pointe australe de ces îles, où les marées de l'Atlantique, heurtant celles qui viennent de la mer de Norwège, causent un soulèvement continuel et une éternelle tempête. L'aspect désolé du sol ne démentait pas ces approches. Ce n'étaient plus ces îles fortunées de l'Espagne, ces riantes contrées, ce jardin de Valence, où les orangers, les citronniers en fleur, répandent leurs parfums autour du tombeau d'un Scipion, ou sur les ruines augustes de l'ancienne Sagonte. Ici, en abordant sur des rocs mutilés par les flots, l'œil n'aperçoit qu'une terre humide, déserte, couverte de pierres et de mousse; des montagnes décharnées que ruine l'inclémence du ciel; pas un arbre, pas un buisson dont la vue adoucisse cet aspect sauvage; çà et là quelques huttes éparses, dont les toits recouverts d'herbe laissent échapper dans le brouillard l'épaisse fumée dont elles sont remplies. En songeant à la tristesse de ce séjour, où nous allions rester exilés pendant plusieurs mois, nous nous dirigeâmes, non sans peine, à travers des plaines et des collines sans chemins, vers le petit assemblage de maisons de pierre qui forme la capitale, appelée Lerwick. Là, nous pûmes commencer à sentir que les vertus sociales d'un pays ne doivent

pas se mesurer sur ses apparences de pauvreté ou de richesse. Il est impossible d'imaginer une hospitalité plus franche, plus cordiale que celle qui nous accueillit. Des personnes qui ne connaissaient nos noms que depuis un instant, s'empressaient de nous conduire par-tout : informées de l'objet de notre voyage, elles nous donnaient d'elles-mêmes tous les renseignements qui pouvaient nous être utiles ; elles les recueillaient pour nous, et nous les transmettaient avec le même intérêt que s'il se fût agi d'une affaire qui leur eût été personnelle. Nous reçûmes sur-tout beaucoup d'avis essentiels du docteur Edmonston, médecin instruit, qui a publié une très-bonne description des îles Shetland, et qui se souvenait avec plaisir d'avoir suivi à Paris les cours de notre confrère, M. Duméril. Il nous donna des lettres pour un de ses frères qui résidait dans la petite île d'Unst, la plus boréale de tout cet archipel. Car, quoique nous eussions pensé, en partant d'Écosse, que nous nous établirions à Lerwick; quoique le fort Charlotte, qui protége cette ville, présentât pour nous et nos appareils, un emplacement très-favorable, cependant nous étions fort séduits par cette petite île d'Unst, qui nous offrait une dernière station plus boréale que Lerwick, d'environ un demi-degré, et aussi un peu plus orientale, par conséquent plus rapprochée du méridien de Formentera. Il est vrai qu'elle ne nous promettait pas un séjour bien commode ; mais on conçoit qu'en partant, nous ne nous étions pas attendus aux jouissances du luxe : nous fîmes donc le choix qui convenait le mieux à nos opérations. Nos nouveaux amis de Lerwick nous indiquèrent le pilote le plus expérimenté de ces îles, et nous partîmes le 20 juillet au soir pour notre dernière destination. La science de notre guide ne nous fut

pas inutile : un brouillard épais vint nous envelopper, le vent, toujours favorable, fraîchit ; et notre vaisseau, plongé dans une obscurité profonde, vola avec la rapidité d'une flèche, entre des écueils si nombreux, et par de si étroits passages, qu'à moins d'être conduit dans ce dédale par une pratique tellement juste et rapide qu'elle devint pour ainsi dire un sens, il aurait dû se briser mille fois. Arrivés à Unst, nous parcourûmes avidement l'île. Elle n'offrait que des cabanes de pêcheurs, et çà et là quelques maisons de propriétaires, trop petites pour recevoir les grands instruments anglais. Heureusement, la commission anglaise avait des tentes : on songea d'abord à les établir sur la montagne la plus haute et la plus boréale de l'île ; mais la difficulté de porter jusques-là les grands instruments, ce qu'il aurait fallu exécuter à bras d'hommes, fit renoncer à ce projet. On préféra une petite île appelée Balta, située à l'entrée de la principale baie d'Unst, et qui, la fermant, pour ainsi dire, du côté de la mer, en forme un excellent port, où le brick pouvait en toute sûreté mettre à l'ancre et débarquer nos instruments. Je me rangeai d'abord de cet avis ; mais, en examinant de plus près la nouvelle station, en considérant à quels coups de vent furieux elle était exposée, l'humidité extrême qui y régnait, l'éloignement de toute habitation, et les difficultés multipliées qui se présentaient pour y former un établissement aussi solide que l'exigeaient les expériences du pendule, je craignis, en y persistant, de compromettre le succès de mes opérations. En conséquence, nous nous décidâmes, le capitaine Mudge et moi, à retourner dans l'île d'Unst, et à demander l'hospitalité, pour nous et nos appareils, dans la seule maison qui fût en vue. Heureusement, c'était celle de ce M. Edmonston, dont le frère

nous avait si bien accueillis à Lerwick. Nous trouvâmes ici la même bonté. Une grande bergerie, vacante à cause de l'été, et dont les épaisses murailles étaient faites pour résister à toutes les tempêtes, reçut les appareils du pendule. L'observatoire portatif, ainsi que le cercle répétiteur, furent établis dans le jardin même de M. Edmonston. Ce ne fut pas sans de grandes peines que l'on parvint à débarquer les grosses pierres, et à les traîner jusqu'au lieu de leur destination. Il fallut pour cela tous les efforts de l'équipage du brick, animés par l'obligeante persévérance des officiers. Enfin, le 2 août, nous fûmes en état de commencer les observations astronomiques, et le 10, nous fîmes la première expérience du pendule. Le 17, nous avions déja huit de ces expériences et 270 observations de latitude. Le succès de l'opération était assuré : elle ne demandait plus que du temps et de la persévérance. Malheureusement, le capitaine Mudge commença à ressentir, d'une manière fâcheuse, l'influence de ce séjour. Quoiqu'il me cachât soigneusement ce qu'il éprouvait, et qu'il ne diminuât rien de son zèle, je m'aperçus de l'altération de sa santé; et les vents ayant amené dans notre île un vaisseau baleinier qui revenait du Spitzberg, je le déterminai à en profiter pour retourner dans un climat moins sévère. Il partit à regret, en me laissant, de la part de son père, toutes les autorisations, et même tous les secours dont je pouvais avoir besoin. Ce fut alors que, resté seul, je pus apprécier combien il était heureux pour moi d'être venu habiter chez M. Edmonston. La bienveillance de cet excellent homme semblait croître avec la difficulté de ma position. Je ne pouvais observer seul, au cercle répétiteur, dont la manœuvre exige deux personnes, une qui suit l'astre, l'autre qui note les indications du ni-

veau. M. Edmonston, qui s'intéressait à mes travaux autant que moi-même, me suggéra l'idée d'employer, pour cette dernière partie de l'observation, un jeune charpentier, qui nous avait déja donné des preuves de son intelligence et de son adresse en remontant notre observatoire; et qui, d'ailleurs, comme tous les paysans d'Écosse et même de ces îles, savait fort bien lire, écrire et compter. Je suivis cet avis; et, ayant réduit la tâche de mon nouvel assistant à ce qu'elle pouvait être de plus simple, j'essayai de lui en donner quelques leçons peu de jours avant le départ du capitaine Mudge. Il réussit très-vîte, et peut-être mieux qu'un aide plus savant n'aurait pu le faire; car il observait et marquait mon niveau avec toute la fidélité d'une mécanique; et, pour rien au monde, non pas même pour seconder mon impatience à observer, il n'aurait admis mes résultats comme bons, avant qu'ils fussent strictement dans les conditions que je lui avais prescrites, c'est-à-dire avant que la bulle du niveau fût parvenue à une parfaite immobilité. Toutefois, comme il faut bien se réserver quelques vérifications quand on veut faire d'un charpentier un astronome, j'avais, entre les nombres qu'il écrivait, certaines relations qu'il ne soupçonnait pas, et qui m'auraient indiqué ses erreurs s'il en avait commis. Cela arriva quelquefois dans les commencements; et il était toujours fort surpris que je pusse ainsi reconnaître et redresser une faute que lui-même n'avait pas aperçue en la faisant, et que moi, je n'avais pas vu faire. Mais, au bout de quelques jours, ma science occulte n'eut plus aucune occasion de se montrer. Avec cette assistance utile et sûre, je parvins à réunir, en deux mois, trente-huit séries du pendule, chacune de cinq ou six heures; quatorze cents observations de latitude en cinquante-cinq séries, prises tant

au sud qu'au nord du zénith, et environ douze cents observations de hauteurs absolues du soleil et des étoiles pour régler la marche de mon horloge. D'après cela, on conçoit que je ne faisais guère autre chose qu'observer; et en effet, je n'ai calculé sur les lieux que trois ou quatre observations à de grands intervalles les uns des autres, pour m'assurer de leur marche générale et me guider dans leur continuation, remettant les calculs définitifs à mon retour : j'ai sans doute bien fait d'en user ainsi, car, quoique j'y aie donné depuis beaucoup de temps, ils ne sont pas encore entièrement terminés. Toutefois, l'accord des observations déja réduites annonce l'exactitude que l'on peut en attendre; et les résultats qui s'en déduisent, étant combinés avec ceux de Formentera et de l'arc de France, donnent, pour l'aplatissement de la terre, exactement la même valeur qui se conclut de la théorie de la lune, et de la mesure des degrés, comparés à de grandes distances. Ce parfait accord entre des déterminations si diverses, montre à-la-fois la certitude du résultat et la sûreté des méthodes que la science emploie pour l'obtenir. On a pu voir, par cette notice, que ce n'est pas sans peine qu'elle est parvenue à ce point de précision; et l'on n'en sera pas étonné, quand on saura que la variation de longueur du pendule, par laquelle l'aplatissement se mesure, n'est en tout, depuis l'équateur jusqu'au pôle, que de quatre millimètres, c'est-à-dire moins de deux lignes, et depuis Formentera jusqu'à Unst, d'un millimètre et demi, ou moins de trois quarts de ligne. Ce sont pourtant ces trois quarts de ligne qui, appréciés comme on peut aujourd'hui le faire, décèlent, mesurent même avec une très-grande exactitude l'aplatissement de tout le sphéroïde

terrestre, et nous prouvent que, malgré les petits accidents de composition et d'arrangement que nous présente cette première et mince écorce sur laquelle nous nous agitons, l'intérieur de la masse de notre planète est composé de couches parfaitement régulières, assujetties aux lois de superposition, de densité et de forme que leur assigne un état primitif de fluidité.

L'avantage d'avoir complètement exécuté mes opérations, quelque grand qu'il dût me paraître, ne fut ni le seul, ni le plus précieux que je trouvai dans la famille qui m'avait si obligeamment accueilli. Si je fusse resté sur les rochers de Balta, j'aurais sans doute quitté ces îles avec tous les préjugés d'un étranger. Je n'aurais vu que la tristesse de leur séjour, la pauvreté de leur sol, l'inclémence de leur ciel. J'aurais ignoré qu'elles renfermaient des êtres sensibles, bienveillants, vertueux, éclairés, comme ceux que j'ai eu le bonheur d'y connaître (1); ou, si j'avais pu soupçonner leur existence, que quelque service affectueux, quelque attention délicate m'aurait sans doute révélée, je n'aurais pas conçu quel charme pouvait les retenir dans cette contrée brumeuse, pierreuse, sans chemin, sans un arbre sur les montagnes ou dans les plaines pour reposer la vue; royaume de la pluie, du vent et des tempêtes, où l'atmosphère, constamment imprégnée d'une froideur humide, n'apporte quelque adoucissement à l'âpreté des hivers, que sous la triste condition de n'avoir point d'été. Ce qui les y attache, c'est la paix, la profonde paix, l'inaltérable paix dont ils

(1) Si je ne puis rappeler ici toutes les personnes qui m'ont comblé de prévenances, du moins je joindrai aux noms de M. Edmonston ceux de M. Mouat d'Unst, et Leisk de Lunna.

jouissent, et dont ils savourent toutes les douceurs. Depuis vingt-cinq ans que l'Europe se dévore elle-même, on n'a pas entendu dans Unst, à peine dans Lerwick, le bruit d'un tambour; depuis vingt-cinq ans la porte de la maison que j'habitais était restée ouverte la nuit comme le jour. Dans tout cet intervalle, ni conscription ni presse ne sont venues troubler ni affliger les pauvres, mais tranquilles habitants de cette petite ile. Les nombreux rescifs qui l'environnent, et qui ne la rendent accessible que par des temps favorables, lui servent de flotte pour la défendre des attaques des corsaires en temps de guerre; et qu'est-ce que des corsaires y viendraient chercher! Ici on ne reçoit les nouvelles d'Europe que comme on lit l'histoire du précédent siècle; elles ne rappellent aucun malheur personnel; elles ne réveillent aucune animosité : aussi elles n'ont plus cet intérêt, ou, pour mieux dire, cette fureur du moment que produit l'exaltation insensée de toutes les passions, et l'on philosophe avec tranquillité sur des événements qui semblent se rapporter à un autre monde. S'il y avait seulement des arbres et du soleil, nul séjour ne serait aussi doux; mais s'il y avait des arbres et du soleil, tout le monde voudrait y venir, et la paix n'y serait plus.

Ce calme, cette sécurité habituelle, donnent aux relations sociales un charme ailleurs inconnu. Tout ici, dans la classe propriétaire, est parent, ou allié, ou ami, et les amitiés sont comme des alliances. Mais aussi, comme en ce monde il faut que le mal accompagne toujours le bien, cette douceur même de vivre en grande famille est quelquefois chèrement achetée; elle leur fait sentir, avec une peine extrême, la mort de ce petit nombre d'individus sur lesquels

ils ont concentré leurs affections : un pareil événement, et il faut bien qu'il arrive, est aussi un malheur de famille, et en a toute l'amertume. Ils éprouvent presque une douleur égale quand leurs frères, ou quelqu'un de leurs amis, part pour aller chercher fortune ailleurs; ce qui n'est cependant que trop ordinaire, l'île, et toutes les îles ensemble, ne fournissant pas assez d'emploi pour toute la classe élevée de la population. Ce départ est senti, par ceux qui restent, comme une mort; et c'est presque une mort en effet pour eux, puisqu'il est trop vraisemblable qu'ils ne reverront jamais ceux qui s'éloignent. On quitte bien les îles Shetland pour venir s'établir dans un pays meilleur; mais on y revient rarement. Les amitiés même que leur bonté leur fait contracter avec les étrangers qu'ils obligent, deviennent, pour leurs pauvres cœurs, des sujets de regrets et de tristesse, que la voix lointaine de la reconnaissance ne peut qu'imparfaitement adoucir.

La nécessité de s'expatrier tient, chez les Shetlandais des classes élevées, au peu d'extension du commerce et de l'agriculture, occasionné par le manque de capitaux et le défaut d'exportation des produits du sol. Une petite portion seulement des terres de chaque propriétaire est cultivée; le reste sert de pâturage à des troupeaux de moutons et de chevaux à demi-sauvages, qui errent toute l'année sur les collines et dans les plaines, sans garde et sans abri. Le peuple défriche autour de sa hutte la portion de terre strictement nécessaire à sa subsistance, et en paie la rente sur les profits périlleux, mais attrayants, de la pêche. Tous la font, et avec une hardiesse qui n'a pas d'exemple. Six hommes, bons rameurs, et sûrs les uns des autres, s'associent pour occuper une même barque, un canot léger, entière-

ment découvert; ils prennent avec eux une petite provision d'eau et de gâteaux d'avoine, une boussole, et, dans ce frêle esquif, ils s'en vont hors de la vue des îles et de toute terre, à une distance de quinze ou vingt lieues : là ils tendent leurs lignes, et passent un jour et une nuit à pêcher. Si le temps est beau et la pêche favorable, ils peuvent gagner chacun dix ou douze francs dans un pareil voyage; si le ciel se couvre et que la mer gronde, ils luttent, dans leur nacelle découverte, contre sa fureur, jusqu'à ce qu'ils aient sauvé leurs lignes, dont la perte serait leur ruine et celle de leur famille; puis ils rament et voguent, dans la direction de la terre, au milieu de vagues hautes comme des maisons. Le plus expérimenté, assis à l'arrière, tient le gouvernail; et, jugeant la direction de chaque lame, élude son choc direct, qui suffirait pour les engloutir. En même temps, il commande les mouvements de la voile; il la fait baisser chaque fois que la barque est montée sur le dos d'une vague, afin de modérer sa descente, et hausser chaque fois qu'elle est descendue au fond, afin que le vent la fasse voler sur le dos de la vague suivante. Quelquefois, enveloppés d'une obscurité profonde, les malheureux ne voient pas la montagne d'eau qu'ils fuient; ils n'ont, pour juger son approche, que le bruit de son mugissement. Cependant les femmes et les enfants sont sur la côte, implorant le ciel, épiant l'apparition de la barque qui porte leurs seules espérances, croyant parfois la voir soulevée ou engloutie dans le roulis des ondes; s'apprêtant à assister leurs maris ou leurs pères, s'ils arrivent assez près pour qu'on puisse les secourir, et quelquefois appelant à grands cris ceux qui ne les entendront plus. Mais leur destinée n'est pas toujours si funeste. A force d'adresse, de fatigue, de sang-

froid et de courage, le canot sort vainqueur de cette lutte terrible; le son bien connu de sa conque se fait entendre; il arrive : alors les embrassements succèdent aux larmes, et la joie de se revoir s'accroît par le récit de l'affreux péril auquel on vient d'échapper.

Toutefois, pour ces pauvres gens, l'âpreté même de leur patrie a des charmes. Ils aiment ces vieux rochers, dont les formes hardies et l'aspect, si souvent observé, leur marquent l'étroit passage que leur barque doit suivre, lorsqu'au retour d'une pêche heureuse, et ramenée par un vent favorable, elle rentre dans la baie protectrice, saluée par les cris des oiseaux de mer. Ils aiment ces cavernes profondes, où ils ont souvent lancé leur nacelle au milieu des vagues, pour aller surprendre les phoques endormis. Moi-même, tranquille sous leur conduite, j'ai contemplé, avec admiration, ces hauts escarpements des roches primitives, cette vieille charpente du globe, dout les couches, penchées vers la mer et minées à leur base par la fureur des flots, semblent menacer d'ensevelir sous leurs ruines la frêle barque qui bondit à leurs pieds. A notre approche, des nuées d'oiseaux de mer sortaient par milliers de leurs retraites, surpris de se voir troubler par des humains, et faisaient retentir ces lieux solitaires de leurs cris confus; les uns s'élançant dans les airs, d'autres se plongeant dans les vagues et ressortant presque aussitôt avec la proie qu'ils y avaient saisie; tandis que des cétacées et des phoques élevaient çà et là leurs têtes noirâtres au-dessus des ondes transparentes comme le cristal : par-tout la vie semblait abandonner une terre froide et humide, pour se réfugier, plus variée et plus active, dans l'air et dans les eaux. Mais, aussitôt que le soir étend son voile sur ces sauvages retraites, tout rentre dans

la paix, dans le silence. Quelquefois un léger vent du sud adoucit la froideur de l'air, et permet aux astres de la nuit d'éclairer de l'éclat le plus pur cette scène tranquille, dont aucun bruit n'interrompt plus la paix profonde, si ce n'est, par intervalle, le murmure lointain des vagues mourantes, ou le cri doux et plaintif d'une mouette rasant rapidement la surface des flots.

Après deux mois de séjour, je quittai ces îles, emportant des souvenirs pour toute ma vie. Un coup de vent de l'équinoxe me ramena à Edimbourg en cinquante heures. Ce passage brusque de la solitude au bruit du monde, de la simplicité patriarchale aux raffinements de la civilisation et du luxe, n'est pas sans attrait. Le colonel Elphinstone, par le plus obligeant accueil, me prouva que l'amitié n'était pas toute retirée aux îles Shetland. J'étais triste et souffrant de tant de fatigues, M. Elphinstone me reçut dans sa maison, et m'y garda comme un parent, comme un ami. Ce fut alors que, entièrement désoccupé de mes observations, je pus contempler à loisir tout ce que l'état social le plus avancé offre, dans ce pays, en institutions et en hommes; spectacle à-la-fois consolant et triste pour quiconque a passé sa vie au milieu des troubles du continent. Je vis un peuple pauvre, mais laborieux; libre, mais respectueusement soumis aux lois; moral et religieux sans âpreté, tolérant sans indifférence. Je vis des paysans apprendre à lire dans des livres où se trouvent des essais d'Addisson et de Pope. Je vis les ouvrages de Johnson, de Chesterfield, et des plus agréables moralistes anglais, offerts en délassement à la classe moyenne du peuple : dans des coches d'eau, comme ailleurs, on y mettrait des jeux de cartes et de dés. Je vis des fermiers de village se réunir en clubs pour délibérer sur

des intérêts de politique ou d'agriculture, et s'associer pour acheter des livres utiles, au nombre desquels ils mettaient l'Encyclopédie britannique, que l'on sait être rédigée, à Edimbourg, par des savants et des philosophes du premier ordre. Je vis enfin des classes supérieures de la société, assorties à ce haut degré de civilisation, et réellement dignes d'y occuper la première place par leurs lumières et par la noblesse de leurs sentiments; je les vis excitant, dirigeant toutes les entreprises d'utilité publique, communiquant sans cesse avec le peuple, et ne se confondant jamais avec lui; s'attachant à développer son intelligence pour l'éclairer sur ses devoirs et sur ses intérêts véritables; sachant le soulager dans ses besoins, sans lui ôter les vertus et l'indépendance que donne le soin d'y pourvoir; attirant ainsi par-tout ses regards sans exciter son envie; et, pour prix de tant d'efforts, la paix, l'union, l'estime réciproque, la confiance mutuelle, et même une affection très-vive, fondée d'une part sur l'habitude de la bonté et la douceur des relations intimes, et de l'autre sur la reconnaissance et le respect.

En quittant l'Ecosse, je visitai les contrées les plus industrieuses de l'industrieuse Angleterre. J'observai alors un autre spectacle : je vis les forces de la nature, employées sous toutes les formes imaginables au service de l'homme, et celui-ci, réservé comme une mécanique plus chère et d'une construction plus délicate, pour les seules opérations intermittentes ou accidentelles que sa raison divine le rend plus propre à exécuter. Et, soit que les considérations de morale sociale, qui m'avaient tant frappé, eussent laissé des traces trop profondes dans mon ame; soit qu'un grand système manufacturier doive plutôt être

apprécié dans ses résultats nationaux que dans son influence locale et particulière, j'admirai cet immense développement des manufactures plus que je ne le souhaitai pour ma patrie. Après avoir salué Oxford et Cambridge, ces antiques et tranquilles séjours des lettres et des sciences, je vins rejoindre M. Arago à Londres, et m'associer encore avec lui pour la mesure du pendule à secondes, non plus toutefois dans une petite île presque déserte, mais dans le magnifique observatoire de Greenwich. M. de Humboldt, qui l'avait accompagné, prit part à cette opération, et voulut bien, pendant qu'elle dura, oublier la multitude de ses autres talents pour n'être qu'un excellent observateur. L'astronome royal, M. Pond, se plut à nous offrir toutes les facilités imaginables, avec cet empressement généreux que les hommes vraiment dévoués aux sciences ont toujours, mais peuvent seuls avoir pour tout ce qui contribue à leurs progrès. Après avoir joui du plaisir d'observer le ciel et d'étudier un des plus grands phénomènes de la nature avec de beaux instruments, déja consacrés, pour ainsi dire, par tant d'observations, et dans un lieu renommé par tant de découvertes astronomiques, je revis enfin ma patrie avec ce bonheur du retour qu'éprouvent si vivement les cœurs français, et dont le charme était rendu plus doux encore par le sentiment intérieur de satisfaction et de reconnaissance dont je lui rapportais l'hommage. C'est, en effet, c'est dans un voyage entrepris pour l'avancement des sciences, qu'un Français peut apprendre à honorer davantage, à mieux chérir sa noble patrie. Placé hors du cercle des passions politiques, n'étant point attiré par l'intérêt ou l'ambition; sans rang, sans richesses qui le soutiennent, il

n'a pour lui que les titres que sa patrie s'est acquis à la solide gloire, à celle qui fait du bien aux hommes. Il est porté par le souvenir de tant de services qu'elle a rendus à la civilisation du monde, par l'admiration universelle qu'ont excitée tant de chefs-d'œuvre dont elle a rempli les lettres, les sciences et les arts. Semblable à Minerve, cette patrie l'accompagne sur le sol étranger; elle parle pour lui, l'introduit, le protége, lui ouvre les cœurs, et réclame en sa faveur une hospitalité qu'elle-même a tant de fois et toujours si noblement accordée. Aussi lorsque, après avoir atteint le but de ses travaux, il raconte à ses compatriotes tout ce qu'il reçut d'accueil, de secours, de bienveillance, d'amitié même, chez une nation justement célèbre, il éprouve une jouissance d'autant plus pure à manifester l'expression de sa reconnaissance, que toutes ces faveurs sont encore, à ses yeux, de nouveaux dons de sa patrie. (1)

---

(1) Ce que j'ai dit dans cette Notice sur les vertus sociales de l'Écosse et des îles Shetland, présente ces contrées sous un aspect si différent de nos habitudes continentales, que je ne serais pas surpris qu'en France, en Augleterre même, beaucoup de personnes supposassent qu'il y a quelque exagération dans cette peinture, et que j'ai involontairement cédé à la prédilection qu'un étranger prend toujours pour un pays nouveau où il est reçu avec bienveillance. Je puis cependant assurer que je n'ai été que vrai. On me croira peut-être encore pour l'Écosse; mais, pour les îles Shetland, où trouverai-je des témoins? Quoiqu'elles soient peu distantes, la difficulté de la navigation, l'inclémence du climat et le défaut de commerce en éloignent les voyageurs; et ceux que, par intervalles, la nécessité y amène, se hâtent de partir dès que leurs affaires sont terminées. Peut-être un séjour de deux mois, dans une position libre et désintéressée, m'a-t-il permis de voir ces îles plus intimement que ne l'ont fait la plupart des Écossais qui les avoisinent. Aussi s'en fait-on de bien

ADDITION.

Depuis l'époque où la Notice précédente a été lue, on a continué les opérations qui restaient encore à faire, soit pour achever la triangulation de l'Écosse, et y joindre les Orcades et les îles Shetland; soit pour rattacher d'une manière sûre et définitive l'arc anglais à l'arc de France. Ce dernier objet a été rempli par des observations simultanées de latitude faites à Dunkerque avec le secteur zénithal et le cercle répétiteur, et pour lesquelles nous nous sommes réunis, M. Arago et moi, avec les observateurs anglais, MM. Mudge, Colby et Gardner. Le résultat de ce concours a été que la latitude déterminée par le cercle répétiteur, en observant successivement au nord et au sud du zénith, s'accorde parfaitement avec celle que l'on obtient à l'aide du secteur; et, pour Dunkerque, l'une et l'autre méthode se sont aussi accordées avec la latitude que M. Delambre avait assignée à cette extré-

---

fausses idées à Édimbourg même. Mais, en général, c'est un plaisir que l'on peut se procurer d'un bout de l'Europe à l'autre, que d'entendre chacun médire de ses voisins du nord. En Italie, on regarde la France comme un climat rude et sévère; voyez ce qu'en dit Alfieri. Ici, nous trouvons notre pays fort beau; mais l'Angleterre nous semble le séjour des brouillards. A Londres, on ne se plaint nullement du climat; mais on parle de l'Écosse comme d'une contrée presque privée du soleil. Les Écossais trouvent cette opinion fort ridicule; mais ils ont en grande pitié les pauvres Shetlandais. Ceux-ci, à leur tour, prétendent qu'ils ont beaucoup moins froid qu'en Ecosse, mais qu'on est bien malheureux en Islande et aux îles Feroé. Je suis persuadé que les Islandais même ont encore quelque dédain pour le Spitzberg. La vérité est que, dans tous les climats du monde, l'homme peut vivre avec une somme de bonheur à-peu-près égale, s'il y porte avec lui les vertus sociales et les ressources du commerce et de la civilisation.

mité boréale de notre arc, qui devient désormais la limite australe de l'arc anglais.

Les deux arcs célestes étant ainsi rattachés l'un à l'autre, il reste encore à lier la triangulation anglaise avec la nôtre par quelques triangles établis sur les côtes opposées d'Angleterre et de France: car, bien que cette jonction ait été faite autrefois, le perfectionnement des instruments peut faire espérer de lui donner aujourd'hui plus d'exactitude. Une difficulté s'est élevée sur la possibilité d'employer à cette opération les signaux de nuit qui nous ont si bien servi en Espagne. On a craint, avec raison, que leur lumière n'égarât les vaisseaux qui les prendraient pour des phares. Pour éviter ces inconvenients, j'ai proposé d'employer ces signaux pendant le jour, où ils seraient visibles dans nos lunettes, comme le sont les étoiles, sans être vus des navigateurs. Je ne doute pas que ce moyen ne réussisse pafaitement, si on veut l'employer.

Enfin, quand toutes les opérations relatives au grand arc d'Europe seront terminées, on pourra les compléter d'une manière proportionnée à leur grandeur, en mesurant un arc du méridien terrestre, et la longueur du pendule près de l'équateur, sur le prolongement de l'arc européen ; ce qui peut aisément se faire dans les établissements anglais de la côte de Guinée. J'ai soumis cette idée à l'illustre président de la Société royale, le chevalier Banks: c'est en faire hommage à la personne qui, par sa position et son influence, peut le plus aisément en déterminer l'exécution.

RAPPORT

Fait à l'Académie royale des sciences sur un ouvrage de M. Vicat, *ingénieur des ponts-et-chaussées, intitulé :* Recherches expérimentales sur les chaux de construction, *etc.*

Extrait des registres de l'Académie, et imprimé par son ordre.

M. Vicat, ingénieur des ponts-et-chaussées, dans le département du Lot, a présenté à l'Académie un mémoire intitulé : *Recherches expérimentales sur les chaux de construction, les bétons, et les mortiers ordinaires;* nous avons été chargés de l'examiner et d'en rendre compte, MM. de Prony, Gay-Lussac, et moi.

L'objet de ce travail est de la plus haute importance, puisque la solidité des édifices de toute nature, et particulièrement des constructions hydrauliques, dépend du degré de dureté que peuvent acquérir les mortiers ou ciments employés pour lier entre eux les matériaux de ces édifices : aussi, depuis long-temps, les architectes et les ingénieurs les plus habiles se sont-ils occupés, avec plus ou moins de soin, de rechercher la meilleure composition de ces mortiers; ils ont donné des règles pratiques à cet égard, et ces règles, soumises depuis environ un demi-siècle à l'examen des chimistes et des physiciens, ont reçu des explications diverses, et des modifications que l'expérience et la théorie ont successivement indiquées.

C'est tout-à-la-fois comme constructeur et comme chimiste que M. Vicat a entrepris de traiter cette matière : la position dans laquelle il se trouve, en lui faisant sentir de quelle utilité pouvaient être les recherches qu'il entreprenait, lui a permis de donner à son travail un grand développement : les nombreuses expériences dont il se compose, et les vues nouvelles qu'il présente, ne pouvaient manquer d'exciter l'intérêt de vos commissaires; mais, avant d'en rendre compte, et pour mettre l'Académie à portée de reconnaître ce qui appartient à l'auteur, et d'apprécier par-là le mérite de ses recherches, il convient d'exposer le plus succinctement possible les travaux de ceux qui l'ont précédé, et de fixer l'état de la question au moment où il a été conduit à s'en occuper.

Soumettre une pierre d'une certaine nature à l'action du feu; la rendre ainsi susceptible de former avec l'eau une sorte de pâte; composer de cette pâte et d'une quantité déterminée de sable ou d'autres matières pulvérulentes, un mélange susceptible de s'endurcir par le temps à l'égal des pierres naturelles, auxquelles il est destiné à servir de liaison, sont autant d'opérations qui supposent nécessairement le peuple chez lequel on les mit pour la première fois en pratique, déja parvenu à un état avancé de civilisation. Cependant les blocs de pierre de taille qui forment les assises horizontales des pyramides d'Égypte, c'est-à-dire des plus anciens monuments connus, sont déja liés entre eux par un ciment composé de chaux, de sable, et de fragments de briques, tandis que les constructions qui furent désignées par les anciens sous e nom de constructions *Cyclopéennes,* et qui appartiennent aux premiers âges de la Grèce, sont, comme on sait, formées de prismes horizontaux à bases irrégulières, posés les uns

sur les autres sans aucun ciment intermédiaire. C'est à la perfection avec laquelle leurs faces latérales sont dressées, et à l'exactitude de leur juxta-position, qu'il faut attribuer la belle conservation des murs antiques où on les retrouve encore aujourd'hui. Or, en Grèce et dans la partie de l'Italie où les Grecs vinrent s'établir, les murs *Cyclopéens* servent de soubassement à des constructions évidemment postérieures qui ont leurs matériaux unis par des ciments calcaires : ce fut donc à une époque moins reculée que celle de la construction des murs *Cyclopéens* (1), que l'usage de ces mortiers fut apporté de l'Orient dans les régions de l'Europe les plus anciennement civilisées.

La recherche de cette époque ne serait peut-être pas sans utilité pour ceux qui entreprendraient de tracer la marche, et d'indiquer les progrès de la civilisation des peuples; mais sa détermination précise est étrangère à notre sujet. Nous dirons seulement que si, comme on l'assure, il n'entre point de mortier dans la maçonnerie de la grande cloaque que Tarquin-l'Ancien fit construire à Rome environ six cents ans avant notre ère, ce fut dans l'intervalle des trois cents années qui suivirent, que l'usage des ciments calcaires s'y introduisit : ils entrent en effet dans la maçonnerie de la *voie Appienne*, et ils étaient indispensables pour celle de l'aquéduc destiné à amener l'*Aqua Claudia* sur le mont Aventin. Or ces deux grands monuments d'utilité publique, les premiers de ce genre que l'on ait érigés, sont précisément de la même date, et ont eu l'un et l'autre pour fondateur le censeur Appius Claudius, qui exerçait sa magistrature l'an de Rome 441.

(1) *Voyez* les Mémoires de M. Petit-Radel.

Ainsi l'usage de la chaux pour la préparation des mortiers était nécessairement connu en Italie trois cent treize ans avant l'ère chrétienne.

Tous ceux qui ont écrit sur l'architecture ont attribué à Vitruve d'avoir indiqué le premier les proportions suivant lesquelles le sable et la chaux doivent être mêlés pour la fabrication du mortier. C'est une erreur commune à tous ces auteurs : deux cents ans avant Vitruve, Porcius Caton, le plus ancien de tous les écrivains romains dont les ouvrages nous soient parvenus, avait dit, dans son Traité *de Re rusticâ* (1), non-seulement qu'on devait composer le mortier de deux mesures de sable et d'une mesure de chaux, mais encore il avait spécifié les caractères extérieurs de la pierre calcaire que l'on croyait de la meilleure qualité, et ceux auxquels on jugeait que la cuisson en était achevée. Il avait décrit la forme et les dimensions des fours à chaux, et fait connaître les conditions auxquelles on devait stipuler les marchés que l'on contractait avec les chaufourniers; ce qui suppose un usage déja très-étendu de la matière qu'ils préparaient.

Vitruve, à la vérité, entre dans de plus grands détails; il distingue différentes espèces de sable (2), et regarde comme le plus convenable à la fabrication du mortier, le sable fossile le plus âpre au toucher, sans aucun mélange de terre, et qui, jeté sur une étoffe blanche, n'y laisse point de tache après qu'on l'a secoué; vient ensuite le sable de rivière, puis enfin celui de mer, qu'il place au dernier rang, attendu, dit-il, que le mortier qui en est composé sèche difficilement.

(1) *Marcus Porcius Cato de Re rusticâ*, cap. 15; *ibid.* cap 38; *ibid.* cap. 16. Caton écrivait environ deux siècles avant J.-C.

(2) *Vitruvii de Architecturâ*, lib. II, cap. 4.

Quant aux proportions de chaux et de sable, il les fait varier suivant l'espèce de celui-ci.

Ainsi il prescrit de mêler une partie de chaux éteinte avec trois parties de sable fossile, ou deux parties seulement de sable de rivière ou de mer (1), en observant que l'on rend le mortier fait avec ces deux dernières espèces de sable beaucoup meilleur par l'addition d'une partie de tuileaux concassés.

Cet auteur est aussi le premier auquel on doive la connaissance des propriétés de la pouzzolane, qu'il appelle *poudre de Pouzzoles (pulvis puteolanus)* (2). Il dit qu'on la trouve aux environs de Bayes et du mont Vésuve, et que, mêlée avec la chaux et les pierres, elle donne à la maçonnerie ainsi composée la faculté de s'endurcir merveilleusement, non-seulement dans les édifices ordinaires, mais même au fond de la mer. Il prescrit ailleurs (3), pour la fondation des môles que l'on place à l'entrée des ports, l'emploi d'un mortier composé d'une partie de chaux et de deux parties de pouzzolane. C'est aussi dans cette proportion, qu'il indique de mélanger la chaux et la brique pilée, pour composer la forme de mortier sur laquelle le pavé des maisons et des terrasses devait être assis (4) : car il paraît que dès-lors la pouzzolane était exclusivement réservée pour les constructions hydrauliques.

Les divers passages de Vitruve, dont nous venons de rappeler la substance, semblent laisser incertaine la question de savoir dans quel état se trouvait la chaux lors de son emploi : était-elle éteinte d'avance et réduite en pâte ? ou bien était-elle employée au sortir du four, à l'état de

---

(1) *Vitruv. de Architect.*, l. II, c. 5.
(2) *Ibid.* lib. II, cap. 6.
(3) *Ibid.* lib. V, cap. 12.
(4) *Ibid.* lib. VII, cap. 1.

chaux vive? L'attention que met cet auteur à recommander de ne se servir, pour faire du stuc ou des enduits, que de chaux éteinte depuis long-temps (1), fonderait à croire que, pour les mortiers ordinaires, la chaux était éteinte pendant l'acte même de leur fabrication. Vitruve justifie, au surplus, par une raison très-plausible, la pratique qu'il recommande, de ne faire usage, pour les stucs et les enduits, que d'une chaux ancienne, devenue grasse et gluante : c'est, dit-il, parce qu'il reste toujours dans la chaux qui est employée à la sortie du fourneau, de petites portions de pierre moins calcinées, lesquelles, venant à s'éteindre après la fabrication du stuc, éclatent à sa surface, et en détruisent le poli (2). Il prescrit encore d'enduire les parties basses d'un édifice, et celles qui sont constamment exposées à l'humidité, non pas de mortier fait de chaux et de sable, mais de mortier, de chaux éteinte, et de ciment de brique (3).

Pline, qui a rassemblé dans son précieux recueil les procédés de presque tous les arts de l'antiquité, a répété, sur la composition des mortiers et l'emploi de la pouzzolane, tout ce que Vitruve en avait dit (4); on n'y trouve, de plus, que les plaintes qu'il fait contre l'avarice des constructeurs, qui, employant des ciments sans liaison, parce qu'ils en dérobaient la chaux, préparaient d'avance la ruine des édifices de Rome (5).

L'intervalle qui s'est écoulé entre le siècle de Pline et celui

(1) *Vitruvii, de Architecturâ*, lib. VII, cap. 2.

(2) *Ibid.* lib. VII, cap. 2. (3) *Ibid. ibid.* cap. 4.

(4) *Naturalis historiæ*, lib. XXXVI, cap. 23. *Ibid.* lib. XXXV, cap. 13.

(5) *Ruinarum urbis ea maximè causa, quod furto calcis, sine ferrumine suo cæmenta componuntur.* (*Nat. hist.* lib. XXXVI, cap. 23.)

de la renaissance des arts en Europe, disparaît, en quelque sorte, dans l'histoire de l'architecture. Cette histoire n'est écrite que par les monuments mêmes de cette époque. Si le goût particulier des peuples du Nord modifia l'ancienne forme des édifices, il est très-vraisemblable qu'ils ne changèrent rien aux procédés de l'art de bâtir que la tradition avait conservés dans les pays qu'ils subjuguèrent : aussi voit-on dans le quinzième et le seizième siècle Léon-Batiste Alberti (1), Palladio, Scamozzi en Italie, et Philibert de Lorme en France, répéter, sur la fabrication du mortier, les prescriptions de Vitruve et de Pline. Le temps n'était point encore venu de perfectionner les anciens procédés par des expériences et des théories nouvelles.

Ce fut dans les parties septentrionales de l'Europe, où l'âpreté du climat soumet les constructions hydrauliques à des chances de destruction plus nombreuses, que l'on songea d'abord à substituer des matières indigènes à la pouzzolane d'Italie, qui ne pouvait y parvenir qu'à grands frais. Il y avait déja long-temps que les Hollandais l'avaient remplacée par le *trass d'Andernach*, qui, comme on sait, n'est autre chose qu'un tuf volcanique des bords du Rhin (2), réduit en poudre, lorsque, vers le milieu du dernier siècle, la difficulté d'obtenir cette substance à des prix modérés, et celle encore plus grande d'aller chercher la véritable pouzzolane jusqu'au pied du Vésuve, fit imaginer à un ingénieur sué-

---

(1) *Leonis Batistæ Alberti de Re ædificatoriâ*, lib. II.

(2) Ce tuf volcanique se trouve daus la petite vallée de Brohlbach, qui débouche dans le Rhin près du village de Brohl, département de Rhin-et-Moselle. (*Mémoire* sur les richesses minérales de ce département, par M. Calmelet. *Journal des mines*, tom. XXV, pag. 363.)

dois de remplacer par un produit artificiel ces deux productions volcaniques (1).

Instruit probablement par l'analyse chimique, et guidé par l'analogie, il calcina une espèce de schiste compacte qui se trouve abondamment auprès de Wesneborg, et, l'ayant pulvérisé, il en composa, avec une certaine proportion de chaux, un mortier dont le bon emploi dans les constructions hydrauliques qu'il dirigeait, justifia pleinement ses conjectures.

Cependant toute espèce de chaux est-elle également propre à la fabrication des mortiers hydrauliques, c'est-à-dire qui sont susceptibles de prendre corps et de s'endurcir sous l'eau? Ce fut encore en Suède que l'on s'occupa, pour la première fois, de résoudre cette question. On y connaissait dans le village de Léna, situé en Uplande, une pierre à chaux qui donnait cette propriété aux mortiers dans la confection desquels on la faisait entrer. Le célèbre Bergman l'ayant analysée, reconnut qu'elle contenait une petite quantité d'oxide de manganèse; et ce fut à la présence de cette substance dans la chaux de Léna, qu'il attribua la propriété caractéristique des mortiers qui en étaient composés. (2)

Quelque temps avant que les essais de Bergman l'eussent conduit à cette conclusion, J. Smeaton, un des plus habiles ingénieurs dont l'Angleterre puisse se glorifier, avait été

---

(1) M. Baggé de Gothembourg. *Voyez* les *Recherches sur la pouzzolane*, par M. Faujas de Saint-Fond, pag. 47-54.

(2) *Hæc præstantia (calcis Lenæ in Uplandiâ) potius magnesio quam inhærenti ferro adscribenda videtur, quum lapides calcarei magnesio spoliati, martialis tamen circiter æquali dosi contaminati ac Lenenses, nihilominus debiliorem porrigunt calcem.* (*Torberni Bergman opuscula*, tom. II, pag. 229.)

chargé de reconstruire le phare d'Edystone, situé sur un rocher à l'entrée de la Manche, à quatorze milles de la rade de Plymouth. Il savait, par une longue expérience, que la première condition à remplir pour assurer la solidité de cet édifice, consistait à n'y employer que des ciments de la meilleure qualité. Il faut lire dans les recherches expérimentales jointes à la description qu'il a publiée de ses hardis travaux (1), le détail de tous les soins qu'il prit pour reconnaître les substances les plus convenables à la fabrication des ciments, et les meilleures proportions de leurs mélanges.

L'usage ordinaire de ses devanciers était de composer leur mortier hydraulique de deux parties en volume de chaux éteinte, et d'une partie de trass de Hollande. Il reconnut que des boules faites de ce mortier avaient en effet la propriété de s'endurcir sous l'eau, mais que cette propriété se manifestait bien plus constamment lorsque le trass et la chaux étaient mélangés en parties égales. Il reconnut encore, qu'en quelques proportions que l'on combinât le sable ordinaire et la chaux, jamais on ne parvenait à en composer des mortiers qui résistassent à cette épreuve; et cela avait lieu, soit que la chaux provînt de craie friable, soit qu'elle provînt de marbre compacte.

Mais, entre ces deux pierres calcaires qui, par leurs caractères extérieurs, semblent former les deux termes extrêmes de la série dans laquelle sont comprises toutes les substances de cet ordre, il fallait s'assurer s'il n'en existait pas quel-

---

(1) *Narrative of the building, and a description of the Edystone-light-house, with stone, etc.* Un extrait de cet ouvrage a été inséré dans le second recueil de divers mémoires de la Bibliothèque des ponts-et-chaussées, par M. Lesage.

qu'une plus propre qu'aucune autre à la confection des mortiers hydrauliques : tel fut l'objet de la première recherche de Smeaton. Il avait entendu dire qu'on tirait d'Aberthaw, dans le comté de Clamorghan, une chaux qui avait la propriété de s'endurcir sous l'eau. Il se procura des échantillons de cette pierre; il les calcina lui-même, et remarqua que de bleuâtres qu'ils étaient, ils passaient à la couleur fauve par la calcination. Les mortiers qu'il en composa avec le trass s'endurcirent très-promptement sous l'eau, et leur dureté s'accrut à mesure qu'ils y restèrent plus long-temps.

Il s'agissait de savoir à quoi tenait cette propriété; mais Smeaton n'avait que peu ou point de connaissances chimiques. Un de ses amis auquel il eut recours lui enseigna à faire l'analyse des pierres à chaux qu'il voudrait éprouver. Il en réduisait en poudre grossière environ le poids d'une guinée; versant ensuite sur cette poudre de l'acide nitrique, il trouva que si elle était dissoute en entier, comme cela arrivait à la craie pure et au marbre, la chaux faite avec cette pierre ne jouissait point de la propriété cherchée; tandis qu'au contraire, si après la dissolution il restait un sédiment au fond du vase, la pierre était propre à faire de la chaux hydraulique; et c'était ce qui avait lieu pour la chaux d'Aberthaw. Quant à la nature de ce sédiment, la seule différence de pesanteur spécifique des matières qui le composaient, fit reconnaître qu'il était formé d'une certaine quantité de sable siliceux et d'une portion de glaise bleuâtre, qui, après avoir été séchée, se trouvait à-peu-près le huitième du poids total de la pierre. Ainsi la chaux d'Aberthaw contenait, après la calcination, une certaine quantité de sable quartzeux et d'argile : c'est à la présence de ces substances que Smeaton

attribue sa propriété de prendre corps et de durcir dans l'eau (1).

Nous avons cru devoir rapporter cette analyse, toute grossière qu'elle est, parce qu'elle peut être faite par-tout, et que par-tout l'on peut avoir besoin d'une chaux propre à former un bon mortier hydraulique. Smeaton crut remarquer, au surplus, que, pour jouir éminemment de cette propriété, il ne suffisait pas que la pierre contînt une certaine quantité de quartz et d'argile, il fallait encore qu'elle acquît la couleur fauve par sa calcination.

Nous voici conduits naturellement à faire entre les pierres à chaux une distinction que les anciens n'avaient point faite. Quelques-unes de ces pierres, susceptibles de se dissoudre en entier dans les acides, augmentent du double ou du triple de leur volume, lorsque après leur calcination on en forme une pâte avec l'eau; quelques autres, que les acides ne dissolvent qu'en partie, donnent une chaux dont le volume n'augmente que peu ou point à l'extinction : ce sont les *chaux grasses* et les *chaux maigres,* suivant leurs désignations vulgaires; et comme une quantité donnée de pâte de chaux doit, conformément aux règles pratiques de la fabrication du mortier, être mêlée avec le sable dans une proportion constante, on conçoit comment il est plus avantageux pour les constructeurs d'employer de la *chaux grasse* que de la *chaux maigre,* et comment, par cela même, l'usage de la première a dû se répandre généralement, tandis que la seconde a dû être rejetée comme étant de qualité inférieure.

---

(1) Deuxième recueil de divers mémoires extraits de la Bibliothèque de l'école des ponts-et-chaussées, par M. Lesage, pag. 91 et suiv.

Après avoir assigné, par ses propres essais, les caractères de la chaux hydraulique, il restait à Smeaton à rechercher s'il n'était pas possible de substituer au *trass* de Hollande, généralement usité en Angleterre, mais que l'on y achète à un assez haut prix, des substances moins chères et d'un aussi bon emploi. Les circonstances mirent à sa disposition un chargement de pouzzolane de Civita-Vecchia, dont il obtint des résultats très-satisfaisants. Le hasard lui procura aussi une pierre roulée qui avait l'apparence du grès, et qui, réduite en poudre après sa calcination, formait avec la *chaux maigre* un excellent mortier; mais il ne trouva nulle part les bancs de cette substance, sur laquelle nous reviendrons plus tard, et il n'en fit aucun usage (1).

Les bornes de ce rapport ne nous permettent pas d'exposer ici les résultats de toutes les observations de Smeaton; il en est une cependant que nous ne pouvons passer sous silence : c'est que la chaux maigre étant mélangée avec le sable ordinaire seul, peut former un mortier hydraulique presque d'aussi bonne qualité que celui que l'on composerait de chaux grasse et de pouzzolane. Cette observation conduisit Smeaton à faire entrer le sable pur dans ses mortiers. Il trouva qu'on en composait un excellent, en corroyant ensemble deux parties en volume de chaux maigre éteinte, une de *trass* ou de pouzzolane, et trois de sable pur; ce qui donne environ trois mesures et demie de mortier hydraulique. Néanmoins, soit par conviction, soit par condescendance pour les préjugés des constructeurs, ce qui est très-vraisemblable, il s'en

---

(1) Deuxième recueil de divers mémoires extraits de la Bibliothèque de l'école des ponts-et-chaussées, par M. Lesage, pag. 102.

tint, dans ses ouvrages du phare d'Edystone, à l'emploi d'un mortier composé de deux parties de chaux et de deux parties de pouzzolane d'Italie. (1)

Ce n'était pas seulement en Suède et en Angleterre, que l'attention s'était fixée sur la meilleure composition des ciments calcaires; on commençait aussi vers le même temps à s'en occuper en France. Mais, comme il n'y fut point question d'abord de mortiers hydrauliques, on fut dirigé, dans les tentatives auxquelles on se livra, par des considérations différentes de celles dont nous venons de rendre compte.

On avait été frappé depuis long-temps de la dureté que présentent les mortiers retirés des anciennes constructions romaines; on crut devoir en rechercher la cause dans les procédés qu'ils employaient, et retrouver ces procédés dans un passage de Pline que l'on détourna de son véritable sens, et auquel on donna une fausse interprétation. (2)

Le sieur Loriot, mécanicien et pensionnaire du roi, crut être parvenu à en expliquer le véritable sens. Il publia, en 1775, un mémoire (3) dont l'objet était de prouver que l'ancien procédé du mortier romain se réduisait à ajouter au mortier ordinaire de sable et de chaux éteinte un quart de chaux vive réduite en poudre très-fine. Ces expériences furent répétées par plusieurs personnes, et notamment à Dijon par

---

(1) Deuxième recueil de divers mémoires extraits de la Bibliothèque de l'école des ponts-et-chaussées, par M. Lesage, pag. 102-104.

(2) Ce passage est celui déja cité : *Ruinarum urbis ea maximè causa quod, furto calcis, sine ferrumine suo cæmenta componuntur.*

(3) *Journal de physique*, tom. III, pag 231.

M. Guyton de Morveau, qui, dans une instruction spéciale, proposa de calciner la chaux une seconde fois, avant de la mêler au mortier, pour prévenir les accidents qui pouvaient résulter, pour les ouvriers, de sa pulvérisation. Il attestait en même temps l'excellence de ce procédé par les résultats avantageux qu'il en avait lui-même obtenus. (1)

Nous avons dit que le passage de Pline sur lequel on appuyait l'authenticité de la découverte, se prêtait à plusieurs interprétations; on ne tarda pas à lui trouver un autre sens que celui qu'on lui avait d'abord supposé.

Deux ans après la publication du procédé de Loriot, parurent en effet les recherches de M. de la Faye sur la préparation que les Romains donnaient à la chaux, et sur la composition de leurs mortiers (2). L'auteur prétendit qu'il fallait uniquement en attribuer la dureté à la manière d'éteindre la chaux, qu'il annonçait avoir retrouvée : elle consistait, selon lui, à immerger un panier d'osier rempli de chaux vive réduite en morceaux de la grosseur d'un œuf; à tenir cette matière ainsi submergée jusqu'à ce que l'eau commençât à bouillonner au-dessus. On devait alors la retirer, la laisser égoutter quelques instants dans le panier, et la verser ensuite dans des tonneaux où elle s'échauffait et se réduisait en poudre après un certain temps. C'est dans cet état qu'il prescrivait d'en faire usage. Que ce procédé soit ou non celui des Romains, il est constant, d'après le témoignage de Guyton, qui

---

(1) *Journal de physique*, tom. IV, pag. 418. *Ibid.* tom. VI, pag. 311.

(2) *Recherches* sur la préparation que les Romains donnaient à la chaux. (Paris, 1777.) *Mémoire* pour servir de suite aux *Recherches* précédentes. (Paris, 1778.)

annoncé en avoir fait l'épreuve pour la construction d'un aquéduc souterrain, que l'on peut, dans certaines circonstances, en obtenir des résultats satisfaisants. (1)

En rappelant le passage de Vitruve sur la composition des mortiers, nous n'avons pas cru devoir exposer l'explication qu'il donne de l'endurcissement de ces préparations. Ce phénomène est d'un ordre auquel la physique des anciens ne pouvait s'élever ; nous n'avons été mis sur la voie d'y parvenir, que par les découvertes des chimistes modernes.

Les expériences de Joseph Black, professeur de chimie à Édimbourg, venaient d'apprendre qu'il existait dans la pierre calcaire une quantité considérable d'une substance acriforme, qu'on a appelée depuis *gaz acide carbonique,* laquelle en était enlevée par l'acte de la calcination ; un des principaux effets de cette opération étant d'ailleurs de détruire la consistance primitive de la pierre qu'on y avait soumise, et de la rendre soluble dans l'eau.

Un autre professeur de chimie en Angleterre, le docteur Hyggins entreprit, au commencement de 1775, de rechercher si l'endurcissement des mortiers ne provenait pas de ce que la chaux en pâte employée dans leur fabrication se combinait plus ou moins rapidement avec le gaz acide carbonique de l'atmosphère, et revenait ainsi à l'état de pierre calcaire ordinaire. C'est en ce point de doctrine que consiste la théorie développée par le docteur Hyggins dans un traité spécial (2) publié à Londres en 1780. Ce travail, l'un des plus

(1) *Annales de chimie*, tom. XXXVII.

(2) *Experiments and observations made with the view of improving the art of composing and applying calcareous ciments*, etc.; by Bry. Hyggins, d. m. (London, 1780.)

étendus auquel cette matière ait donné lieu, contient une nombreuse série d'expériences.

L'auteur, après avoir fait voir que la chaux est d'autant meilleure qu'elle a perdu plus complétement par la calcination le gaz acide carbonique qui la constitue dans la carrière à l'état de pierre calcaire, s'attache à prouver, par des observations très-curieuses, que la chaux vive exposée à l'air libre tend à s'emparer très-promptement du gaz acide carbonique répandu dans l'atmosphère, et qu'après avoir été altérée par cette nouvelle combinaison, elle ne convient plus à la fabrication de mortiers d'aussi bonne qualité qu'auparavant; il prescrit, par cette raison, d'employer la chaux le plus tôt possible après sa sortie du four, et le mortier aussitôt après sa fabrication (1). Il remarqua que des mortiers qui se desséchaient trop vîte n'acquéraient aucune consistance. Observant ensuite que les molécules de sable quartzeux que l'on fait entrer dans leur composition, sont les parties les plus dures de ces préparations, il pense qu'elles doivent acquérir d'autant plus de solidité, que les petites lames de chaux interposées entre les grains de sable ont moins d'épaisseur; il cite, à ce sujet, des faits d'où il résulte qu'un mortier composé de sept parties de sable, et seulement d'une partie de chaux éteinte, a pris consistance plus promptement que celui dans lequel la chaux était entrée en plus grande proportion (2). A l'appui de ces observations, le docteur Hyggins affirme avoir reconnu, par l'analyse de ciments tirés

(1) *Experiments and observations made with the view of improving the art, etc.*, sect. V, pag. 29 et suiv.

(2) *Ibid.* sect. VIII, pag. 51.

d'édifices antiques, que les anciens avaient adopté cette proportion de un à sept dans la fabrication de leurs mortiers de chaux et sable. (1)

Il conclut, de diverses expériences qu'il cite, qu'en se combinant avec la proportion d'acide carbonique nécessaire pour lui donner le degré de dureté qu'elle est susceptible d'acquérir, la chaux des mortiers augmente des trois cinquièmes de son poids. (2)

Quelque curieux que paraissent les résultats des expériences de Hyggins sur l'endurcissement de la chaux des mortiers, les résultats de celles qu'il fit sur les sables qui entrent dans leur composition, ne le sont pas moins. Il les distingua en trois classes, par la grosseur de leurs grains; il reconnut que, plus elle est considérable, plus les vides interposés sont spacieux. Il observa que le sable abreuvé d'eau occupe un volume d'environ un septième moins considérable que celui qu'il occupait avant d'être mouillé (3), effet qui, dépendant tout-à-la-fois de la grosseur et de la figure des molécules de sable, s'explique naturellement par la capillarité des intervalles qui les séparent. Il reconnut aussi, que si l'on mélangeait parties égales de sable grossier et de sable fin, il se manifestait une diminution de volume dans ce mélange, c'est-à-dire, par exemple, que neuf parties de sable grossier et neuf parties de sable fin étant mêlées ensemble, ne formeraient pas un volume de dix-huit, mais seulement de seize parties et un huitième. Enfin, appliquant l'observation de ces faits à la fabrication du mortier, il trouva que le meilleur était

---

(1) *Experiments and observations made with the view, etc.*, sect. X, p. 60.
(2) *Ibid.*, sect. XI, pag. 69. (3) *Ibid.*, sect. XII, pag. 18.

composé de quatre parties de gros sable, de trois parties de sable fin, et d'un peu plus d'une partie de chaux. (1)

Nous ne suivrons point le docteur Hyggins dans les détails qu'il donne de ses essais, pour reconnaître l'influence de différentes substances incorporées dans le mortier calcaire, telles que l'argile crue, le plâtre en poudre, quelques oxides métalliques, le soufre, les cendres de bois ou de charbon de terre, les cendres d'os pulvérisés, etc. : il nous suffira de dire qu'il termine son mémoire par l'indication d'un mortier particulier, pour l'emploi duquel il avait obtenu une patente. Son procédé consiste à laver d'abord dans une eau courante le sable dont on doit se servir ; il faut ensuite le faire passer dans deux cribles dont les mailles ont différentes grandeurs, afin de pouvoir séparer ce qu'il appelle le gros sable et le sable fin ; les faire sécher au soleil, et les mélanger ensuite dans la proportion de cinquante-six parties en poids du premier contre quarante-deux parties du second. Il prescrit d'en former sur un plancher un monceau que l'on arrose avec de l'eau tenant en dissolution une demi-once de chaux par pinte, jusqu'à ce que, par l'écoulement de l'eau surabondante à celle que retiennent entre eux les grains de sable, on s'aperçoive que l'action capillaire cesse de s'exercer. On ajoute à ce mélange de sable quatorze parties en poids de chaux éteinte par aspersion, et autant de cendres d'os calcinés à blanc ; on corroie ce mortier à la manière ordinaire. Le docteur Hyggins recommande de le mettre en œuvre aussitôt après qu'il est fabriqué, et l'indique comme essentiellement

---

(1) *Experiments and observations made with the view of improving the art of composing*, etc., sect. XII, pag. 93.

propre à former des enduits homogènes et prompts à s'endurcir. (1)

Nous nous sommes arrêtés quelques instans sur l'ouvrage du docteur Hyggins, parce qu'il entre dans l'objet de ce rapport de faire remarquer les faits qu'il contient, et que nous aurons occasion de revenir sur la théorie qui y est présentée; nous devons dire cependant que si le chimiste anglais l'a adoptée le premier, en 1775, dans les leçons qu'il donnait, il ne l'a publiée qu'en 1780; ce qui laisse à M. Achard de Berlin la priorité de publication d'une théorie analogue.

On lit, en effet, dans le Journal de physique du mois de janvier 1778, une lettre de ce chimiste, où l'on trouve la description d'un appareil à l'aide duquel il obtint de la combinaison de l'acide carbonique avec la chaux dissoute dans l'eau, et par une évaporation lente de cette dissolution, des cristaux très-durs de carbonate de chaux (2). Ce fait induisit M. Faujas de Saint-Fond à attribuer l'endurcissement des mortiers calcaires à la combinaison, par l'intermède de l'eau, de la chaux éteinte avec l'acide carbonique que la calcination n'en a pas entièrement enlevé.

L'écrit de M. Faujas où nous avons trouvé cette idée consignée, est de 1778. Il a pour objet spécial de prouver que les pouzzolanes du Vivarais et des autres contrées volcaniques de la France, peuvent être substituées à la pouzzolane

(1) *Experiments and observations made with the view of improving the art of composing*, *etc.*, sect. XXIII, pag. 184 et suiv.

(2) Copie d'une lettre de M. Achard, chimiste de l'académie de Berlin, etc., contenant la découverte qu'il a faite sur la formation des cristaux et des pierres précieuses. (*Journal de physique*, janvier 1778, pag. 12.)

d'Italie. Des expériences sur ces matières furent entreprises à Toulon, avec une sorte d'appareil, en 1777. M. Faujas rapporte le procès-verbal de l'immersion qui y fut faite de trois caisses de béton composé de douze parties de pouzzolane du Vivarais, de six parties de gros sable, de neuf parties de chaux vive, et de seize parties de pierrailles; les commissaires annoncent, dans ce procès-verbal, que ce béton, immédiatement après sa fabrication, se rapprochait parfaitement de celui composé avec des pouzzolanes de Naples; mais, comme on ne trouve, ni dans l'ouvrage que nous venons de citer, ni dans celui qui fut publié en 1782 pour lui servir de supplément (1), le procès-verbal de l'état de dureté ou de mollesse auquel ces bétons étaient parvenus lorsqu'ils furent retirés de la mer, les expériences que nous venons de rappeler ne fournissent aucune conclusion dont on puisse s'appuyer pour ou contre l'emploi des pouzzolanes que M. Faujas recommandait.

Ce savant n'en a pas moins le mérite d'avoir attiré l'attention publique sur la possibilité de remplacer en France la pouzzolane d'Italie par d'autres substances d'un prix moins élevé. Ses tentatives offraient alors d'autant plus d'intérêt, que les travaux de nos ports, qui prirent alors une grande activité, exigeaient plus spécialement l'emploi de mortiers hydrauliques. Il paraît qu'à l'occasion de ceux de Cherbourg, M. Guyton de Morveau adressa à M. Cessart, inspecteur-général des ponts-et-chaussées, qui les dirigeait, un échantillon de ba-

---

(1) *Mémoire* sur la manière de reconnaître les différentes espèces de pouzzolane, et de les employer dans les constructions; par M. Faujas de Saint-Fond. (Paris, 1780.)

salte provenant d'un volcan éteint du département de Saône-et-Loire (1). Cette substance, après avoir été calcinée, réduite en poudre et substituée à la pouzzolane d'Italie dans la fabrication du béton, donne, suivant le témoignage de cet ingénieur, un mortier d'une consistance à-peu-près égale, après quelques mois d'immersion.

Personne n'était plus convaincu que M. Guyton, des avantages que la chimie pouvait fournir à l'art de bâtir; c'est, du moins, ce qu'il est permis de conclure de l'empressement avec lequel il a saisi toutes les occasions d'appliquer cette science au perfectionnement des mortiers. Aussitôt qu'il eut connu l'analyse de la chaux de Léna, dont Bergman lui avait envoyé des échantillons, il soumit aux mêmes essais, en 1783, six espèces de chaux maigres de l'ancienne province de Bourgogne. Deux de ces pierres, celle de Brion, dans le département de Saône-et-Loire, et celle de Morex, dans le pays de Gex, prirent, à la calcination, la couleur brune qui y décèle la présence du manganèse, et soutinrent la comparaison de celle de Léna dans les expériences auxquelles elles furent soumises (2). Ce fut à la suite de ce travail, que Guyton imagina de suppléer à ces pierres, dans les lieux où elles manquent, en mêlant ensemble quatre parties d'argile grise, six parties d'oxide noir de manganèse, à quatre-vingt-dix parties de bonne pierre à chaux réduite en poudre.

Quatre ans après la publication de ces expériences de Guy-

(1) *Mémoire* sur les mortiers, la chaux maigre, le béton et la pouzzolane; par M. Guyton. (*Annales de chimie*, tom. XXXVII.)

(2) *Mémoire* sur la chaux maigre de Brion en Bourgogne, etc. (Second semestre des Mémoires de l'*Académie de Dijon* pour 1783, pag. 70.)

ton sur les chaux maigres, parut, en 1787, un mémoire de M. Chaptal, ayant pour objet de faire connaître les avantages qu'on peut retirer des terres ocreuses, et notamment d'exposer les moyens d'en former des pouzzolanes artificielles (1). La troisième partie de ce mémoire contient le récit d'expériences d'où il résulte que l'on peut convertir en pouzzolanes, par la seule calcination, dans un fourneau approprié, 1° les terres ou ocres vierges connus généralement dans le Languedoc sous le nom de *terres bolaires*; 2° les terres bolaires jaunes, qui passent au rouge par la calcination; 3° les schistes noirâtres. M. Chaptal indique différents procédés de calcination, suivant qu'on alimente le feu du fourneau avec du charbon de terre ou du bois. On essaya deux à trois mille quintaux de ces ocres; et l'exposé des expériences comparatives qui en furent faites, avec la pouzzolane d'Italie et celle provenant des anciens volcans du Vivarais, terminent cet important travail.

Les premières furent commencées aux mois de mai et de juin 1785. Des mélanges formés d'une mesure de pouzzolane, de deux mesures de chaux éteinte, et d'une mesure de recoupes de pierre, furent immergés pendant trois mois dans un bassin. Le béton composé avec la pouzzolane artificielle acquit en peu de temps un degré de consistance presque égal à celui du béton composé avec la pouzzolane d'Italie (2). Il suffisait de cette première expérience, pour prévoir que l'on pourrait tirer parti de ces terres calcaires dans les constructions hydrau-

(1) *Observations* sur quelques avantages qu'on peut retirer des terres ocreuses, avec les moyens de les convertir en brun rouge, et d'en former des pouzzolanes, etc.; par M. Chaptal. (Paris, 1787.)

(2) *Observations* sur quelques avantages, etc., pag. 17 et suiv.

liques. Il en fut remis, en conséquence, aux commissaires des travaux publics de la province de Languedoc, pour en faire, au port de Cette, des essais comparatifs avec les pouzzolanes d'Italie et du Vivarais. Six caisses de béton composé d'une partie et demie de chaux éteinte, d'une partie et demie de pierrailles, et de deux parties de pouzzolane d'Italie et du Vivarais, furent mises à la mer avec précaution le 25 avril 1786, et observées de huit jours en huit jours jusqu'au 25 octobre de la même année, époque à laquelle on reconnut, suivant le procès-verbal qu'on avait dressé de ces observations hebdomadaires, que les pouzzolanes artificielles fabriquées dans la province, équivalaient, par la dureté du béton qu'on en avait composé, à celles tirées de l'étranger; avantage que semblaient ne pas présenter les pouzzolanes naturelles du Vivarais. (2)

M. Chaptal recommande, en terminant son mémoire, d'employer la chaux fraîchement éteinte par le procédé de la Faye; mais il n'y est pas dit de quelle nature était la chaux dont on fit usage. On y voit seulement, par l'analyse des diverses substances qui avaient été mises à des épreuves comparatives, que la nature et les proportions de leurs parties constituantes rapprochent les terres ocreuses du Languedoc beaucoup plus des pouzzolanes actuelles de l'Italie, que ne s'en rapprochent celles provenant de nos anciens volcans.

Pendant que M. Chaptal s'occupait à Montpellier de trouver, dans l'emploi des matières naturelles à notre sol, le moyen de nous affranchir du tribut payé à l'étranger pour les pouzzolanes employées jusques alors dans la fabrication des

(1) *Observations* sur quelques avantages, etc., pag. 29.

mortiers hydrauliques, M. Rondelet, architecte de l'église Sainte-Geneviève, faisait à Paris des expériences nombreuses sur les mortiers employés à l'air dans les travaux d'architecture civile (1) : il n'est point de notre sujet d'entrer dans le détail de toutes ses expériences ; nous dirons seulement qu'il en résulte en général que le mortier de sable fossile est meilleur que celui de sable de rivière fait dans les mêmes proportions; que la massivation ou battage du mortier, quand il est employé en enduit, lui fait toujours acquérir une plus grande dureté. Enfin, ayant soumis à l'épreuve d'une machine de pression des briques de différentes préparations composées de chaux mêlée avec du sable, du tuileau concassé, et des pouzzolanes d'Italie, du Vivarais et d'Écosse, M. Rondelet reconnut que tous ces mortiers offraient différents degrés de résistance à leur écrasement. Il trouva aussi que, dans un intervalle de quinze ans, c'est-à-dire depuis 1787 jusqu'en 1802, tous avaient acquis de la dureté, mais suivant des loìs différentes; de sorte, par exemple, que la dureté du mortier de pouzzolane de Naples avait augmenté d'un tiers, tandis que celle du mortier de pouzzolane d'Écosse n'avait augmenté que d'un cent-quatre-vingtième. Il est à remarquer, au surplus, que ce dernier est celui de tous dont la consistance, immédiatement après sa confection, avait été trouvée la plus considérable. Ainsi, en 1787, sa résistance à l'écrasement était, à la résistance du mortier ordinaire de chaux et de sable, dans le rapport de 396 à 255, et en 1802, dans le rapport de 398 à 286.

---

(1) *Traité théorique et pratique de l'art de bâtir*, par J. Rondelet. (Tom. Ier, première livraison, 1803.)

M. Rondelet entreprit encore de déterminer la cohérence du mortier de chaux et de sable fin, avec des pierres de différentes espèces et des briques et tuileaux (1). Il reconnut que, six mois après avoir scellé l'une à l'autre avec du mortier, des surfaces dont chacune était un quarré de 6 centimètres de côté environ, il fallait employer, pour détacher deux pierres de liais, un effort de 31 kilogrammes; tandis que, pour détacher deux tuiles de Bourgogne, il fallait en employer un de 69 : l'adhérence du mortier avec les diverses pierres de taille tirées des carrières de Paris, et même avec la meulière, étaient entre ces deux limites. (2)

Guyton fit en 1800, sur les mortiers, la chaux maigre, les bétons et les pouzzolanes, de nouvelles recherches qui sont insérées dans le 37e volume des Annales de chimie. L'analyse de la chaux maigre de Metz, rapportée dans ce Mémoire, indiqua qu'elle contenait trois et demi pour cent d'oxide de manganèse. Guyton, qui d'abord avait embrass l'opinion de Bergman sur l'influence de cet oxide, alors disposé à croire qu'une quantité notable de si d'alumine était nécessaire à la production du ph caractéristique de la chaux maigre; il cite même l'opinion de Saussure qui, dès 1786, avait a pierre calcaire de Chamouni pouvait être cor de cette espèce, quoiqu'elle ne contienne manganèse. (3)

(1) *Traité théorique et pratique de l'art*

(2) *Ibid.*, pag. 310 et 311.

(3) *Voyage dans les Alpes*, par M
et suiv.

Ce fut à-peu-près à la même époque qu'un Anglais fit connaître sur la côte de Boulogne une espèce de caillou roulé, lequel, après sa calcination dans un four à chaux ordinaire, étant réduit en poudre fine, et gâché avec de l'eau, à la manière du plâtre, manifeste la propriété de faire corps très-promptement, et de s'endurcir sous l'eau, sans avoir besoin d'être mélangé avec aucune autre matière. Un rapport fait à la Société d'agriculture de Boulogne le 1[er] floréal an X, et inséré dans le 12[e] volume du Journal des mines, indique avec beaucoup de détails les procédés à suivre pour la cuisson de cette pierre, pour sa trituration et pour son emploi; elle y est désignée sous le nom de *plâtre-ciment,* et sa propriété de prendre corps sous l'eau est attribuée, suivant l'opinion de Bergman, à la présence du manganèse. Cependant M. Drapier, élève des mines, n'y reconnut point cette substance, mais il trouva qu'elle contenait sept pour cent d'oxide de fer; et, comme la chaux y existe en beaucoup plus grande proportion que les autres substances, il en conclut que le *plâtre-ciment,* qui probablement est la même matière que Smeaton avait trouvée à l'état de caillou roulé, sans avoir pu en découvrir le gîte, doit se ranger naturellement parmi les pierres calcaires propres à former de la chaux maigre.

On doit à M. Gratien Le Père, ingénieur des ponts-et-chaussées, employé au port de Cherbourg en l'an XII, une suite assez nombreuse d'expériences entreprises comme celles de M. l'ingénieur suédois Baggé, dans la vue de substituer à la pouzzolane d'Italie les produits de la calcination de certaines espèces de schistes (1). Parmi ceux que M. Gratien Le

(1) *Recueil* des rapports et observations sur les expériences faites à Cher-

Père mit à l'épreuve, le schiste d'Haineville lui procura les résultats les plus satisfaisants; il en forma, avec la chaux maigre de Grasville et des blocailles de granit, un béton qui, plongé dans l'eau de mer pendant plusieurs mois, y acquérait une dureté presque égale à celle du béton composé de pouzzolane d'Italie. Mais, ce qui est remarquable, c'est que cet endurcissement des bétons composés de schistes calcinés, ne se manifestait pas lorsque l'on employait de la chaux grasse dans leur confection.

L'analyse du schiste d'Haineville faite par M. Collet-Descotils, indique qu'il contient à-peu-près la même quantité de silice et de chaux que la pouzzolane d'Italie; mais l'alumine de celle-ci est remplacée dans le schiste par cinquante-sept centièmes d'oxide de fer : il contient aussi quatre centièmes de manganèse.

M. Gratien Le Père a ajouté à son mémoire un tableau des analyses comparatives de deux espèces de pouzzolanes d'Italie, des pouzzolanes grises et rouges du Vivarais, des terres ocreuses du Languedoc, des schistes de Cherbourg et d'Haineville, du trass d'Andernach, de la cendrée ou ciment d'Amsterdam, enfin de la pierre de Boulogne (1). En jetant les yeux sur ce tableau, on reconnaît que toutes ces substances contiennent, en différentes proportions, de la silice et de l'alumine; que l'on trouve, en outre, dans quelques-unes, de l'oxide de fer, dans quelques autres de l'oxide de manga-

---

bourg pour remplacer la pouzzolane dans les constructions hydrauliques; par M. Gratien Le Père, ingénieur des ponts-et-chaussées. (2e édition; Paris 1805.)

(1) *Recueil* des rapports et observations, etc., pag. 26.

nèse; enfin que le plâtre-ciment de Boulogne, faisant une sorte d'exception à cette série de substances, contient une quantité de chaux qui n'est pas moindre que les trois cinquièmes de son poids.

La publicité que M. Gratien Le Père donna à ses expériences, et le rapport avantageux qui en fut fait à la Société d'encouragement pour l'industrie nationale, déterminèrent M. le directeur-général des ponts-et-chaussées à les faire répéter par cet ingénieur sous les yeux d'une commission dont M. Guyton était le président (1). Le procès-verbal des résultats de ces nouvelles épreuves, que l'on suivit à Paris et au Hâvre, depuis l'automne de 1806 jusqu'au printemps de 1807, prouvent qu'après trois mois d'immersion, les bétons faits de chaux de Grasville et de schistes calcinés des environs de Cherbourg, avaient acquis à-très-peu-près autant de dureté que ceux fabriqués avec la pouzzolane d'Italie ou le trass de Hollande; et que si la comparaison qui en fut faite présentait quelque différence, il fallait l'attribuer au mode de calcination que l'on avait adopté, et que des expériences répétées auraient appris à perfectionner.

Quelque jugement que l'on ait porté, dans le temps, des expériences de M. Gratien Le Père, on ne peut trop louer le zèle et la persévérance avec lesquels il s'y livra. Elles eurent encore l'avantage d'exciter l'attention et de provoquer de nouveaux essais : dès le mois d'août 1806, on fit à Rouen l'épreuve de bétons composés de chaux maigre de la côte Sainte-Catherine, et de terres ocreuses calcinées suivant les

(1) *Deuxième Recueil* de divers Mémoires sur les pouzzolanes naturelles et artificielles; par M. Gratien Le Père. (Paris, 1807.)

procédés de M. Chaptal ; on y fit entrer douze parties de ces terres, six parties de sable quartzeux, neuf parties de chaux maigre, et seize parties de moëllon dur et de silex concassé. Ils furent immergés dans la Seine le 15 septembre 1807. On ne les en retira que le 14 août suivant, et ils furent trouvés presque aussi durs que des bétons de pouzzolanes d'Italie que l'on avait soumis à la même épreuve. (1)

M. Sage lut à l'Institut, le 17 octobre 1808, un Mémoire sur les mortiers et ciments. Il eut pour objet de faire connaître, par une suite d'expériences, le degré de consistance qu'acquièrent avec la chaux différentes matières tirées des trois règnes.

Parmi les faits qu'il rapporte, celui qui paraît le plus digne d'être remarqué est l'endurcissement d'un mélange de deux parties de chaux éteinte, et de trois parties de craie réduite en poudre à tel point que ce mélange devient susceptible de recevoir le poli. (2)

Nous ne devons point passer sous silence un Mémoire sur l'origine et la nature des mortiers, publié en 1808 par M. Daudin, ingénieur en chef des ponts-et-chaussées, deux ans après la publication des recherches de M. Chaptal sur les terres ocreuses. Cet ingénieur, qui était alors employé au canal du Midi, s'occupa, sur les pouzzolanes naturelles ou factices, d'un premier travail auquel son dernier Mémoire se rattache : celui-ci contient l'exposé des faits principaux que nous avons cru devoir rappeler ; l'auteur s'y plaint de l'usage, malheureusement trop général, d'abandonner la fabrication des

(1) *Deuxième Recueil* de divers Mémoires, etc., pag. 46 et suiv.

(2) *Des mortiers ou ciments*, par M. Sage. (1809, pag. 20.)

mortiers à la routine d'ouvriers insouciants. Ces plaintes, et les vues qu'il propose pour remédier à l'abus qui les provoque, sont d'un ingénieur expérimenté. (1)

Nous ne parlerons ni des procédés indiqués pour la fabrication des mortiers par différents auteurs d'ouvrages d'architecture, qui n'ont pas fait eux-mêmes d'expériences, ni des méthodes particulières données par quelques autres comme des recettes empiriques; ce serait nous écarter du but de ce rapport.

Mais il entre dans son objet de revenir sur un point important relatif à la chaux maigre.

Nous avons dit que le peu d'avantage que présente son emploi aux entrepreneurs de bâtiments dans les constructions civiles, en avait jusqu'à-présent restreint l'usage à de très-petites constructions hydrauliques, regardées en quelque sorte comme des objets de pure curiosité. Ainsi les chaufourniers n'ont apporté aucun intérêt à préparer une matière qui ne leur eût fourni qu'une chaux d'un débit incertain. La seule chaux maigre que l'on connaisse à Paris et dans les départements voisins, est fabriquée avec la pierre de Senonches, bourg situé dans le département d'Eure-et-Loir, entre Dreux et Verneuil. M. Vitalis, professeur de chimie à Rouen, en fit l'analyse à l'occasion des expériences dont nous avons rendu compte (2). Il s'agissait de la comparer avec celle provenant de la côte de Sainte-Catherine. Cette analyse prouva que ces deux espèces de chaux avaient les mêmes parties constituantes, mais que le manganèse ne s'y rencon-

---

(1) *Réflexions sur l'origine et la nature des mortiers*, par M. Daudin, ingénieur en chef des ponts-et-chaussées. (Au Mans, 1808.)

(2) *Deuxième Recueil* des Mémoires de M. Gratien Le Père, pag. 49.

trait point ; ce qui infirme l'opinion de Bergman et de Guyton, et vient appuyer ce que Saussure avait avancé à l'occasion de la chaux maigre de Chamouni. Cet examen chimique de la chaux de Senonches fut confirmé en 1813 par Collet-Descotils, chimiste habile, trop tôt enlevé à ses amis et aux sciences. La courte notice qu'il en a publiée dans le *Journal des mines*, est extrêmement importante (1). Il y remarque que l'analyse d'une chaux grasse des environs de Nemours ne présente que de la chaux pure et de l'acide carbonique, tandis que la pierre calcaire de Senonches fournit, indépendamment de ces deux substances, un quart de silice extrêmement fine, avec une très-petite proportion de magnésie, d'alumine et de fer. « Cette silice, dit-il, qui n'est point attaquée « lorsqu'on dissout dans les acides la pierre calcaire de Se- « nonches, se dissout presque en entier lorsque l'on soumet « à leur action la chaux fabriquée avec cette même pierre. La « silice doit se trouver, par conséquent, dans la chaux de « Senonches, à un état qui la rend propre à éprouver l'ac- « tion des agents chimiques ; et il est très-probable qu'elle « contracte, par l'addition de l'eau, une union qui doit être « moins attaquable que la chaux seule par l'action de l'atmo- « sphère ou de l'eau. La forte proportion de silice explique « d'ailleurs pourquoi la chaux maigre foisonne moins que la « chaux grasse. »

« D'après ce qui vient d'être exposé, continue Descotils, « il paraît très-vraisemblable que la condition essentielle « pour qu'une pierre calcaire fournisse de bonne chaux mai-

(1) *Sur la chaux maigre*, par M. Collet Descotils, ingénieur en chef des mines. (*Journal des mines*, tom. XXXIV, pag. 308.)

« gre, est qu'elle contienne une grande quantité de matière « siliceuse disséminée en particules très-fines : car il semble « peu probable que les très-faibles proportions d'alumine, « de magnésie, et d'oxide de fer, qui peuvent s'y trouver, « aient une influence très-notable sur ses propriétés. »

Nous terminons ici la tâche que nous nous étions imposée de rappeler à l'Académie les travaux de tous ceux qui, sous un point de vue quelconque, se sont occupés du même objet que celui du Mémoire dont il nous reste à rendre compte. En résumant ce que nous avons dit, on voit que toutes les recherches faites jusqu'à-présent sur les mortiers hydrauliques, portent, ou sur l'espèce de chaux que l'on doit employer dans leur fabrication, et la manière d'y suppléer, ou sur la substitution de quelques matières indigènes aux pouzzolanes étrangères; ou bien enfin sur les causes de l'endurcissement plus ou moins rapide de ces préparations, soit à l'air libre, soit pendant leur immersion sous les eaux. M. Vicat s'est proposé de résoudre ces diverses questions; l'Académie va juger jusqu'à quel point il s'est approché du but qu'il s'était proposé d'atteindre.

Le travail de cet ingénieur est divisé en trois sections : la première, qui traite de *la chaux*, comprend elle-même plusieurs chapitres dans lesquels l'auteur s'occupe successivement des différentes espèces de chaux de construction, des pierres qui la fournissent, de l'action que le feu exerce sur elles, des procédés divers d'éteindre la chaux vive, et des phénomènes qui en résultent; enfin de la combinaison de l'eau avec la chaux, et de l'influence de ce liquide et de l'air atmosphérique sur ces hydrates. Nous allons entrer dans quelques détails sur les divers objets que nous venons d'indiquer.

L'auteur distingue d'abord les deux espèces de chaux dont nous avons déja parlé; celle appelée *chaux grasse*, et celle qui, connue sous le nom de *chaux maigre*, a la propriété de prendre corps sous l'eau, et d'être par là essentiellement propre aux constructions hydrauliques.

La première, submergée sous un volume d'eau surabondant, en absorbe, pour s'éteindre, de deux fois et demie à trois fois et demie son poids; la seconde, placée dans la même circonstance, n'absorbe guère, pour son extinction, que la moitié moins d'eau.

La chaux maigre, réduite en bouillie liquide, et immergée ensuite, rejette une partie de l'eau qu'elle contient : elle en absorbe, au contraire, une nouvelle quantité, si, au lieu d'être réduite en bouillie liquide, on l'a amenée, par l'extinction, à l'état de pâte ferme. « Il existe donc, dit l'auteur, « entre ces deux extrêmes, un degré moyen de consistance « pâteuse dans lequel il n'y a ni rejet, ni absorption d'eau: « ainsi les principes qui constituent les chaux *maigres* ou *hy-* « *drauliques*, tendent à s'unir chimiquement par l'intermède « d'une quantité déterminée d'eau qui passe à l'état solide; « elles n'ont pas besoin, par conséquent, pour durcir, du « contact de l'air, et de la dessication qui en est la suite.

« Les chaux communes ou *grasses*, saisissant, au contraire, « dans les mêmes circonstances, beaucoup plus d'eau qu'elles « n'en peuvent solidifier, et n'ayant point la faculté de rejeter « celle qui leur est superflue, restent constamment à l'état de « pâte molle, non-seulement sous l'eau, mais encore dans les « bassins imperméables où on les a tenues couvertes de terre « ou de sable. »

L'auteur, après l'indication de ces caractères essentiels, observe que les qualités de la chaux changent non-seulement d'un canton à l'autre, mais encore dans la même carrière; il rappelle les opinions de Bergman et de Guyton sur l'influence du manganèse; celle de Saussure sur l'influence de la silice et de l'alumine; enfin celle de Descotils sur l'influence de la silice seulement, pour donner à la chaux la qualité de *chaux maigre*. Il observe que si la pierre de Senonches contient un quart de silice, celle de Metz, qui lui est supérieure en qualité, n'en contient guère qu'un vingtième; d'où il conclut qu'il reste encore quelque incertitude sur les meilleures proportions de la silice et de l'alumine dans la formation de la chaux maigre. Il annonce, au surplus, s'être assuré, par des essais multipliés, que la présence des oxides de fer et de manganèse n'est point indispensable.

Puisque l'on connaît les substances que les chaux maigres présentent à l'analyse, ne serait-il pas possible d'en former artificiellement? L'auteur s'est d'abord proposé cette question importante; et, n'étant point satisfait des procédés qui avaient été indiqués par Guyton, comme nous l'avons dit plus *haut*, il s'est dirigé par les indications de Saussure dans la synthèse qui l'a conduit à la solution qu'il cherchait. Il a laissé se réduire à l'air en poudre fine la chaux ordinaire qu'il se proposait de modifier; cette poudre a été ensuite pétrie, à l'aide d'un peu d'eau avec de l'argile grise ou brune, ou même de la terre à brique; on a formé de ce mélange pâteux des boules que l'on a soumises à une seconde calcination. C'est ce produit qui, étant employé comme la chaux naturelle, jouit éminemment de la propriété de composer des ciments hydrauliques. Ici M. Vicat s'attache à montrer, et il est aisé de le concevoir, qu'un mé-

lange de chaux grasse et d'argile, cuites séparément, ne jouissent point de cette propriété; elle est due uniquement à une modification que l'action du feu fait éprouver à ces substances dans leur contact pendant leur calcination commune.

L'opinion de l'auteur s'accorde en cela avec celle de Collet Descotils; mais celui-ci n'avait étendu cette théorie qu'à l'action mutuelle de la chaux et de la silice. M. Vicat l'étend encore à l'action de la chaux mélangée de silice et d'alumine. Il a découvert de plus, par l'analyse comparée des pierres à chaux maigre de Montélimart, département de la Drôme, et de Calviac, département de la Dordogne, que la première, dans laquelle la silice se trouve à l'état de molécules impalpables, devenait, par la calcination, éminemment hydraulique; tandis que la seconde, où la silice se trouve à l'état de sablon grenu, n'acquiert point la propriété de prendre corps dans l'eau. Il décrit ensuite les divers changements de couleur que les pierres calcaires éprouvent pendant leur cuisson, les caractères auxquels on reconnaît que cette cuisson est parvenue au degré convenable; et il observe qu'en dépassant ce degré dans la chaux grasse ordinaire, on peut l'amener à un certain point de *surcalcination* tel que, si on la réduit en poudre fine, et qu'on en forme une pâte ductile en l'arrosant avec de l'eau, cette pâte, étant immergée, aura la propriété de s'endurcir; fait extrêmement remarquable, mais qui a besoin d'être vérifié par de nouvelles expériences.

Des phénomènes de la calcination M. Vicat passe à ceux de l'extinction de la chaux, et en décrit les différents procédés; celui communément usité consiste, comme on sait, à mettre les morceaux de chaux vive dans un bassin creusé sur le sol,

et à les couvrir d'une quantité d'eau surabondante, de manière à en former, par la trituration avec le rabot, une espèce de fluide laiteux. Les *chaux grasses* peuvent acquérir ainsi un volume plus que triple, tandis que celui de certaines chaux maigres n'augmente que d'un cinquième.

Le second procédé est celui que M. de la Faye annonça en 1777 comme le secret des mortiers romains. Il consiste à plonger la chaux vive pendant quelques secondes dans l'eau, d'où on la retire avant qu'elle commence à fuser; elle répand des vapeurs brûlantes, et se réduit en une poudre qui, susceptible de se conserver long-temps à l'abri de l'humidité, ne s'échauffe plus quand on la détrempe. Un kilogramme de *chaux grasse* éteinte ainsi par immersion, ne retient communément que cent quatre-vingts grammes d'eau, tandis que les *chaux maigres* peuvent en retenir jusqu'à trois cent cinquante grammes : les phénomènes se présentent, comme on voit, en sens inverse de ceux que manifestent ces deux espèces de chaux quand on les éteint à la manière ordinaire.

Enfin le troisième procédé d'extinction de la chaux se réduit à la laisser fuser librement par l'action lente et continue de l'atmosphère. Il s'en dégage un léger degré de chaleur, sans vapeurs visibles. Si l'on réduit en pâte d'égale consistance un kilogramme des deux espèces de chaux éteintes à l'air, on trouve que la *chaux grasse* exige environ un kilogramme et demi d'eau, tandis que la *chaux maigre* n'en exige que sept cents grammes environ. Un tableau comparatif des résultats obtenus par ces trois procédés d'extinction d'un poids donné de *chaux grasse* et de *chaux maigre*, prouve que l'on peut en former des pâtes d'égale consistance, en employant des quantités d'eau bien différentes; ce que

M. Vicat explique par les différents degrés de ténui
quels les molécules calcaires sont amenées suivan
cédé d'extinction qu'on a suivi.

Passant ensuite à l'examen des hydrates de ch
porte qu'ayant formé de leurs pâtes, obtenue
vient de le dire, de petits prismes quadrangu
été exposés à la chaleur solaire de l'été; le
couverte d'une légère croûte de carbonate
on les a dépouillés, après quoi on les a
d'une machine de rupture; et l'on a trou
pour ceux de *chaux grasse*, décroissait
lon qu'elle avait été éteinte par le
spontanément à l'air libre, ou par i
drates de *chaux maigre*, au contra
suivant que l'extinction de cette
procédés ordinaires, ou par im
Quoique les duretés des hydrat
niers procédés d'extinction
dans les hydrates de *chaux*
et l'autre ont cela de comn
la chaux dont ils sont for
mum de dureté qu'ils p
procédé qui divise le m
aux hydrates la plus
d'ailleurs, à ce prin
constituantes d'un
parties sont plus

Quant à l'alté
à l'air libre e
dans l'atmosp
1818. *Hi*

préparations qui passait, par cette combinaison, à l'état de carbonate, n'était guère, au bout d'un an, que de six millimètres pour la *chaux maigre,* et à peine de trois pour la *chaux grasse.* L'intérieur de ces corps reste à l'état d'hydrate. Il y a seulement cette différence, que ceux de *chaux grasse* peuvent acquérir à l'air un degré de consistance qui les rend susceptibles de poli, tandis que ceux de *chaux maigre* demeurent friables. Le contraire arrive lorsqu'on les immerge: les premiers se dissolvent, tandis que les seconds s'endurcissent.

La seconde section du Mémoire de M. Vicat a pour objet les bétons ou mortiers hydrauliques : il y traite successivement des pouzzolanes, et de leur degré de cuisson quand elles sont un produit de l'art; de l'influence des proportions de la chaux sur les autres matières dont les bétons sont composés; de celle qu'elle exerce suivant les procédés de son extinction; de l'action de l'eau sur la surface des bétons qui y est exposée; enfin de l'influence du temps sur le degré de consistance qu'ils peuvent acquérir.

L'auteur comprend sous la dénomination commune de *pouzzolanes* toutes les matières qui, formées, dans différentes proportions, de silice, d'alumine, d'oxide de fer, et quelquefois de petites quantités de chaux, de magnésie et d'oxide de manganèse, ont été soumises à un feu de calcination. En considérant ces matières comme des combinaisons d'oxides métalliques, qui s'y trouvent au moins au nombre de quatre, il observe que, par le nombre effrayant d'essais qu'il faudrait entreprendre, il n'y a pas d'apparence que l'on parvienne jamais à déterminer les meilleures proportions dans lesquelles ces oxides doivent être combinés pour don-

ner le meilleur composé; mais qu'heureusement, en se renfermant dans les bornes que la pratique a posées, il reste encore un vaste champ d'expériences à parcourir.

Après avoir broyé, à l'aide de pilons, les pouzzolanes qu'il a mises à l'épreuve, il en a formé, avec la chaux, des pâtes au même degré de consistance que l'argile des potiers à l'instant où ils la mettent en œuvre. Les échantillons sur lesquels il a opéré, et qui se sont trouvés quelquefois sous ses yeux au nombre de plusieurs centaines, ont été mis dans des gobelets de verre de dix centimètres de hauteur et de sept à huit de diamètre. Ils ont été immergés sous une eau pure. On les a soumis à deux observations principales : l'une, du temps nécessaire pour les faire parvenir de leur état de mollesse primitif, à un degré de consistance déterminé; l'autre, de leurs duretés relatives à différentes époques. Nous croyons superflu de nous arrêter à décrire les moyens qu'il a employés pour ces observations, dont plusieurs tableaux présentent les résultats; nous dirons seulement que ces moyens se réduisent à faire entrer dans ces bétons la pointe d'une tige d'acier fondu posée sur leur surface, en laissant tomber sur cette tige un poids constant d'une hauteur déterminée, et à mesurer la profondeur de son enfoncement. Ces notions préliminaires posées, il rapporte des expériences desquelles il résulte que l'argile ferrugineuse, les cendres de houille, le schiste bleu et le basalte doivent éprouver des degrés de cuisson différents, pour donner avec la *chaux grasse* les meilleurs bétons que l'on puisse en composer; il rappelle ensuite que la *chaux grasse* et la *chaux maigre* doivent y entrer dans des proportions différentes, en observant que la détermination de ces proportions dépend de la nature des

matières que l'on emploie; matières dont la variété presque infinie ôte tout espoir de prescrire sur cet objet des règles générales suffisamment fondées. L'expérience l'a cependant conduit à conclure, contre l'opinion commune, que, pour tous les bétons à *chaux grasse*, et même à *chaux moyenne*, il vaut mieux pécher par défaut de chaux que par excès. Le tableau des expériences à l'aide desquelles il est parvenu à cette conclusion, prouve que l'on peut, par des proportions convenables des matières que l'on emploie, décupler la résistance des bétons; ce qui mérite bien, dit-il, qu'on y fasse attention.

Les effets de l'extinction de la chaux, suivant le procédé qu'on a suivi et la théorie de ces effets, paraissent sur-tout avoir fixé la sienne. Il démontre, par de nombreuses observations dont plusieurs tableaux présentent le détail, que l'extinction par immersion et l'extinction spontanée l'emportent sur l'extinction ordinaire pour les *chaux communes très-grasses* et pour les *chaux moyennes*, de telle sorte néanmoins, qu'à mesure que le gras de la chaux diminue, les résistances propres à chacun de ces procédés d'extinction diminuent aussi : d'où il suit qu'il y a telle espèce de chaux pour laquelle le procédé d'extinction est indifférent; passé ce terme, les différences entre les résistances provenant des divers procédés d'extinction, de positives qu'elles étaient d'abord, deviennent négatives. Cette dernière partie de l'échelle appartient aux chaux éminemment hydrauliques.

M. Vicat admet, pour expliquer ces phénomènes, 1° qu'il s'opère une espèce de compression dans la masse du béton, par l'augmentation de volume que la chaux continue d'acquérir quand l'extinction ne l'a pas portée du premier coup

au dernier terme de division dont elle est susceptible; 2° que les éléments qui composent le béton exercent réciproquement les uns sur les autres une action chimique. Il pense qu'il y a des cas où il faut sacrifier à l'intensité de la combinaison ce qu'on pourrait obtenir de la compression, et d'autres cas où il faut suivre une marche contraire; le choix du parti à prendre est subordonné à l'énergie des matières que l'on emploie. Un des faits les plus remarquables que l'auteur ait observés, c'est qu'une longue exposition à l'air, sous un hangar fermé aux vents et à la pluie, donne aux chaux très-grasses, éteintes spontanément, des propriétés hydrauliques très-prononcées.

Le chapitre de la seconde section dans lequel l'auteur recherche l'influence réciproque de la chaux et de la pouzzolane, n'offre pas des faits moins curieux. « On ne peut con-« tester, dit-il, que parmi toutes les manières de combiner « en diverses proportions les cinq ou six oxides qui consti-« tuent les bétons, il n'en soit une qui donne le composé le « plus solide. Cela posé, plus les combinaisons fortuites des « pouzzolanes et des chaux de construction s'approchent de « ces proportions inconnues, plus aussi les bétons qui en ré-« sultent offrent de dureté : or il peut arriver que la chaux « contienne déja, et dans l'état convenable, une grande partie « des oxides nécessaires, ou qu'elle n'en contienne que très-« peu, ou même point du tout. On conçoit que, dans le « premier cas, la présence d'une bonne pouzzolane peut ame-« ner une superfluité plus nuisible qu'utile; tandis que, dans « le second, elle produira tout l'effet desirable. L'influence « des proportions s'explique aussi de la même manière.

« Le raisonnement et l'expérience indiquent donc, d'un

« commun accord, que si l'on range sur une même ligne, « par ordre d'énergie, toutes les chaux connues, il faudra « placer les pouzzolanes sur une ligne parallèle, et dans un « ordre inverse, pour que les termes qui se correspondent « sur cette échelle donnent ensemble les meilleurs résultats « possibles. Ainsi les chaux hydrauliques de première qua- « lité seraient en présence des sables éminemment quartzeux; « et les chaux communes très-grasses, vis-à-vis des pouzzolanes « d'une grande énergie. »

M. Vicat explique par-là certaines expériences qui semblent faire prévaloir quelques pouzzolanes sur d'autres dans un lieu, tandis qu'ailleurs celles que l'on avait trouvées de moindre qualité reprennent l'avantage; cela tient aux espèces différentes de chaux avec lesquelles on les combine. Après avoir prouvé par des exemples la généralité de cette règle, l'auteur rend compte des expériences dans lesquelles il a suivi les progrès de la détérioration de mauvais ciments hydrauliques par l'action continue de l'eau. Il tire des faits qu'il a observés l'explication des affouillements qui peuvent, dans certains cas, entraîner la destruction d'ouvrages *fondés* dans l'eau sur des massifs de béton.

Un chapitre intitulé, *De l'influence du temps,* termine la seconde section du Mémoire. L'auteur y expose les observations qu'il a faites pendant trois ans consécutifs sur les progrès de l'endurcissement d'un très-grand nombre d'échantillons de mortiers hydrauliques. Il en résulte que les bétons à *chaux grasse* ou *commune* font plus de progrès vers leur solidification, de la seconde à la troisième année, que de la première à la seconde; ce qui prouve la marche accélérée du phénomène. Elle l'est également encore, mais d'une manière

moins sensible, dans les bétons à *chaux moyenne,* tandis que, pour ceux à *chaux maigre* éminemment *hydraulique,* les progrès de l'endurcissement sont déja retardés aux mêmes époques. Ainsi, quelles que soient les pouzzolanes mises en œuvre, les bétons à *chaux maigre* acquièrent toujours leur *maximum* de dureté plus tôt que les bétons à *chaux grasse.*

La troisième et dernière section est consacrée aux mortiers ordinaires, ou *mortiers blancs.* L'auteur y examine successivement les fonctions du sable siliceux qui entre dans leur composition; l'influence de la grosseur de leurs grains, de la dessication naturelle retardée ou accélérée; des divers procédés d'extinction de la chaux, de ses proportions avec le sable, de la manipulation de leur mélange. Il examine aussi l'action des intempéries et celle du temps; ce qui le conduit naturellement à comparer entre eux des mortiers de différents âges, antiques et modernes. Après une exposition succincte des diverses théories à l'aide desquelles on a essayé d'expliquer l'endurcissement de ces préparations, il observe avec raison que les expériences sur lesquelles sont fondées ces diverses explications n'ayant point été faites ordinairement dans des circonstances semblables, ne sont point comparables entre elles. Il fait remarquer, comme une conséquence d'un grand nombre d'observations dont il présente le tableau, d'abord que les chaux qui forment, par le seul concours de l'eau, les corps les plus solides, sont celles d'où résultent, au contraire, les mortiers les plus faibles; en second lieu, que dans la fabrication du mortier le sable quartzeux est utile à quelques espèces de chaux, nuisible à d'autres, et indifférent à quelques-unes, selon, dit-il, que ces chaux ont la propriété d'exercer sur les molécules de

quartz une action chimique supérieure, inférieure, ou égale à celle qu'elles exercent sur leurs propres parties. Les *chaux hydrauliques*, qui ne sont employées ordinairement que dans la composition des bétons, peuvent, au surplus, être employées avec le même avantage dans les constructions à l'air: car l'action du feu, déterminant la proportion de silice et d'alumine, mêlées à la matière purement calcaire, à passer à un nouvel état, donne au composé qui en résulte la faculté d'agir chimiquement, par l'intermède de l'eau, sur de nouvelles substances siliceuses, à l'état de sable : ainsi une modification préalable par la voie sèche de la chaux, de la silice et de l'alumine, dispose la chaux à se combiner ensuite, par la voie humide, avec une certaine quantité de ces mêmes matières; phénomène singulièrement remarquable, par lequel les chaux hydrauliques sont essentiellement caractérisées.

C'est par cette raison que, d'après les expériences de l'auteur, il convient d'employer du sable fin pour composer avec ces chaux les meilleurs mortiers que l'on puisse en former; tandis qu'avec les *chaux grasses* ordinaires, c'est au contraire du gros sable que l'on compose les meilleurs mortiers. D'autres expériences plus concluantes que celles que l'on connaissait, ont prouvé à M. Vicat que la dessication des mortiers à l'air libre devait s'opérer lentement, et qu'on arrêtait les progrès de leur solidification quand on les faisait passer subitement d'un lieu frais et humide dans un autre chaud et sec. Nous ne suivrons point l'auteur dans les détails où il est entré, pour déterminer l'influence des procédés d'extinction des deux espèces de chaux sur la qualité des mortiers blancs; il nous suffira de dire qu'elle se manifeste précisément dans le même ordre que sur les bétons. Quant

aux proportions de la chaux et du sable, elles sont subordonnées non-seulement aux procédés d'extinction que l'on a suivis, mais aussi à la place que le mortier doit occuper dans un édifice. Cependant, quelle que soit cette place à l'air libre, lorsque le mortier est composé dans certaines proportions indiquées par l'auteur, l'expérience lui a prouvé que l'endurcissement n'en était point retardé par les intempéries, et qu'il pouvait résister aux variations de la température, à quelque degré qu'elle descendît.

L'ouvrage est terminé par un parallèle curieux entre les résistances relatives de divers mortiers antiques; il prouve que leur dureté n'est pas l'ouvrage du temps seul, et qu'elle doit être attribuée sur-tout à l'excellence des matières que le hasard plaça dans les mains de ceux qui les fabriquèrent. Quelques exemples cités démontrent que si quelques anciens édifices ont résisté jusqu'à-présent aux outrages du temps par la bonne composition de leurs mortiers, les mortiers ne doivent leur conservation, dans quelques autres, qu'à la bonne disposition et à l'excellente qualité des matériaux avec lesquels on les a mis en œuvre.

En achevant ce rapport, nous ajouterons que M. Vicat a profité du séjour qu'il vient de faire à Paris pour répéter, sur les matières qu'on y emploie, des expériences analogues à celles qu'il a faites dans le département du Lot. Ces expériences, dont les produits sont sous les yeux de l'Académie, ont prouvé que les chaux hydrauliques, qu'on peut former ici de toutes pièces, d'après ses procédés, l'emportent en qualité, pour la composition des bétons, sur les *chaux maigres naturelles* de Metz et de Senonches, les meilleures que l'on y connaisse et qu'on ait pu leur comparer.

L'importance du Mémoire de M. Vicat nous fait espérer que le compte qui vient d'en être rendu ne paraîtra pas s'étendre au-delà des bornes que nous devions nous prescrire. Cet ouvrage a fixé l'attention de vos commissaires, et par les faits nouveaux qu'il contient, et par la méthode et la clarté avec laquelle ils sont exposés. Les explications qui en sont données s'appuient sur les saines théories, et prouvent que l'auteur, quoique résidant dans un département éloigné de la capitale, s'est tenu constamment au courant des progrès des sciences dont il se montre très-capable de faire d'utiles applications. On ne peut manquer de concourir soi-même à leur avancement, quand, avec un esprit investigateur comme celui dont M. Vicat paraît doué, on entreprend d'éclairer de leurs lumières la pratique de l'art qu'on exerce. Les ingénieurs placés dans des circonstances semblables sur les différents points du royaume, lui devront de la reconnaissance, et par les résultats du travail qu'il leur offre, et par l'exemple qu'il leur donne. Nous pensons que, sous tous les rapports, son ouvrage mérite d'être approuvé par l'Académie, et d'être inséré dans le recueil des savants étrangers.

Fait à l'Académie royale des sciences, le 16 février 1818.

DE PRONY; GAY-LUSSAC.

GIRARD, *rapporteur*.

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANALYSE

Des Travaux de l'Académie royale des Sciences, pendant l'année 1818.

PARTIE PHYSIQUE,

PAR M. LE CHER CUVIER, SECRÉTAIRE-PERPÉTUEL.

CHIMIE.

La chimie s'est enrichie cette année de deux nouvelles substances doublement intéressantes, en ce que l'une est à-la-fois métallique et alcaline, c'est-à-dire que son oxide est un nouvel alcali fixe; et en ce que l'autre est métallique et acidifiable, et en même temps plus analogue au soufre qu'à aucune autre matière.

On doit la première à M. Arfvedson, jeune chimiste suédois, élève de M. Berzélius. Il l'a découverte dans une pierre

nommée *pétalite*, où il n'en a trouvé que de 3 à 5 centièmes; mais il en a reconnu ensuite jusqu'à 8 centièmes dans une autre pierre appelée *triphane*.

Cette substance donne, avec la plupart des acides, des sels très-fusibles; son carbonate en fusion attaque le platine presque aussi fortement que les nitrates des autres alcalis, et se dissout difficilement; son muriate est très-déliquescent; son sulfate cristallise sans eau de saturation. La capacité de cet alcali, pour saturer les acides, est plus grande que celle d'aucun autre, et il entre en plus grande quantité dans les sels qu'il forme avec eux.

L'auteur de la découverte a donné à sa nouvelle substance le nom de *lithion*, pour rappeler qu'elle a été découverte dans une pierre, tandis que les deux autres alcalis fixes ont été d'abord tirés des végétaux.

La seconde substance a été découverte par M. Berzélius lui-même, dans une fabrique d'acide sulfurique de Fahlun en Suède. Il se dépose au fond de la chambre où l'on brûle du soufre retiré des pyrites, une masse rougeâtre, qui n'est elle-même en grande partie que du soufre, mais qui donne en brûlant une odeur âcre de raifort. Cette odeur étant l'un des caractères d'un métal découvert depuis quelques années par M. Klaproth, et nommé *tellure*, on pouvait croire qu'elle était due au mélange de ce métal avec le soufre. Cependant M. Berzélius et M. Gahn, qui examinèrent d'abord cette matière rouge, ne purent en retirer de tellure. Le premier en emporta à Stockholm pour l'examiner de plus près, et il y trouva une substance très-volatile, très-aisément réductible, et ne se laissant point précipiter par les alcalis. Sa couleur est grise, avec un grand éclat; elle est dure, friable, et sa

cassure ressemble à celle du soufre. Sa pesanteur spécifique est de 3. 6. Elle donne une poudre rouge par la trituration, se ramollit à la température de l'eau bouillante, se fond un peu au-dessus, et reste quelque temps, à mesure qu'elle se refroidit, molle, paîtrissable et filante, comme de la cire d'Espagne. A un peu plus de chaleur encore, elle bout et se sublime en un gaz jaunâtre, et se fixe en forme de fleurs d'un beau rouge, qui cependant ne sont point oxidées. Dans l'air elle s'évapore en fumée rouge, ou brûle avec une flamme bleue, et en donnant une si forte odeur de raifort, qu'un cinquantième de grain suffirait pour empester le plus vaste appartement.

M. Berzélius a donné à cette substance le nom de *sélénium,* d'après le nom grec de la lune, et pour rappeler le rapport qu'elle a avec le tellure; rapport qui pourrait, au reste, ne tenir qu'à la présence même du sélénium dans les tellures examinés jusqu'à-présent.

Les nouvelles de ces découvertes ayant été annoncées à l'Académie par M. Gillet-Laumont, et bientôt après par une lettre de M. Berzélius lui-même adressée à M. Berthollet, M. Vauquelin s'occupa aussitôt de vérifier ce qui concernait l'alcali; et ses observations ajoutèrent quelques détails à celles qu'avait données M. Arfvedson. Quoique M. Vauquelin n'ait eu qu'une petite quantité de pétalite à sa disposition, il y a trouvé jusqu'à 7 p. ⁰⁄₀ de lithion.

M. Berzélius a suivi avec tout le soin qu'elle méritait sa belle découverte du sélénium. Il a soumis sa substance à la plupart des agents de la chimie, et reconnu comment ils se comportent avec elle; et, étant venu à Paris cette année, il a donné lui-même son travail avec le plus grand détail, dans

les Annales de chimie. Sous tous les rapports, il montre dans le sélénium une sorte d'intermédiaire entre les substances combustibles et les substances métalliques.

Il en fait sur-tout une comparaison, d'une part, avec le soufre et le tellurium, de l'autre avec le chlore, le fluor et l'iode; substances que beaucoup de chimistes ont voulu placer, dans ces derniers temps, dans la même classe que le soufre, parce qu'elles donneraient, comme le soufre, des acides en se combinant avec l'hydrogène. On peut se rappeler ce que nous avons dit à ce sujet dans nos Analyses de 1813 et de 1814, en rendant compte de la nouvelle Théorie de M. le chevalier Davy, sur les acides qu'il croit formés sans oxigène.

M. Berzélius, trouvant que les combinaisons, soit du soufre, soit du tellurium, soit du sélénium, avec les métaux et les substances combustibles, ont entre elles une grande analogie; et trouvant, d'un autre côté, que les combinaisons de l'iode et du chlore avec les mêmes matières sont aussi très-analogues entre elles et avec celles des acides oxigénés, mais ne ressemblent point du tout aux précédentes, ce savant chimiste en conclut que ce sont deux ordres bien distincts de substances; et il laisse entrevoir, par-là, qu'il ne regarde pas encore comme démontrée la théorie de M. Davy.

Ce sélénium est singulièrement peu abondant; 500 livres de soufre brûlé à la fabrique de Fahlun n'en donnent qu'un tiers de gramme. Combien doit-il être, en proportion, moins considérable encore dans la pyrite, d'où ce soufre est extrait! M. Berzélius l'a trouvé depuis formant environ le quart d'un minerai d'argent et de cuivre extrêmement rare, que

l'on avait regardé, à cause de son odeur, comme un minerai de tellure, et que l'on tirait autrefois d'une mine maintenant abandonnée, de la province de Smolande en Suède. Il en a trouvé aussi quelques parcelles combinées avec du cuivre sans argent.

Plus on réfléchit sur ces éléments chimiques, qui seraient ainsi jetés comme au hasard, par la nature, en petites parcelles de si peu d'effet dans l'univers, que l'art le plus délicat, la science la plus profonde, suffisent à peine pour les mettre au jour, plus on est porté à croire qu'une science plus profonde encore leur arrachera bientôt leur qualité d'éléments.

M. Gay-Lussac a fait, en 1811, sur le principe colorant du bleu de Prusse, ou ce que l'on nomme depuis quelque temps l'*acide prussique*, des recherches qui ont fait reconnaître à cette substance, dans son état de pureté, des propriétés fort remarquables, et jusques alors entièrement ignorées; telles, entre autres, que la petitesse de l'intervalle qui sépare pour elle le point de la congélation et celui de l'évaporation, et son épouvantable influence sur l'économie animale. Ce savant chimiste, continuant ses recherches sur cet important sujet, a découvert, en 1814, que ce principe est un hydracide, c'est-à-dire un de ces corps semblables aux acides, quant à leur action extérieure, mais où l'on ne peut démontrer la présence de l'oxigène, et qui paraissent résulter de la combinaison de l'hydrogène avec un radical. L'acide prussique est même le premier hydracide dont on connaisse le radical, quant à ses éléments, et M. Gay-Lussac a trouvé qu'il se compose de carbone et d'azote en

proportions peu différentes. Il a nommé ce radical *cyanogène*, et l'acide qu'il fournit, *hydrocyanique*, à cause de sa propriété de teindre l'oxide de fer en bleu. Nous avons annoncé toutes ces découvertes dans nos Analyses de 1811 et de 1814.

M. Vauquelin a travaillé de nouveau sur cette matière, en suivant, comme il le dit avec sa modestie ordinaire, la route que M. Gay-Lussac lui avait frayée ; mais cette route avait des embranchements qui ne pouvaient échapper à un homme tel que M. Vauquelin.

Le cyanogène gazeux se dissout dans environ quatre fois et demie son volume d'eau, et lui donne une odeur et une saveur très-piquante, mais sans la colorer. Après quelques jours, cette dissolution se teint en jaune, puis en brun ; dépose une matière brune, prend l'odeur d'acide hydrocyanique, et développe de l'ammoniaque quand on y met de la potasse. Cependant elle ne peut encore donner de bleu de Prusse. Des expériences ultérieures montrent qu'elle contient de l'hydrocyanate et du carbonate d'ammoniaque, et de l'ammoniaque combinée avec un troisième acide que M. Vauquelin nomme *cyanique*, sans avoir absolument déterminé la composition de son radical.

Il y a donc décomposition de l'eau : son hydrogène s'unit à une partie du cyanogène pour former de l'acide hydrocyanique ; une autre partie s'unit à de l'azote du cyanogène pour former l'ammoniaque ; l'oxigène de cette même eau avec une partie du carbone du cyanogène forme de l'acide carbonique. Le troisième acide résulte de quelque combinaison du même genre ; et il reste cependant encore du carbone et de l'azote, que cet oxigène ne suffit pas pour

convertir en acide, et qui donnent la matière brune du dépôt.

Les oxides alcalins produisent des effets semblables, mais bien plus rapidement.

Une multitude d'autres applications du cyanogène aux oxides, aux métaux, aux substances combustibles, ont donné à M. Vauquelin des résultats non moins curieux. La question la plus intéressante qu'elles pouvaient résoudre, était de savoir si le bleu de Prusse est un cyanure ou un hydrocyanate, c'est-à-dire une combinaison de l'oxide de fer avec le cyanogène, ou bien avec son hydracide. M. Vauquelin ayant constaté que l'eau imprégnée de cyanogène peut dissoudre le fer sans le changer en bleu de Prusse, et sans qu'il y ait dégagement d'hydrogène, mais en laissant du bleu de Prusse dans la portion non dissoute, et que l'acide hydrocyanique convertit le fer ou son oxide en bleu sans le secours ni des alcalis, ni des acides : il en conclut, contre l'opinion de M. Gay-Lussac, que le bleu de Prusse est une hydrocyanate, et que, lorsqu'on expose du fer à l'eau imprégnée de cyanogène, il s'y forme à-la-fois de l'acide cyanique qui dissout une partie du fer, et de l'acide hydrocyanique qui en convertit une autre en bleu.

Il établit même une règle générale, laquelle serait que les métaux qui, comme le fer, peuvent décomposer l'eau à la température ordinaire, forment des hydrocyanates; et que ceux qui n'ont pas cette faculté, comme l'argent et le mercure, ne forment que des cyanures.

Tout le monde sait que la plupart des acides résultent des combinaisons de l'oxigène avec certaines substances aux-

quelles on a donné le nom de radicaux, et que, suivant qu'il entre dans la combinaison une quantité plus ou moins grande d'oxigène, l'acide formé est différent en propriétés, et prend des noms auxquels les chimistes modernes ont donné une certaine régularité, en indiquant le degré d'oxigénation par le moyen de la terminaison.

C'est ainsi que l'azote produit, par des additions successives d'oxigène, le gaz nitreux, l'acide nitreux, l'acide nitrique; et nous avons parlé, dans notre Analyse de 1816, de combinaisons encore différentes dans leurs proportions, découvertes par MM. Gay-Lussac et Dulong.

M. Thénard vient de faire des expériences d'où il résulte que plusieurs acides peuvent admettre des proportions d'oxigène bien supérieures à celle que l'on regardait jusqu'à-présent comme constituant leur état le plus oxigéné. En dissolvant avec précaution de la baryte suroxidée par de l'acide nitrique, et en la précipitant par l'acide sulfurique, son excès d'oxigène reste uni au premier acide, qui devient ainsi de l'acide nitrique oxigéné. Par des moyens que M. Thénard indique, on peut le concentrer assez pour qu'il donne, par la chaleur, onze fois son volume d'oxigène; et, d'après les calculs de ce savant chimiste, il serait une combinaison d'un volume d'azote contre trois volumes d'oxigène. L'acide hydrochlorique s'oxigène par le même procédé, et prend alors des propriétés singulières. Appliqué à l'oxide d'argent, il forme de l'eau et un chlorure, et son oxigène devenant libre, produit une effervescence aussi vive, que si l'on versait un acide sur un carbonate alcalin.

L'acide sulfurique, le fluorique, peuvent être oxigénés de même, et on peut suroxigéner encore tous ces acides une

ou plusieurs fois. Il en est auxquels M. Thénard a ajouté de cette manière, jusqu'à sept et même jusqu'à quinze doses successives d'oxigène. Il a contraint ainsi de l'acide hydrochlorique à en absorber jusqu'à trente fois son volume. Rien n'égale alors l'effervescence qu'y occasionne le contact de l'oxide d'argent. Par le moyen de ces acides ainsi surchargés d'oxigène, et par des procédés analogues, on peut aussi suroxigéner des terres et des oxides métalliques. M. Thénard a même suroxigéné l'eau; en versant peu-à-peu de l'eau de baryte dans de l'acide sulfurique oxigéné, l'acide sulfurique s'unit à la baryte, se précipite avec elle, et laisse à l'eau son excès d'oxigène. Ainsi oxigénée, l'eau dans le vide se congèle ou s'évapore sans perdre son oxigène; il s'y concentre, au contraire, au point qu'elle en a absorbé jusqu'à quarante ou cinquante fois son volume : mais l'ébullition le lui enlève; le charbon, l'argent, l'oxide d'argent, et ceux de plusieurs autres métaux, le font jaillir avec une vive effervescence; et, ce qui est singulier, un passage si rapide à l'état de gaz d'une quantité considérable de matière, loin de produire du froid, échauffe la liqueur à un degré très-sensible. M. Thénard soupçonne qu'il y a quelque chose d'électrique dans ce phénomène.

On sait aujourd'hui, par les célèbres expériences galvaniques de M. le chevalier Davy, que les alcalis fixes ne sont autre chose que des oxides de métaux excessivement combustibles; et par celles de MM. Thénard et Gay-Lussac, que l'on peut les ramener à l'état métallique au moyen du carbone et d'une très-haute température. Nous avons parlé de ces grandes découvertes dans notre Analyse de 1808.

M. Vauquelin, ayant réduit dernièrement de l'antimoine

par des flux alcalins, s'est aperçu que ce métal, mis dans l'eau, donnait une grande quantité de gaz hydrogène, et que l'eau devenait alcaline. D'autres métaux, réduits de la même manière, lui ont offert le même phénomène. Il en a conclu qu'une partie de l'alcali qu'il avait employé, s'était, pendant l'opération, combinée à l'antimoine sous forme métallique, et décomposait l'eau pour revenir à l'état d'oxide; mais il a été obligé d'en conclure aussi que la présence d'un métal est favorable à la réduction de l'alcali : car, autrement, l'alcali n'aurait pu prendre la forme métallique par une chaleur si faible.

Nous avons parlé, l'année dernière, des expériences de MM. Chevillot et Édouard, sur cette singulière combinaison d'oxide de manganèse et de potasse, que l'on a nommée *caméléon minéral,* à cause de sa facilité à prendre successivement des couleurs diverses.

Ces jeunes chimistes ont donné suite à leur travail; ils ont reconnu que la soude, la baryte et la strontiane peuvent donner, comme la potasse, différentes sortes de caméléons, en s'unissant à l'oxide de manganèse, et en absorbant de l'oxigène; mais, s'attachant principalement à l'espèce de caméléon de potasse, dans lequel l'alcali est parfaitement neutralisé, celle qui est d'une belle couleur rouge, ils ont observé que les corps très-combustibles agissent sur elle avec beaucoup d'énergie ; qu'ils la décomposent, et s'enflamment souvent avec une forte détonation ; le phosphore en produit même une par le simple choc. D'un autre côté, ce caméléon rouge, exposé au feu, se décompose, et donne de l'oxigène, de l'oxide noir de manganèse, et du caméléon vert dans lequel la potasse domine.

Ils concluent de ces faits, que l'intervention de l'oxigène, dans la formation du caméléon, a pour résultat d'oxider davantage le manganèse, et de le convertir en un véritable acide, en sorte que le caméléon serait un manganésiate de potasse; le caméléon rouge, en particulier, en serait un manganésiate parfaitement neutre, et le vert, un manganésiate avec excès d'alcali. Cependant ils n'ont pu parvenir à isoler cet acide dont ils admettent l'existence; mais ils ont fait des expériences nombreuses qui leur paraissent confirmer leur opinion énoncée dès l'année dernière, que le caméléon vert ne diffère du rouge que par plus d'alcali.

Soit que l'on verse des acides sur du caméléon vert, ou de l'alcali sur du rouge, on le fait passer également d'une couleur à l'autre ; mais l'ébullition et l'agitation peuvent aussi dégager l'excès de potasse du caméléon vert, et le changer en rouge. Plusieurs acides versés en excès décomposent tout le caméléon, en s'emparant de la potasse, en dégageant de l'oxigène, et en précipitant le manganèse à l'état d'oxide noir. Le sucre, les gommes et d'autres substances capables d'enlever l'oxigène, décomposent également le caméléon, et l'exposition à l'air produit un effet semblable; ce que les auteurs attribuent aux corpuscules étrangers qui flottent dans l'atmosphère, et qui, en tombant dans la dissolution, lui enlèvent aussi une partie de l'oxigène qui lui est essentiel.

Le cobalt et le nickel sont deux demi-métaux qu'il est très-difficile d'obtenir purs, et sur-tout de séparer entièrement l'un de l'autre; cependant cette préparation est nécessaire pour une détermination exacte de leurs propriétés.

M. Laugier, ayant suivi les méthodes le plus récemment publiées pour parvenir à cet objet, a trouvé encore dans le nickel des traces non équivoques de cobalt. Pour s'en débarrasser, il dissout le mélange dans l'ammoniaque, et précipite par l'acide oxalique; il redissout l'oxalate de nickel et de cobalt obtenu par cette opération dans l'ammoniaque concentré, et expose la dissolution à l'air. A mesure que l'ammoniaque s'exhale, il se dépose de l'oxalate de Nickel mêlé d'ammoniaque. Par des cristallisations répétées, on dépouille le liquide de tout son nickel; il n'y reste qu'une combinaison d'oxalate de cobalt et d'ammoniaque, que l'on réduit aisément. Le peu de cobalt qui est demeuré dans le précipité de nickel s'en sépare par quelques dissolutions successives dans l'ammoniaque : ainsi la même opération donne les deux métaux à l'état de pureté.

Le sucre de lait, traité par l'acide nitrique, donne un acide dont Schéele fit la découverte, et qui depuis a été nommé *acide mucique,* parce qu'il se produit également par l'action de l'acide nitrique sur les gommes et les mucilages. Quand on expose cet acide à la chaleur, il se sublime une matière saline, brune, très-odorante, brûlant avec flamme sur les charbons, et dissoluble dans l'eau et l'alcohol. Tromsdorf, qui a fait un examen particulier de cette matière sublimée, crut y trouver de l'acide succinique, du pyrotartarique, de l'acétique, et diverses autres substances; mais M. Houtou-Labillardière s'étant aperçu, à la lecture du travail de Tromsdorf, qu'il attribuait à son acide succinique des caractères fort différents de ceux que cet acide offre réellement, a cru devoir reprendre ces recherches.

Il a lu à l'Académie un Mémoire où il prouve que ce prétendu acide succinique est un acide nouveau, auquel il donne le nom de *pyro-mucique*. Quand on l'a débarrassé de l'huile et de l'acide acétique qui s'y mêlent, il cristallise aisément, est blanc, inodore, d'une saveur acide, assez forte, fond à 130 degrés centigrades; se volatilise au-delà de cette température, n'attire point l'humidité, se dissout dans l'eau bouillante en plus grande abondance que dans l'eau froide, et, en le résolvant en ses parties constituantes, on en obtient environ neuf volumes de vapeur de carbone, trois d'hydrogène et deux d'oxigène. M. Houtou-Labillardière décrit avec soin les combinaisons de cet acide avec diverses bases salifiables, et tous les phénomènes qu'il rapporte viennent à l'appui de l'assertion de ce jeune et habile chimiste.

M. Chevreul a fait de nouvelles et importantes additions à ses recherches sur les corps gras, dont nous avons déja plusieurs fois entretenu nos lecteurs. Après avoir reconnu que la matière du calcul biliaire, qu'il nomme *cholesterine*, ne forme point de savon avec les alcalis, ce qui la distingue essentiellement des graisses, il avait cru s'apercevoir que le sperma-céti, auquel il a donné le nom de *cétine*, se réduisait, par l'action des alcalis, en un acide analogue à l'un des deux que ces mêmes alcalis produisent dans les graisses, savoir à celui qu'il a appelé *margarique*, mais que cet acide du sperma-céti avait une capacité de saturation beaucoup moindre. Il avait donc jugé nécessaire de donner à cet acide un nom particulier, et l'avait appelé *cétique*. Des expériences plus suivies l'ont convaincu que ce

n'est autre chose que de l'acide margarique, dont les propriétés sont masquées par un reste de substance grasse non acide. Mais de l'huile de dauphin, traitée par la méthode de M. Chevreul, c'est-à-dire convertie en savon par les alcalis, lui a réellement donné, outre les deux acides que fournissent toutes les graisses, un acide d'une troisième sorte, qu'il nomme *delphinique;* ce que ne fait pas l'huile de poisson ordinaire du commerce.

Il est à remarquer que l'oxigène ne peut se démontrer dans ces nouveaux acides ternaires, tirés des graisses, et qu'ils sont, à l'égard des acides végétaux ordinaires, tels que l'acétique, l'oxalique, etc., ce que sont, dans le règne minéral, les hydracides de M. Davy à l'égard des acides minéraux anciennement connus, le nitrique, le sulfurique, etc.

La cochenille, cet insecte singulier, qui, par la matière colorante qu'il fournit, est devenu un article si important de commerce, n'avait point été encore étudiée par les chimistes avec l'attention dont elle est digne. MM. Pelletier et Caventon en ont fait l'objet de leurs expériences. Ils ont reconnu que la matière colorante, si remarquable, qui en fait la partie principale, y est mêlée à une matière animale particulière, à une graisse semblable à la graisse ordinaire et à différents sels. Après avoir enlevé la graisse par l'éther, et traité le résidu par l'alcohol bouillant, ils laissent refroidir ou lentement évaporer l'alcohol, et obtiennent ainsi la matière colorante, mêlée seulement encore d'un peu de graisse et de substance animale, qu'on en sépare en dissolvant encore par l'alcohol à froid qui laisse la matière animale, et

en mêlant à la dissolution de l'éther qui en précipite la matière colorante dans un grand état de pureté. Chacun sait qu'elle est du plus beau rouge, et les chimistes dont nous parlons lui donnent le nom de *carmine*. Elle se fond à 50°, se boursouffle ensuite, et se décompose sans donner d'ammoniaque; elle est très-soluble dans l'eau, peu dans l'alcohol, et point dans l'éther, sans l'intermède de la graisse. Les acides la font passer successivement du cramoisi au rouge vif et au jaune; les alcalis, au contraire, et en général tous les protoxides la font tourner au violet; l'alumine l'enlève à l'eau.

Ces expériences expliquent plusieurs des procédés de l'art du teinturier et de celui du fabricant de couleurs, et particulièrement ce qui se passe dans la teinture en écarlate, et dans la fabrication du carmin et de la laque.

La laque n'est formée que de carmine et d'alumine; elle a la couleur naturelle de la carmine, qui est le cramoisi. Le carmin est un composé triple de matière animale, de carmine et d'acide qui en rehausse la teinte; c'est l'action de l'acide muriatique qui convertit le cramoisi de la cochenille en belle couleur d'écarlate.

MÉTÉOROLOGIE.

Les causes les plus apparentes des phénomènes atmosphériques, la densité de l'air, son humidité, sa chaleur et son électricité, sembleraient devoir principalement dépendre de l'action du soleil; mais l'irrégularité de leurs effets dans nos climats prouve assez qu'elles éprouvent encore d'autres influences, et qu'elles se compliquent avec des

causes encore inconnues; et c'est ce qui fait que jusqu'à nos jours la météorologie semble être de toutes les branches de la physique celle qui s'est le moins rapprochée de ce degré de certitude qui pourrait la faire considérer comme une science positive.

M. de Humboldt fait remarquer que si l'on peut espérer d'en jamais déterminer les lois, c'est en l'étudiant dans les climats où ces phénomènes offrent le plus de simplicité et de régularité; et c'est incontestablement la zone torride qui doit, à ce titre, fixer le choix de l'observateur.

Déja c'est entre les tropiques qu'il a été possible de reconnaître les lois des petites variations horaires du baromètre; c'est dans la zone torride que la sécheresse et les pluies, que la direction des vents dans chaque saison, sont soumis à des règles invariables.

M. de Humboldt a porté son attention sur le rapport de la déclinaison du soleil, avec le commencement des pluies dans la partie nord de la zone. A mesure que le soleil s'approche du parallèle d'un lieu, les brises du nord y sont remplacées par des calmes ou des vents du sud-est. La transparence de l'air diminue; l'inégale réfringence de ses couches fait scintiller les étoiles à 20° au-dessus de l'horizon. Bientôt les vapeurs s'amassent en nuages; l'électricité positive ne se manifeste plus constamment dans le bas de l'atmosphère; le tonnerre se fait entendre, des ondées se succèdent pendant le jour, le calme de la nuit n'est interrompu que par des vents impétueux du sud-est.

M. de Humboldt explique ces faits par le plus ou moins d'inégalité qui se trouve entre cette partie de la zone torride et la zone tempérée voisine. Lorsque le soleil est au midi de

l'équateur, c'est l'hiver de l'hémisphère boréal. L'air de la zone tempérée est le plus différent qu'il soit possible de celui de la zone torride. Il s'y écoule sans cesse en brise fraîche et uniforme, qui reporte l'air chaud et humide dans le haut de l'atmosphère, d'où il retourne vers cette même zone tempérée, y rétablit l'équilibre, y dépose l'humidité : aussi la chaleur moyenne est-elle toujours moindre de 5 à 6° dans le temps de sécheresse que dans le temps des pluies; mais les vents de sud-est n'agissent point comme ceux du nord, parce qu'ils viennent d'un hémisphère beaucoup plus aquatique, et sur lequel le courant d'air supérieur ne se disperse pas de la même manière que dans l'hémisphère boréal.

M. Moreau de Jonnès a communiqué quelques détails extraits de sa correspondance, sur le coup de vent qui a causé tant de dégâts aux Antilles le 21 septembre dernier; il a été précédé d'un calme plat; le vent est passé par le nord au nord-ouest, et c'est de ce point qu'il a soufflé avec violence. M. de Jonnès remarque, à ce sujet, que, l'année précédente, le coup de vent du 20 octobre venait du sud-est, et qu'il existe entre ces deux points un espace de 90° au sud et au nord, d'où il ne souffle jamais de courant d'air. L'agitation de l'air a été suivie d'un raz de marée violent, qui a entraîné des navires; mais on n'a observé aucun mouvement extraordinaire dans le baromètre. Une remarque assez triste, c'est que l'effet communément attribué à ces ouragans, d'assainir l'air des pays qu'ils dévastent, ne s'est pas vérifié dans cette occasion, et que la fièvre jaune n'a pas cessé d'exercer ses ravages.

Le même observateur a donné aussi une notice des tremblements de terre éprouvés aux Antilles cette année, et qui ont eu cela de remarquable, qu'ils ont affecté une sorte de périodicité. Il y en a eu huit depuis le mois de décembre jusqu'au mois de mai; un chaque mois, excepté en avril, où il y en a eu deux, et tous entre neuf et onze heures du soir.

MINÉRALOGIE ET GÉOLOGIE.

M. Beudant continue à enrichir la cristallographie de recherches aussi neuves qu'intéressantes. Nous avons vu, l'année dernière, comment, dans ses expériences, un principe salin, d'une certaine espèce, imprime quelquefois sa forme cristalline à un mélange dont il ne fait pas, à beaucoup près, la plus grande partie.

Il s'est occupé, cette année, d'une question qui n'importe pas moins à la science des cristaux; c'est celle des causes qui déterminent un sel dont les molécules primitives et le noyau ont une forme constante, à revêtir, par l'accumulation de ces molécules selon des lois diverses, des formes secondaires si variées, que leur nombre étonne quelquefois l'imagination.

Ayant remarqué que les formes secondaires d'une même substance, sont le plus souvent les mêmes dans les mêmes gisements, et dans les lieux où elles se retrouvent associées de la même manière à d'autres minéraux, il a jugé que ces formes secondaires doivent être déterminées par les circonstances au milieu desquelles se fait la cristallisation.

On savait depuis long-temps, par les expériences de Romé

de Lille, et par celles de Fourcroy et de M. Vauquelin, que la présence de l'urée détermine le sel marin à prendre la forme secondaire octaëdre, tandis que, dans l'eau pure, il cristallise en cubes semblables à ses molécules constituantes. Elle produit un effet inverse sur le muriate d'ammoniaque, qui cristallise en octaëdre dans l'eau pure; elle le fait cristalliser en cube.

Un peu plus ou un peu moins de base dans l'alun lui imprime des formes secondaires cubiques ou octaëdriques; et ce sont si bien des formes secondaires, qu'un cristal octaëdre d'alun plongé dans une solution plus riche en base, s'y enveloppe de couches qui lui donneront, en définitif, la forme d'un cube.

Partant de ces premiers faits, M. Beudant a traité la question en grand, et a soumis la cristallisation des sels à l'épreuve de toutes les circonstances qu'il a crues capables d'influer sur elle; savoir : 1° les circonstances extérieures et générales, telles que la chaleur, le poids de l'atmosphère, le plus ou moins de rapidité de l'évaporation, le volume de la solution, la forme du vase, etc.

2° Les mélanges mécaniques qui troublent la solution en s'y trouvant, soit en simple suspension, soit en précipité sans cohérence, soit sous forme de dépôt gélatineux.

3° Ce qu'il appelle les mélanges chimiques existants dans les mêmes solutions;

4° Enfin les variations entre les proportions des principes constituants de la substance cristallisée.

Les circonstances du premier genre n'exercent point d'action, si ce n'est sur la grandeur et la netteté des cristaux. Il en est de même des petites quantités de matière qui peuvent

rester en suspension permanente dans un liquide. Mais on ne peut pas en dire autant des précipités et des mélanges chimiques.

Les cristaux qui se forment au milieu d'un précipité sans cohérence, d'une bouillie déposée au fond du liquide, entraînent toujours une partie plus ou moins considérable des molécules de ce dépôt, et perdent alors ordinairement toutes les petites facettes additionnelles qui auraient pu modifier leur forme dominante. Cette forme arrive à plus de simplicité lorsqu'elle aurait dû être compliquée; mais les substances qui auraient, sans cela, donné des cristaux simples, continuent de les donner, et ne reçoivent point de modification.

Dans un dépôt gélatineux, les cristaux sont rarement groupés, mais presque toujours isolés, d'une netteté et d'une régularité remarquables; et ils n'éprouvent d'autres variations que celle qui résulte de l'intervention chimique de la substance du dépôt.

Les variations sont assez nombreuses dans les cristaux qui se forment dans un mélange chimique, c'est-à-dire dans une solution d'une autre substance, même lorsque cette substance ne peut s'unir avec eux. Les phénomènes rapportés plus haut s'y répètent de diverses façons : du sel marin qui cristallise dans une solution de borax, prend des troncatures aux angles solides de ses cubes; l'alun dans l'acide muriatique prend une forme que M. Beudant n'a jamais obtenue autrement.

Si la dissolution peut s'unir en une portion quelconque au cristal d'une autre substance qui s'y forme, et que néanmoins ce cristal détermine, par sa plus grande énergie, la

forme de la molécule constituante, ainsi que nous l'avons vu l'année dernière pour le cas du sulfate de fer, la matière de la solution exerce aussi à son tour quelque influence sur la forme secondaire, et cette influence consiste le plus souvent à la simplifier, en faisant disparaître les surfaces additionnelles.

Ainsi, 30 ou 40 centièmes de sulfate de cuivre se soumettent encore à la cristallisation rhomboëdrique du sulfate de fer, mais en réduisant ce sulfate au pur rhomboïde, sans aucune troncature ni sur les angles, ni sur les arêtes.

Un peu d'acétate de cuivre ramène à cette forme un sulfate de fer, quelque disposé qu'il soit à se compliquer de surfaces additionnelles.

D'autres mélanges simplifient un peu moins : ainsi le sulfate d'alumine ramène celui de fer à un rhomboëdre tronqué aux angles latéraux, ou à ce que M. Haüy nomme *variété unitaire;* et même quand on trouve dans le commerce de la couperose de cette variété, ce qui est assez commun, on peut être sûr, selon M. Beudant, qu'elle contient de l'alumine.

Enfin les proportions de la base à l'acide, ou, dans les sels doubles, des deux bases entre elles, produisent aussi des effets très-sensibles sur la forme secondaire, sans altérer le moins du monde la forme primitive. C'est ce que nous avons vu plus haut pour l'alun, et ce que M. Beudant a constaté sur plusieurs autres sels.

L'auteur de ces recherches en fait des applications ingénieuses aux phénomènes de diverses substances minérales cristallisées, sur lesquelles nous ne pouvons pas faire d'expériences directes dans l'état actuel de la science; et il y fait

remarquer de grandes analogies : les cristaux mélangés de substances étrangères sont en général plus simples ; on en voit même dans l'espèce de l'axinite, ou schorl violet du Dauphiné, dont une extrémité, mélangée de chlorite, est réduite à la forme primitive, tandis que l'autre, plus pure, est variée de plusieurs facettes produites par divers décroissements.

On trouve assez abondamment, dans un ravin du Mont-d'Or en Auvergne, des fragments d'une brèche, que sa dureté et ses autres qualités extérieures faisaient regarder comme siliceuse, et à laquelle les minéralogistes n'avaient donné d'attention qu'à cause de quelques parcelles de soufre qui se voient quelquefois dans ses petites cavités.

M. Cordier, l'ayant soumise à des épreuves variées, s'aperçut qu'elle donnait, par la chaleur, une quantité notable d'acide sulfurique; et, d'après cette indication importante, il procéda à une analyse complète, d'où il résulte que cette pierre contient environ 28 centièmes de silice, 27 d'acide sulfurique, 31 d'alumine, 6 de potasse, et un peu d'eau et de fer. C'est, à peu de chose près, la composition de la pierre célèbre de *la Tolfa,* qui donne l'alun de Rome. Et en effet, en traitant la brèche du Mont-d'Or suivant les procédés en usage à la Tolfa, c'est-à-dire en la concassant, la torréfiant et l'exposant à l'air humide, on en a obtenu de 10 à 20 pour cent d'un alun très-pur; elle en donne même sans la torréfier, et par la simple exposition dans un lieu humide.

D'après des recherches faites sur les lieux par M. Ramond, il est probable qu'avec un peu de soin l'on découvri-

rait, dans la partie moyenne du Mont-d'Or, les couches dont les fragments épars dans le ravin se sont détachés, et que l'on pourrait y ouvrir des carrières dont l'exploitation ne serait pas sans avantage.

M. Cordier regarde ces sortes de pierres comme une espèce minéralogique dont l'essence consisterait dans la présence de l'acide, de l'alumine et de la potasse. La silice y est moins essentielle, car il existe à Montrone en Toscane des carrieres d'une pierre qui n'en contient point, mais qui a tous les autres principes constituants, et donne les mêmes produits que celle de la Tolfa. Les variétés de cette espèce, où il entre de la silice, se distinguent aisément par la gelée qu'elles forment quand on les traite successivement par la potasse caustique et l'acide hydrochlorique étendu d'eau.

M. Cordier y rapporte plusieurs pierres volcaniques, désignées vaguement jusqu'ici, par les géologistes, sous la dénomination générale de *laves altérées*.

Des paysans du département du Lot, conduits par l'appât de prétendus trésors que l'on disait avoir été enfouis autrefois par les Anglais, dans certaines cavernes des environs de Breugue, ont pénétré dans ces cavités, et, ayant creusé et élargi quelques crevasses qui se trouvaient dans leur profondeur, ont découvert un dépôt d'ossements, dont les uns appartenaient à des chevaux; les autres à des rhinocéros, de la même espèce dont il y a en si grande quantité des ossements fossiles en Sibérie, en Allemagne et en Angleterre; les troisièmes, à une espèce de cerf inconnue aujourd'hui

sur le globe, et dont les bois ont quelque rapport éloigné avec ceux d'un jeune renne.

Guettard avait trouvé un grand nombre de ces mêmes bois aux environs d'Étampes.

Ces témoins importants des révolutions de notre continent ont été recueillis par M. Delpont, procureur du Roi à Figeac, et présentés à l'Académie par M. Cuvier. Ils sont déposés au cabinet du roi.

M. Palisot de Beauvois a entretenu l'Académie d'un phénomène géologique assez singulier, qu'il a observé dans le comté de Rowan, province de la Caroline du nord. Au milieu d'une colline d'un sable très-fin, entremêlé de petites pierres de quartz et de nombreuses parcelles de mica argenté, se trouve une veine de pierres disposées si régulièrement, que les habitants, qui l'ont remarquée depuis longtemps, lui donnent le nom de *mur naturel,* et que des naturalistes ont même prétendu, depuis quelque temps, que c'était un véritable mur qui pouvait avoir été construit, à des époques reculées, par quelque peuple aujourd'hui inconnu. Les pierres ont généralement quatre arêtes, sont amincies à l'une de leurs extrémités, et ont une petite entaille au-dessous du sommet. Elles sont rangées horizontalement. L'espèce de mur qu'elles forment a environ 18 pouces d'épaisseur; sa hauteur, à l'endroit où il est à découvert, est de 6 à 9 pieds; mais on l'a suivi en creusant jusqu'à 12 et 18 pieds dans le sol, et on a déja reconnu qu'il s'étend à plus de 300 pieds en longueur. Une sorte de ciment argilleux remplit les intervalles des pierres, et les enduit à l'extérieur,

et chacune d'elles est revêtue d'une couche de terre ocracée et sablonneuse.

M. de Beauvois en a rapporté quelques-unes qui, examinées par les minéralogistes de l'Académie, ont offert la plupart des caractères des basaltes; mais, comme il n'a encore été observé dans les États-Unis aucune trace ni de basaltes, ni de volcans; et comme le terrain environnant est généralement primitif, il serait possible que ce prétendu mur ne fût qu'une couche de trapp, roche amphibolique très-semblable à certains basaltes.

Nous avons parlé, en 1816, du travail entrepris par M. Moreau de Jonnès, pour déterminer la nature géologique des Antilles, des idées générales qu'il s'en fait, et des descriptions particulières relatives à la Martinique et à la Guadeloupe, qu'il a présentées à l'Académie. Il a continué la rédaction de ce travail, et a lu un mémoire sur le *Vauclain*, l'un des monts les plus remarquables de la Martinique, non qu'il soit le plus élevé, mais parce que c'est celui qui sert de point de reconnaissance et qui annonce cette île aux navigateurs. Il n'a point la forme d'un cône creusé à son sommet, mais celle d'un prisme couché, ou d'une immense arête basaltique, et M. de Jonnès le regarde comme une partie de l'orle et du bord d'un très-grand cratère, dont il croit avoir reconnu tout le pourtour. Le fond de ce cratère est aujourd'hui une vallée aussi fertile que bien cultivée.

Le même auteur a donné une description géologique de la Guadeloupe. Il a reconnu que l'île occidentale où il y a une solfatare en activité, et dont la surface est d'environ

67 lieues quarrées, doit son origine à des éruptions parties de quatre grands foyers volcaniques sous-marins, et que l'île orientale, connue sous le nom de grande terre, est formée d'une base volcanique, recouverte par une grande stratification de calcaire coquillier. A la Martinique les quartiers situés à l'orient sont également recouverts par des lits de calcaire marin soit coquillier, soit coralin.

La seconde partie de la *Richesse minérale* de M. Héron de Villefosse, qui avait été présentée, en manuscrit, à l'Académie en 1816, a paru imprimée cette année avec l'atlas. Cet ouvrage a justifié le jugement qu'en avait porté la compagnie, et est devenu le guide indispensable de tous ceux qui s'occupent de l'administration des mines et de leur exploitation.

BOTANIQUE.

Le plus anciennement connu et le plus utile des palmiers, est sans contredit le dattier, l'une des principales richesses de la Barbarie et de l'Égypte, et qui se cultive aussi avec avantage dans plusieurs contrées de l'Europe méridionale. M. Delisle, qui en a observé la culture avec soin pendant qu'il était attaché à l'expédition d'Égypte, l'a décrite avec détail dans un Mémoire qu'il a présenté à l'Académie. Cet arbre vient de graines, de drageons, et même de bouture. L'opération de la bouture, qui consiste à replanter le sommet après l'avoir séparé de son tronc, avait déja été mentionnée par Théophraste et par Pline; et M. Délisle a entendu des Arabes lui assurer qu'on la pratique encore. On sait que le dattier a les sexes séparés sur des individus différents; les drageons de chaque arbre produisent des individus

du même sexe. Les habitants, pour tirer le plus de parti possible de leur terrain, ont soin de ne replanter que le petit nombre de mâles nécessaires pour la fécondation artificielle des femelles; et lorsque des causes quelconques empêchent que l'on ne place en temps convenable les régimes de ces dattiers mâles, à portée de répandre leur poussière fécondante sur les fleurs femelles, les fruits ne mûrissent point et la récolte est perdue.

Une espèce de palmier beaucoup moins connue que le dattier, est celle du *nipa*, qui croît spontanément dans l'archipel des Indes, le long des bords de la mer, et dont Rumphius et M. Thumberg ont donné des descriptions incomplètes; on en mange les jeunes amandes confites. Son régime, coupé avant son développement, donne une liqueur douce, qui, en fermentant, devient spiritueuse et agréable à boire. On fait, avec ses feuilles, des paniers, des nattes et d'autres menus ouvrages.

M. Houtou-Labillardière en a observé et décrit avec soin la fructification, et rectifié sur plusieurs points les idées que l'on s'en faisait. La fleur femelle a trois stigmates, et le jeune fruit trois ovules; l'embryon est placé à la base de la graine, ses chatons mâles, à fleurs sessiles, ses anthères portées sur un seul filet, quoique non ramifié, ses fleurs femelles, dépourvues de calice, et ses fruits agglomérés, lui donnent des rapports sensibles avec les pandanus. Mais ses spathes, les calices à six divisions de ses fleurs mâles, ses feuilles pennées le rapprochent encore davantage des vrais palmiers.

Les anciens parlent beaucoup d'un arbre de l'Égypte au-

quel ils donnent le nom de *persea*, qui ressemblait à un poirier, mais dont les feuilles duraient toute l'année, dont le fruit à noyau était très-doux et très-sain, et dont le bois dur et noir avait une grande valeur. On trouve encore, dans les auteurs arabes du moyen âge, des descriptions d'un arbre qu'ils appellent *leback*, et qui offre tous les caractères attribués par les anciens à leur *persea;* mais aujourd'hui cet arbre est devenu si rare, au moins dans la basse Égypte, que les botanistes ne l'ont pas reconnu avec certitude : les uns, comme Lécluse, et Linnæus d'après lui, ont donné le nom de *persea* à une espèce de laurier; opinion d'autant moins admissible que ce laurier vient d'Amérique. D'autres, comme Schréber, ont cru le retrouver dans le *sébestier (cordia mixa)*, dont le fruit visqueux est tout différent. M. Delisle a été plus heureux : ayant observé dans un jardin du Caire un individu de l'arbre appelé par Linnæus *ximenia ægyptiaca*, il lui trouva la plupart des caractères dn *persea* : une hauteur de dix-huit à vingt pieds, des branches épineuses, des feuilles ovales persistantes, longues d'un pouce à dix-huit lignes, traits qui ont pu donner lieu à la comparaison avec le poirier; un fruit de la forme d'une datte, doux lorsqu'il est mûr, contenant un noyau un peu ligneux, etc. Parvenu dans la haute Égypte, M. Delisle en rencontra deux autres, et il apprit, par les habitants des contrées supérieures, que l'espèce est commune en Nubie et en Abyssinie, et très-estimée dans le Darfour; cependant il n'a pu savoir si le cœur du bois est noir, comme le disent les anciens de leur *persea*.

Cet arbre se nomme aujourd'hui, en Nubie, *eglig*. M. Delisle lui trouve des différences assez marquées pour le sé-

parer des autres *ximenia*, et il en fait un genre sous le nom de *balanites*.

Parmi les végétaux d'où découle un suc d'apparence laiteuse, l'un des plus remarquables est celui que les colons espagnols ont nommé l'*arbre de la vache,* parce que son lait, loin d'avoir, comme celui des euphorbes et de la plupart des autres plantes laiteuses, des qualités acres et malfaisantes, fournit au contraire une boisson saine et agréable. M. de Humboldt a lu à l'Académie une description de cet arbre, et des expériences sur le suc qu'il fournit. Ce célèbre voyageur n'ayant pu le voir en fleurs, n'en détermine pas le genre; mais d'après son fruit il paraît appartenir à la famille des sapotilliers : son port est élevé, ses feuilles longues de huit à dix pouces, alternes, coriaces, oblongues, pointues, marquées de nervures latérales et parallèles. Quand on y fait des incisions, il en découle un lait gluant, d'une odeur de baume très-agréable, dont les nègres mangent beaucoup en y trempant du pain de maïs ou de manioc, et qui les engraisse sensiblement. A l'air, il s'y forme à la surface des pellicules qui prennent, en se desséchant, quelque chose de l'élasticité du caoutchouc, et il se sépare un caillot qui s'aigrit avec le temps, et auquel le peuple donne le nom de fromage.

M. de Humboldt s'est livré, à ce sujet, à des considérations générales sur les différents laits végétaux, dont les qualités malfaisantes dépendent de certains principes vénéneux qui s'y trouvent assez abondants pour se manifester par leurs effets, tels que la morphine dans l'opium; mais dans les familles même les plus délétères, il existe des es-

pèces dont le suc n'est pas malfaisant, telles que l'*euphorbia balsamifera* des Canaries, l'*asclepias lactifera* de Ceylan.

MM. de Humboldt et Bonpland ont continué la publication de leur grand ouvrage de botanique, intitulé : *Nova genera et species plantarum æquinoctialium* (1). Le troisième volume, qui sera achevé en quelques mois, et le quatrième, qui est déja imprimé, mais non encore publié, compléteront la série des plantes à corolle monopétale. Ces quatre volumes renferment plus de 3000 espèces nouvelles réparties en 623 genres, dont près de 100 nouveaux. M. Kunth, correspondant de l'Académie, auquel la publication de cet ouvrage est confiée, a décrit, dans la famille des composées, près de 600 espèces rangées d'après une méthode qui lui est propre. Des notes ajoutées par M. de Humboldt offrent les hauteurs auxquelles croissent les plantes des Cordillières, et des considérations sur la distribution des formes végétales sur le globe. Il reste encore deux volumes à publier, consacrés aux familles des plantes à corolle polypétale.

Mais, comme le plan adopté pour les *nova genera et species* ne permet pas de donner les figures de toutes les plantes rapportées par les voyageurs, M. Kunth a commencé de donner, dans un ouvrage particulier, sous le titre des *Mimoses et autres plantes du nouveau continent de la famille des légumineuses*, le choix des espèces les plus belles.

(1) Nova genera et species plantarum quas in peregrinatione ad plagam æquinoctialem Orbis novi collegerunt, descripserunt et partim adumbraverunt Am. Bonpland et Al. de Humboldt. Ex schedis autographis A. Bonplandii in ordinem digessit C. S. Kunth.

Les dessins, exécutés avec tout le luxe auquel se prête l'iconographie française, seront accompagnés d'un travail général sur les légumineuses. Les dessins appartenant au premier cahier de cette monographie, ont été présentés à l'Académie.

Pour assigner à chaque genre sa place dans l'ordre naturel, M. Kunth a été obligé d'attacher particulièrement toutes les familles des plantes, d'examiner l'immense nombre de genres et d'espèces conservées dans les herbiers, et de compulser tous les différents auteurs qui ont traité les mêmes objets avant lui. C'est à la suite de ces recherches, qu'il nous a donné, dans des mémoires particuliers, des observations générales sur les familles des graminées, des cypéracées, des pipéracées, des aroïdées, et encore dernièrement la revision de la famille des bignoniacées. Ces travaux ont pour objet, ou d'indiquer les groupes ou sous-divisions qu'on peut établir dans ces familles, ou de circonscrire avec plus de précision les caractères de leurs genres.

En même temps, le savant auteur de la Monographie des *jungermannia,* M. Hooker continue à Londres la publication des plantes cryptogames que M. de Humboldt lui a confiée. Il a réuni ces plantes à celles qui ont été rapportées par M. Menzies. L'ouvrage de M. Hooker porte le titre de *Musci exotici.*

M. de Beauvois continue toujours avec la même persévérance la publication des plantes recueillies dans ses voyages; et il a fait paraître cette année la dix-septième livraison de sa Flore d'Oware et de Benin, dont nous avons déja plusieurs fois entretenu nos lecteurs.



ZOOLOGIE.

M. le comte de Lacépède ayant eu en communication des peintures très-soignées rapportées du Japon par feu M. Titsing, représentant une multitude d'objets d'histoire naturelle, dont ceux qui nous étaient connus sont rendus avec une grande exactitude, a cru pouvoir regarder ces peintures comme des documents suffisamment authentiques, même pour établir des espèces que l'on ne connaît point par d'autres voies. En conséquence, il en a extrait la description de plusieurs espèces de cétacées qui n'ont point encore été observées par les naturalistes européens. Elles consistent en deux baleines proprement dites, c'est-à-dire sans nageoire dorsale; quatre balénoptères, ou baleines pourvues d'une nageoire sur le dos; un physétère, ou cachalot muni de nageoire dorsale, et un dauphin.

L'auteur donne avec détail les caractères distinctifs de ces huit animaux, qui forment une addition considérable à la liste des cétacées connus, laquelle, dans le dernier ouvrage de M. de Lacépède sur cette classe, ne s'élevait encore qu'à trente-quatre.

M. Cuvier a présenté une tête d'orang-outang d'âge moyen, qui lui a été récemment envoyée de Calcutta par M. Wallich, directeur du jardin de la compagnie des Indes. Il a fait remarquer que les têtes d'orangs-outangs décrites jusqu'à-présent étaient toutes prises d'individus fort jeunes et qui n'avaient point encore changé leurs dents de lait : celle qu'il a mise sous les yeux de l'Académie étant plus avancée,

a déja le museau plus saillant et le front plus reculé; on y voit des commencements de crêtes temporales et occipitales qui la font ressembler beaucoup à celle du grand singe connu sous le nom de *Pongo* de Wurmb. Cette dernière tête ayant d'ailleurs toutes les connexions d'os, les formes, les proportions et les positions de fentes et de trous qui sont caractéristiques pour les orangs-outangs, il ne serait pas impossible que le grand singe de Wurmb ne fût qu'un orang-outang ordinaire adulte. Dans tous les cas, c'est une véritable espèce d'orang, et c'est mal-à-propos que M. Cuvier lui-même, déterminé par la petitesse relative de son crâne, l'avait laissé auprès des mandrilles et des autres singes à long museau.

M. Cuvier a en outre fait voir la figure d'un tapir originaire de Sumatra, qui existe vivant dans la ménagerie du gouverneur-général des Indes anglaises, le marquis de Hastings, et qui diffère du tapir d'Amérique par la couleur blanchâtre d'une partie de son dos, tandis que le reste du corps est d'un brun noir. Il résulte d'un mémoire qui accompagnait ce dessein, et qui avait été envoyé à M. Cuvier par M. Diard, jeune naturaliste occupé dans les Indes de recherches scientifiques, que cette espèce de quadrupède habite non-seulement l'île de Sumatra, mais encore une partie de l'Inde au-delà du Gange. Jusqu'à-présent on avait cru le genre des tapirs propre à l'Amérique.

M. Moreau de Jonnès, correspondant de l'Académie, qui a le projet de décrire particulièrement les différents reptiles des Antilles, et qui avait commencé ce travail l'année dernière par une histoire fort étendue de la fameuse vipère jaune

ou fer-de-lance de la Martinique, a présenté cette année un Mémoire sur l'espèce de gecko appelé dans cette île *mabouïa des murailles*, et qui n'est autre chose que le *gecko à queue épineuse* de Daudin. Cet animal, d'un aspect hideux, et à qui ses ongles donnent la faculté de se cramponner assez pour marcher sous des plafonds, habite l'intérieur des maisons, où il poursuit principalement les blattes ; il inspire de l'horreur aux habitants, qui lui attribuent des dispositions malfaisantes, et lui ont donné ce nom de *mabouïa,* parce que c'était celui que le mauvais principe portait chez les Caraïbes. C'est le même animal dont Acrélius avait dit qu'il lance une salive noire et vénéneuse, et qui a été indiqué, mais très-mal décrit, par plusieurs naturalistes, sous le nom de *sputateur.* On appelle dans les Antilles *mabouïa des bananes* une autre espèce de gecko qui arrive à une plus grande taille, et qui est le *gecko lisse* de Daudin, dont la queue, quand elle a été arrachée, renaît souvent beaucoup plus grosse qu'elle n'était auparavant (1).

Ces notions sont d'autant plus intéressantes, que des naturalistes avaient transféré par erreur le nom de *mabouïa* à une espèce de scinque.

Le même observateur a donné un autre Mémoire sur la couleuvre à laquelle son agilité a fait donner le nom de *courresse (coluber cursor, gm.).* C'est un animal timide et in-

(1) Le gecko à queue épineuse, le gecko porphyré et le sputateur sont le même animal, selon M. Moreau de Jonnès; ils appartiennent à la famille des gecko hémidactyles.

Le gecko lisse et le gecko à queue renflée sont aussi le même et appartiennent aux thécadactyles.

nocent, qui détruit dans les jardins beaucoup de limaçons, et que les habitants protégent soigneusement, parce qu'ils le croient l'ennemi acharné de la vipère fer-de-lance; mais c'est une erreur occasionnée, selon M. de Jonnès, parce qu'on l'a confondue avec une grande espèce de boa, qui n'existe plus aujourd'hui à la Martinique.

Les grands ouvrages de zoologie publiés par les académiciens ont été continués avec zèle; il a paru un volume des *Animaux sans vertèbres* de M. Delamarre, et des livraisons des *Observations zoologiques* de M. de Humboldt, et des *Insectes d'Afrique* de M. de Beauvois.

ANATOMIE ET PHYSIOLOGIE.

Nous avons rendu compte avec beaucoup de détail, dans notre Analyse de l'année dernière, des importantes recherches par lesquelles M. le chevalier Geoffroy Saint-Hilaire a cherché à ramener les pièces osseuses de l'appareil branchial des poissons, à celles qui remplissent des fonctions analogues dans le squelette des trois autres classes d'animaux vertébrés. Ce savant naturaliste a présenté cette année à l'Académie plusieurs nouveaux Mémoires sur le même sujet, et il a publié le tout en un volume, sous le titre de *Philosophie anatomique, ou des organes respiratoires, sous le rapport de la détermination et de l'identité de leurs pièces osseuses*, avec dix planches en taille-douce.

Le travail de M. Geoffroy peut être considéré sous trois aspects distincts. Il embrasse :

1° L'énumération et la description de toutes les pièces

osseuses composant chacun des organes qui contribuent à la respiration, dans les poissons, et de celles de quelques-unes des autres classes, lorsqu'il était nécessaire au plan de l'auteur de les décrire de nouveau;

2° Les rapports admis par l'auteur, entre les pièces que jusqu'à-présent l'on avait crues exclusivement propres aux poissons, et celles qu'il regarde comme leur étant analogues dans les autres vertébrés;

3° Les considérations auxquelles il s'élève d'après ces rapports nouvellement aperçus, touchant la nature et la destination des organes dont les pièces font partie.

Ainsi M. Geoffroy énumère et décrit avec soin toutes les petites pièces qui entrent dans la grande ceinture branchiostége; celles qui forment les arcs osseux sur lesquels les branchies sont suspendues; celles qui supportent ces arcs; celles qui leur sont annexées sous le nom d'os pharyngiens; celles qui les recouvrent sous le nom d'opercules, etc. Il fait connaître de combien de pièces se compose le sternum dans les diverses classes de vertébrés, et comment ces pièces y sont arrangées. Il donne aussi des détails neufs et curieux sur la composition des divers os hyoïdes, et sur les points d'ossification qui se montrent dans les cartilages des divers larynx, ainsi que sur la ressemblance du larynx supérieur des oiseaux avec celui des mammifères.

Cette partie de son travail, qui consiste en faits certains, en grande partie nouveaux, et tous nettement exposés, demeurera toujours une acquisition précieuse pour la science.

La seconde partie, qui établit les rapports des pièces dont nous venons de parler, avec celle des classes supérieures, est

déja susceptible de plus de difficulté, ainsi qu'on a pu l'entrevoir dans notre dernière Analyse.

Selon M. Geoffroy, les pièces qui forment l'opercule branchial répondent au cadre du tympan et aux osselets de l'ouïe; les pièces qui portent la membrane branchiostége résultent d'un entrelacement, d'une intercalation des parties du sternum, entre celle de l'os hyoïde; d'un renversement du corps de cet os hyoïde, qui porte en avant et transforme en os lingual ses formes thyroïdiennes, lesquelles, dans les mammifères, se dirigeaient en arrière pour s'unir au cartilage thyroïde; enfin d'un déplacement du sternum, qui, du lieu qu'il occupait dans les trois premières classes, derrière les clavicules ou les os coracoïdes, le transporte en avant de ces mêmes os et sous la gorge. Les pièces latérales qui unissent les arcs des branchies à la chaîne commune qui les porte, répondent, toujours selon M. Geoffroy, aux points d'ossification du cartilage thyroïde, et aux cartilages arythénoïdes; les os pharyngiens inférieurs, à ceux du cartilage cricoïde; les supérieurs, à une lame qui se serait détachée de l'os sphénoïde, ou à la partie cartilagineuse de la trompe d'Eustache; les arcs branchiaux à ceux des bronches; les petites pièces qui les hérissent, aux anneaux de la trachée. Nous avons déja annoncé ces rapports dans notre précédente Analyse, et nous ne pouvons aujourd'hui que renvoyer à l'exposition détaillée que M. Geoffroy en donne; on y trouvera tous les motifs qui peuvent faire assigner à chacun d'eux le degré de probabilité dont il est susceptible.

Quant au troisième ordre des idées de M. Geoffroy, celles qui concernent les fonctions véritablement essentielles des organes, on peut dire que ces idées sont en partie nées des

recherches dont nous venons de parler, et qu'en partie elles ont été conçues pour en appuyer les résultats.

Ainsi M. Geoffroy, une fois convaincu que les pièces si développées qui composent l'opercule branchial des poissons, et qui, dans cette classe, ne paraissent pas servir à l'ouïe, ne sont que le marteau, l'enclume, et les autres osselets de l'oreille des mammifères, sur une plus grande échelle, a dû être conduit à douter que ces osselets fussent des organes de l'ouïe, même dans les animaux où on les a toujours regardés comme tels, et à les considérer seulement comme une *sorte de superflu resté rudimentaire* (ce sont ses termes) dans les animaux à poumon, et *indicateur d'une organisation rigoureusement nécessaire et amplement développée* dans les poissons.

De même, ayant cru retrouver dans l'appareil osseux des branchies qui ne produisent aucune voix, toutes les pièces du larynx, il a dû être disposé à croire que ce n'est pas *sur de solides et véritables considérations que l'on a présenté le larynx comme destiné à la voix, comme l'organe principal de la voix;* et il aime mieux l'appeler *la première couronne du tuyau introductif de l'air dans le poumon, le lieu des vouloirs de l'organe respiratoire*, et *la réunion de ses plus zélés serviteurs.*

Cependant il est de notre devoir de faire remarquer que, sur ce dernier sujet, M. Geoffroy n'est pas aussi opposé à l'opinion reçue, que les efforts qu'il fait pour soutenir la sienne pourraient porter à le croire : car il ne conteste pas que, dans les animaux à poumon, le larynx ne serve à la voix; et il établit même une théorie nouvelle pour expliquer comment cet organe remplit cette fonction. Il en est de même

de la partie de son travail où M. Geoffroy combat l'existence d'un larynx inférieur dans les oiseaux. Ce n'est pas qu'il nie que les oiseaux n'aient, au bas de leur trachée, des dispositions organiques qui produisent des sons; il veut dire seulement que ces dispositions ne consistent pas en pièces semblables à celles du larynx supérieur; ce que personne en effet n'a jamais prétendu.

La théorie particulière à M. Geoffroy, sur la voix et sur le son, n'est pas dans une dépendance nécessaire de ses recherches anatomiques, et tient à des idées de physique générale qu'il s'est faites depuis long-temps, mais qu'il n'a point assez développées dans cette occasion pour que nous puissions en rendre compte. Nous dirons seulement qu'il regarde le cartilage thyroïde comme un corps sonore servant de table d'harmonie à l'instrument vocal, et que c'est au rapprochement et à l'éloignement de ce cartilage et de l'hyoïde, qu'il attribue les variations de tons.

Ce volume est terminé par un Mémoire sur les os de l'épaule. L'auteur avait depuis long-temps fait connaître les rapports de ces os dans les poissons, avec les os analogues des oiseaux; et même c'est par-là qu'il a été conduit à toutes les recherches d'ostéologie comparée, dont nous avons entretenu plus d'une fois nos lecteurs. Il a repris cette matière sous un point de vue plus général, et regarde ces os comme arrivés, dans les poissons, à leur maximum de développement et d'importance, y servant de bouclier au cœur, de soutien au diaphragme, et comme de chambranle à l'opercule branchial.

Au reste, nous répéterons ici l'invitation que nous avons déja faite aux naturalistes, de consulter un ouvrage rempli

de faits intéressants et nouveaux, et où l'on trouvera une grande instruction, même sur les points où l'on ne croira pas pouvoir adopter toutes les opinions de l'auteur.

M. Edwards a continué les expériences curieuses qu'il avait commencées l'année dernière sur la respiration des grenouilles; déja il s'était assuré que la présence de l'air est utile pour prolonger la vie de ces animaux, lorsque la circulation et la respiration pulmonaire ont cessé; que l'eau les fait périr plus promptement qu'une enveloppe solide, et d'autant plus promptement qu'elle est moins aérée; et il s'est occupé plus particulièrement cette année de l'influence de l'air contenu dans l'eau, et de celle de la température à laquelle on élève ce liquide. Il a constaté que l'action délétère de l'eau diminue avec la température. Les grenouilles ont vécu deux fois plus long-temps dans de l'eau à 10 degrés, que dans de l'eau à 15°, et trois fois plus dans de l'eau à o: au contraire, leur vie s'abrége de près de moitié à 22°, de plus des trois quarts à 32; et elles périssent instantanément quand on les plonge dans de l'eau à 42°. Le froid de l'atmosphère avant l'opération est encore une circonstance favorable au prolongement de la vie dans l'eau froide. La quantité de l'air contenu dans l'eau, le volume de l'eau employée, le renouvellement plus fréquent de cette eau, sont des circonstances qui y contribuent aussi, chacune dans des proportions et des limites que M. Edwards détermine par des expériences nombreuses, et faites avec toutes les précautions d'une physique exacte.

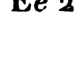
Entre 0 et 10 degrés, les grenouilles peuvent vivre plusieurs mois, dans une quantité de dix litres d'eau aérée,

que l'on renouvelle une fois par jour : l'action que l'air de cette eau exerce sur leur peau suffit à leur existence, sans qu'elles aient besoin de mettre en jeu leurs poumons; mais à 10° et au-dessus, elles ne peuvent continuer à vivre qu'en venant respirer l'air à la surface. Si on les retient sous l'eau, à 12 ou 14°, par exemple, quelque soin que l'on prenne de la renouveler, elles périssent en un ou deux jours; de l'eau courante peut leur faire supporter quelquefois, sous l'eau, une température plus élevée; quelques-unes la soutiennent jusqu'à 22°.

Indépendamment de leur intérêt pour la théorie générale de l'action de l'air sur le sang, ces expériences expliquent plusieurs traits singuliers de l'économie de ces animaux, et sur-tout la différence extraordinaire de leur genre de vie en hiver et en été.

MÉDECINE ET CHIRURGIE.

La membrane pupillaire est un voile celluleux et vasculaire qui ferme la prunelle dans le fœtus, et qui se déchire et disparaît, d'ordinaire, vers l'époque de la naissance. M. Portal a présenté quelques observations sur ce voile, qu'il croit occasionner, en quelques cas, des cécités de naissance, lorsqu'il ne se déchire pas, cécités qu'on pourrait guérir par une opération facile. M. Portal pense que l'enfant naissant est dépourvu d'ouïe et d'odorat aussi-bien que de vue, parce que les narines et la cavité de son tympan sont remplies de mucosités, dont il faut qu'il se débarrasse pour jouir de ces organes. Il arrive aussi quelquefois des





surdités de naissance, parce que la cavité du tympan ne s'est pas dégorgée.

M. Portal, dont nous avons analysé l'année dernière le travail sur les grossissements du cœur sans dilatation de ses cavités, en a lu un cette année sur les anévrismes de cet organe.

Il y établit qu'ils sont très-communs; qu'ils consistent toujours en une ampliation plus ou moins grande d'une ou de plusieurs de ses quatre cavités, soit que leurs parois soient amincies, soit qu'elles aient acquis plus d'épaisseur, ce qui arrive souvent; que, dans tous les cas, c'est le sang qui produit ce surcroît d'ampliation, seul ou concurremment à d'autres causes, dans une ou plusieurs des cavités du cœur, en distendant leurs parois toujours trop faibles relativement à son impulsion, soit parce que le sang est généralement en trop grande quantité dans tout le système de sa circulation; soit parce que, trouvant des obstacles pour sortir du cœur, il y est retenu en trop grande quantité, d'où il résulte qu'il distend toujours ses parois; que les contractions des parois du cœur, bien loin d'être plus fortes lorsque ces parois sont plus épaisses, sont au contraire plus faibles, si elles sont désorganisées par quelque vice, comme elles le sont presque toujours alors; et que s'il arrivait que, le cœur étant sain, ses parois eussent un peu plus d'épaisseur que dans l'état naturel, elles se contracteraient alors, sans doute, avec plus de force, mais aussi qu'elles seraient dans une disposition contraire à celle où elles se trouvent quand l'anévrisme se forme. Alors, poussant le sang avec trop de violence dans les artères pulmonaires et dans l'aorte, elles pourraient y produire des ané-

vrismes, mais jamais dans la cavité du cœur, d'où ce sang proviendrait.

M. Portal conclut de ces observations, en faveur des opinions de plusieurs illustres médecins, que les anévrismes sont toujours passifs par rapport à la force des parois du cœur, absolue ou relative à l'action du sang contre ces mêmes parois ; que les signes indicatifs des anévrismes, exposés par ces savants médecins, sont les plus certains, et que leur pratique, relativement à la saignée, est la mieux éprouvée et la plus efficace.

M. le baron Percy a communiqué à l'Académie des recherches historiques curieuses sur le *méricisme*, sorte d'indisposition assez dégoûtante, et qui consiste à faire revenir à la bouche les aliments à demi digérés, pour les avaler une seconde fois. C'est une espèce de rumination, qui a fait avancer bien des opinions extravagantes aux médecins qui en ont parlé. M. Percy réduit toutes ces opinions à leur juste valeur.

Diverses maladies de la poitrine, en altérant les rapports du vide avec le plein dans cette cavité, ou en réduisant en tout ou en partie la faculté qu'a le poumon de se dilater ou de se contracter, produisent des changements dans le son que rendent les parois de la poitrine lorsqu'on les frappe ; changements qui donnent, en certains cas, des indications utiles sur les causes auxquelles ils sont dus.

C'est de là qu'est né l'art de reconnaître les affections de la poitrine par la percussion, dont Auenbrügger, médecin de Vienne, a publié un traité qui a été traduit et étendu par M. Corvisart. Mais on peut faire encore sur l'état de la

poitrine des observations plus délicates, soit en approchant l'oreille, soit en employant divers instruments : ces observations constituent l'art d'explorer les maladies du thorax au moyen de l'auscultation.

M. Laennec, médecin de Paris, a présenté à l'Académie un Mémoire sur ce sujet, où il expose une méthode qui lui est propre. Tantôt il emploie un cylindre plein, tantôt un tube à parois épaisses, tantôt un tube évasé en forme d'entonnoir; il applique une extrémité de ces instruments aux divers points du thorax, et approche son oreille de l'autre extrémité.

Le tube à parois épaisses, ou cylindre percé dans son axe d'un canal étroit, appliqué à la poitrine d'un individu qui parle ou qui chante, ne fait entendre, si l'individu se porte bien, qu'une sorte de frémissement plus ou moins marqué; mais s'il existe un ulcère dans le poumon, il arrive un phénomène très-singulier : la voix du malade cesse de se faire entendre par l'oreille restée libre; elle parvient tout entière à l'observateur par le canal pratiqué dans le cylindre. Des commissaires de l'Académie ont vérifié cette expérience sur plusieurs phthysiques. Le même phénomène a lieu quand on applique l'instrument sur la trachée ou sur le larynx d'un homme sain. M. Laennec, qui donne à cet effet des altérations pulmonaires le nom de *pectoriloquie,* en distingue les variétés, et fait connaître les indications qui en résultent par rapport aux ulcères du poumon, à leur grandeur, à leur état de vacuité ou de plénitude, et à la consistance de la matière qu'ils renferment.

Cet instrument fait aussi entendre d'une manière distincte

les mouvements de la respiration et les battements du cœur, en sorte que l'on juge facilement de leur plus ou moins de régularité; ce qui ne peut manquer de donner aussi des indications utiles pour les vices de ces deux fonctions.

L'emploi de l'or en médecine, long-temps vanté par les alchimistes, semblait oublié dans les derniers temps, lorsque M. Chrétien, célèbre médecin de Montpellier, annonça qu'il avait reconnu à ce métal, même dans son état de pureté, des propriétés médicamenteuses très-efficaces, et qu'il en avait tiré grand parti contre des affections scrophuleuses et syphilitiques. Il a adressé à l'Académie un travail volumineux qui contient l'histoire des principales maladies qu'il a traitées, et le détail des précautions avec lesquelles il a fait usage de ce nouveau remède. Les commissaires de la compagnie ont fait, à leur tour, et d'après les méthodes indiquées, des expériences nombreuses, pour être en état d'en apprécier les vertus. Au moyen de frictions d'or ou de muriate triple d'or et de soude, faites sur la langue, ils sont parvenus à cicatriser des ulcères scrophuleux, à résoudre des engorgements syphilitiques, à détruire en partie des exostoses, à arrêter des caries, à mettre fin à des douleurs ostéocopes insupportables, à dissiper d'anciennes ophtalmies, des maux de gorge opiniâtres, des dartres et d'autres éruptions qui avaient résisté à tous les autres remèdes.

Mais il leur est souvent arrivé aussi d'être beaucoup moins heureux; et leur défaut de succès n'a pas consisté seulement à laisser le mal dans son état primitif; il s'est plusieurs fois exaspéré par l'action du remède : des tumeurs

indolentes se sont enflammées; de la fièvre, de la colique, des inflammations alarmantes de l'estomac se sont manifestées; un gonflement du périoste, jusque-là sans douleur, a dégénéré en cancer.

Il est donc très-certain que l'or est bien éloigné d'être un agent aussi impuissant qu'on le prétendait; mais il est certain aussi que son emploi a besoin d'être guidé d'après des règles et des précautions relatives aux circonstances où se trouvent les sujets sur lesquels on veut en faire usage; règles et précautions qu'une longue expérience et une suite nombreuse d'observations bien appréciées pourront seules procurer à l'art de guérir.

Feu M. Ravrio, fabricant de bronzes, qui avait acquis de la célébrité par la perfection où il avait porté ce genre d'ouvrage, légua il y a deux ans une somme à l'Académie, pour être décernée à celui qui découvrirait les moyens de préserver les doreurs sur bronze des funestes effets de la vapeur de mercure qui les fait presque tous périr de bonne heure après des souffrances cruelles.

Ce prix a été remporté par M. Darcet, qui non-seulement a donné la solution complète du problème de M. Ravrio, mais qui a inséré dans son Mémoire tant de vues utiles pour rendre plus faciles, plus efficaces et moins mal-saines les diverses opérations dont se compose l'art du doreur, que son ouvrage est devenu un traité complet de cet art, aujourd'hui si important pour la France.

Le moyen imaginé par M. Darcet, consiste en un fourneau de rappel dont un tuyau monte dans la cheminée du doreur; il y produit un tel courant ascensionnel de l'air,

qu'aucune parcelle de mercure ne manque d'en être entraînée; et même, en adaptant à la cheminée un autre tuyau qui se recourbe sur un vase rempli d'eau, on recueille utilement la plus grande partie de ce mercure vaporisé.

Un autre changement important fait par M. Darcet, est d'avoir substitué le nitrate de mercure à l'acide nitrique, pour l'opération du décapage qui nuisait aussi beaucoup à la poitrine des ouvriers, lorsqu'elle se faisait avec l'acide pur.

Les procédés que M. Darcet avait depuis long-temps introduits à la Monnaie, se sont répandus dans plusieurs ateliers de doreurs, et M. le préfet de police ne permet plus à aucun doreur de s'établir ni de transporter son atelier sans le disposer de manière à les employer.

Les ventouses sont des instruments en forme de cloche, que l'on applique à la peau en y faisant le vide, soit par la chaleur, soit par un piston; le poids de l'atmosphère agit sur toute la surface du corps, excepté à l'endroit sur lequel est la ventouse, ce qui produit naturellement à cet endroit une élévation de la peau et un gonflement de ses vaisseaux sanguins et lymphatiques, qui les rend rouges et violets, et qui y excite un sentiment très-vif de chaleur. Des scarifications pratiquées soit avant soit après l'application de la ventouse, font écouler une partie du sang et de la lymphe qui s'y étaient accumulés. Les parties adjacentes et plus profondes se trouvent débarrassées du liquide qui les engorgeait, et reviennent sur elles-mêmes par une contraction, suite naturelle de la dilatation extérieure.

Ce moyen curatif, dont les anciens faisaient beaucoup

a été alternativement plus en usage : encore aujourd'hui, les oculistes sont partagés sur leur mérite, et préfèrent l'une ou l'autre, selon l'idée qu'ils s'en font, et l'habitude qu'ils en ont prise. Ce qui en avait prévenu quelques-uns contre l'opération par déplacement ou abaissement, c'était l'incertitude de ce que devenait le cristallin, et la crainte qu'il ne reprît sa place et n'obstruât de nouveau la pupille. Mais on sait aujourd'hui, par les expériences de M. Scarpa, qu'il ne tarde point à être dissous ou absorbé dans les humeurs de l'œil, et qu'il n'en reste bientôt aucune trace.

M. Roux a lu à l'Académie un Mémoire sur ces deux méthodes, et sur leurs avantages mutuels : il préfère l'extraction; mais il convient qu'elle n'est point applicable dans tous les cas, et c'est alors seulement qu'il voudrait que l'on pratiquât l'abaissement.

ÉCONOMIE RURALE.

M. Yvart, invité l'année dernière, par le ministre de l'intérieur, à aider de ses conseils le propriétaire d'une terre en Auvergne, dans une grande entreprise agricole, faite sur les débris d'anciens volcans, s'est empressé de se rendre sur ce domaine intéressant, et il a saisi cette occasion pour étudier le système d'économie rurale adopté dans les environs du Mont-d'Or et du Puy-de-Dôme.

Il a entretenu l'Académie de plusieurs objets qui avaient attiré son attention dans ce voyage, tels que la pratique des défrichements, les inconvénients de l'*écobuage*, l'importance des prairies naturelles et artificielles, la nécessité de détruire le préjugé qui existe encore sur plusieurs points, à l'égard des



dernières; la culture des céréales sur les coteaux à pente rapide, celle de quelques plantes économiques, propres à améliorer le sort des habitants des pays montueux; l'éducation, l'entretien et les produits des bestiaux; les moyens de remplacer, dans plusieurs cas, pour leur usage, le sel commun par les eaux minérales acidules; la recherche, la préparation et l'emploi des engrais et des amendements; la nécessité des plantations, les précautions à prendre pour assurer leur succès, les avantages et l'établissement des irrigations.

Le dernier de ces objets ayant paru à M. Yvart mériter d'être traité avec plus d'étendue, d'après les nombreux renseignements que lui avaient fournis ses divers voyages dans presque toute la France, en Italie, en Suisse et en Angleterre, il s'est attaché à démontrer, dans un autre travail qu'il a également soumis à l'Académie, toute l'importance de ce genre d'amélioration pour notre économie rurale, et combien il nous reste encore à faire pour en tirer tout le parti possible.

Le ministre fait imprimer en ce moment l'ensemble des recherches et des observations de ce savant cultivateur, afin de les communiquer aux administrations et aux sociétés d'agriculture. Ainsi les propriétaires ruraux vont bientôt en jouir, et y puiseront sans doute plus d'une idée utile à l'amélioration de leurs domaines.

M. Yvart a aussi communiqué plusieurs détails intéressants sur la statistique agricole de l'Angleterre, en rendant compte à l'Académie d'un ouvrage que lui avait adressé l'auteur, M. Farey, sur le comté de Derby.

STATISTIQUE.

M. Moreau de Jonnès a donné un Mémoire sur la population des Antilles, où il apprécie les causes et la mesure de l'augmentation ou de la diminution annuelle de chacune des classes qui la composent.

D'après des données officielles, il estime que la mortalité est de 4 sur 100 parmi les créoles blancs et parmi les créoles de couleur affranchis, et de 3 seulement parmi les créoles noirs esclaves; mais c'est tout une autre proportion pour les arrivants. Il meurt 21 hommes sur 100 dans les troupes anglaises, et 33 dans les françaises; ce que l'auteur attribue au régime mieux entendu des premières. Les noirs enrégimentés en Afrique par les Anglais, et transportés aux Antilles, ne perdent que dans la proportion de $3\frac{1}{2}$ pour 100. Mais les esclaves apportés par la traite, perdent jusqu'à 17; ce qui, comme on voit, n'approche pas encore de la mortalité des Européens.

La reproduction pour les blancs est de 3 pour 100, et, pour les gens de couleur libres, de 4; ce qui tient aux nombreuses cohabitations des blancs avec des négresses et des mulâtresses; mais, parmi les esclaves, il ne naît à la Martinique que 2 enfants sur 100 personnes. Cette classe diminuerait donc annuellement de 1 sur 100. La diminution serait du double à la Grenade, selon Colqhoun.

L'Académie a jugé ce Mémoire digne du prix nouvellement fondé par un anonyme, pour l'encouragement de la statistique.